O pentagrama é gerado a partir de um pentágono regular, quando se desenham as suas diagonais. Este é constituído por triângulos de ouro, que determinam razões de ouro nos lados do pentagrama. O triâgulo de ouro é um triângulo isósceles que tem na base ângulos de 72° e no vértice superior um ângulo com 36° de amplitude. Os lados congruentes estão para a base segundo a razão de ouro. Quando bissectamos o ângulo da base, a bissetriz divide o lado oposto de acordo com a razão de ouro e origina dois triângulos isósceles de menores dimensões. Um destes triângulos é semelhante ao original, enquanto o outro pode ser utilizado para gerar uma espiral.

A continuação do processo de bissecção do ângulo da base, do novo triângulo de ouro obtido, provoca uma série de triângulos de ouro e a formação de uma espiral equiangular.

ISBN 85-903795-1-5

9 788590 379515

Praticando a Aritmética

José Carlos Admo Lacerda

José Carlos Admo Lacerda

Praticando a Aritmética

Agradecimento

Agradeço a Deus por me permitir concluir este trabalho, aos meus pais, esposa e filhos pela ajuda e apoio, assim como aos colegas que contribuíram com sugestões, críticas e observações.

Apresentação

Este trabalho destina-se aos admiradores da Aritmética em geral. e particularmente aos candidatos às instituições de ensino em que esta ciência seja uma referência.

Esta edição, que ora apresenta-se, foi revista e ampliada. Além disso, procurou-se reforçar as demonstrações dos conceitos e fórmulas, sem perder-se, entretanto, a objetividade dos exercícios.

Sabe-se que um trabalho deste vulto não se encerra nesta edição, portanto quaisquer novas sugestões podem ser encaminhadas para o endereço na contra capa. Desde já agradece-se às novas "proposições".

Atenciosamente

janeiro de 2007

José Carlos Admo Lacerda

Sumário

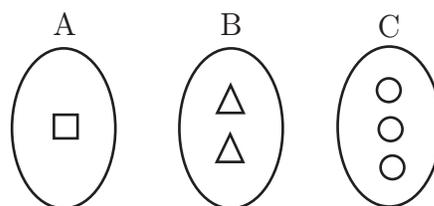
Capítulo 1

Numeração

1.1 Conjunto

É uma noção primitiva, portanto, não possui definição.

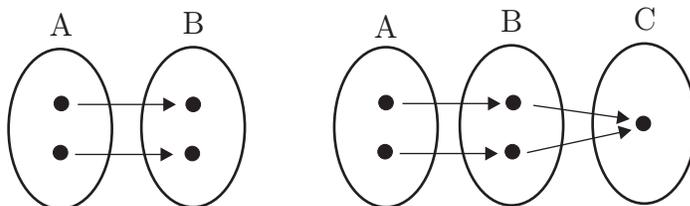
Intuitivamente, temos a noção de uma reunião de objetos, de pessoas, ...

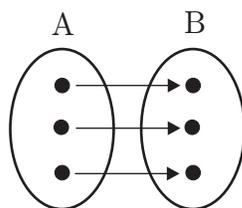
Esses objetos, pessoas, ... são denominados de *elementos* e, cada elemento quando considerado isoladamente, dá-nos a idéia de unidade.

□ . . .unidade

△ . . .unidade

○ . . .unidade

1.2 Correspondência

É a associação que podemos formar entre elemento(s) de conjuntos.

1.2.1 Correspondência Unívoca

É a associação obtida de um conjunto para outro.

1.2.2 Correspondência Biunívoca

É a associação onde existe reciprocidade.

1.3 Conjuntos Equivalentes

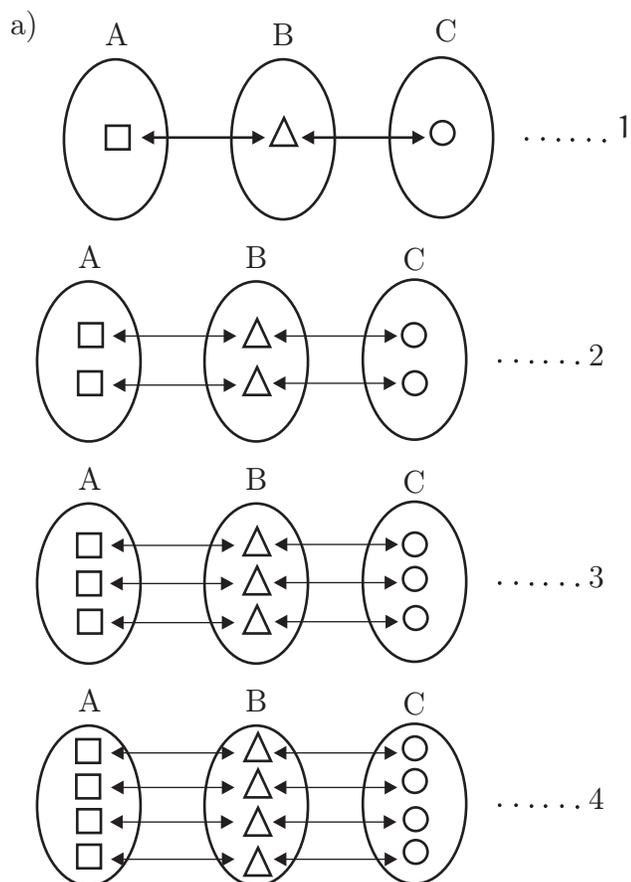
São aqueles cujos elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca.

1.4 Número Natural

Denomina-se número natural a "tudo que for definido por um conjunto e, por todos os conjuntos que lhe sejam equivalentes." (Bertrand Russel)[1].

[1] Matemático e filósofo inglês ($1.872 - 1.970$).

1.5 Associação de Elementos e Símbolos

a)

Observação: O símbolo 0 é utilizado para indicar ausência de elementos num conjunto.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$[2]

Observações:

1ª Os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são denominados *algarismos*[3] ou *dígitos*.

2ª A reunião de dois ou mais algarismos formam números denominados de *polidígitos*.

---

[2] $\mathbb{N} \ldots$ Notação devida a Peano(1.858 − 1.932).

[3] Algarismo – Nome derivado de *algarismi*, corruptela de Al-Khwarizmi, sobrenome do matemático e geógrafo árabe abu Abdullah Mohammed bem Musa.

3ª Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9 são ditos *significativos* e, o 0 diz-se *insignificativo* quando considerado isoladamente, ou à esquerda de um número natural uma ou mais vezes.

Exemplos: 01, 007, 00047, ...

4ª Os nomes e os números são indiferentemente ditos, *numerais*.

5ª Os algarismos 0, 2, 4, 6 e 8 ou os números *polidígitos* cujo último algarismo da direita seja um desses, são ditos números *pares*;

6ª Os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ou os números *polidígitos* cujo último algarismo da direita seja um desses, são ditos números *ímpares*.

Supondo $\mathcal{P}$ como o conjunto dos números pares e $\mathcal{I}$ o conjunto dos números ímpares, podemos escrever:

$\mathcal{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$

$\mathcal{I} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$

1.6 Numeração

É a arte de representar os números.

1.7 Divisão da Numeração

A numeração divide-se em: *falada e escrita*

a) *falada* - dá nome aos números

Exemplos:

zero, um, dois, três, quatro, . . . , em português.

zero, un, deux, trois, quatre,. . . , em francês.

zero, one, two, three, four, . . . , em inglês.

zero, ein, zwein, drei, vier, . . . , em alemão

b) *escrita* - representa-os através de símbolos

Exemplos:

0, 1, 2, 3, 4,. . .

I, II, III, IV, . . .

1.8 Sistema de Numeração

É um conjunto de princípios, leis e artifícios utilizados para representar os números.

1.9 Base de um Sistema de Numeração

É a quantidade de símbolos[4]*, a partir de zero, necessários para representarmos um número qualquer.*

Observação: O nome da base está relacionado à quantidade de símbolos. Assim sendo, teremos:

Base	*Símbolos*
dois	0 e 1
três	$0; 1$ e 2
quatro	$0; 1; 2$ e 3
cinco	$0; 1; 2; 3$ e 4
seis	$0; 1; 2; 3; 4$ e 5
sete	$0; 1; 2; 3; 4; 5$ e 6
oito	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ e 7
nove	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ e 8
dez	$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ e 9

1.10 Ordens e Classes

1.10.1 Ordem

É a posição que cada algarismo ocupa em um número dado.

Por convenção, ficou estabelecido que tal posição seja crescente da direita para a esquerda do mesmo, isto é, 1ª , 2ª , 3ª , ordem ...

Suponha $N = abcdefgh$, um número qualquer, onde cada letra represente um algarismo. Sobre N, podemos afirmar que é um número constituído de oito ordens, ou seja:

$N =$	a	b	c	d	e	f	g	h	
	8ª	7ª	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª	oito ordens

[4]Algarismos ou letras

1.10.2 Classe

É o agrupamento das ordens.

Esse agrupamento pode ser: de duas em duas, de três em três, de quatro em quatro ordens,..., consideradas sempre da direita para a esquerda.

Observação: Uma classe diz-se completa quando possuir todas as ordens e, em caso contrário, será dita, incompleta.

Sendo $N = abcdefgh$, podemos ter:

a) quatro classes, com dois algarismos cada uma.

$$\begin{array}{llllll} N = & ab & cd & ef & gh & \\ & 4^{\underline{a}} & 3^{\underline{a}} & 2^{\underline{a}} & 1^{\underline{a}} & \text{classes} \end{array}$$

b) três classes de três algarismos, sendo uma delas (a terceira) incompleta.

$$\begin{array}{lllll} N = & ab & cde & fgh & \\ & 3^{\underline{a}} & 2^{\underline{a}} & 1^{\underline{a}} & \text{classes} \end{array}$$

Observação: A terceira é incompleta, porque possui apenas dois algarismos.

c) duas classes, com quatro algarismos cada uma.

$$\begin{array}{llll} N = & abcd & efgh & \\ & 2^{\underline{a}} & 1^{\underline{a}} & \text{classes} \end{array}$$

1.11 Princípios da Numeração para uma Base Qualquer

1.11.1 1º Princípio: da numeração falada

Beta (β) *unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.*

1.11.2 2º Princípio: da numeração escrita

Qualquer algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem, igual a β *vezes as unidades de ordem desse outro.*

1.12 Numeração Decimal

1.12.1 Sistema de Numeração Decimal

O sistema decimal ou Indú-Arábico[5]*, é o adotado por todos os países e tem como base dez algarismos.*

1.12.2 Princípios da Numeração Decimal

1º Princípio: da numeração falada

Dez unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

Esse princípio é complementado pelas seguintes palavras: um (1), dois (2), três (3), quatro (4), cinco (5), seis (6), sete (7), oito (8), nove (9) e zero (0).

Observações:

1ª) Os números iniciais, isto é, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, constituem as unidades simples que são denominadas também de unidades de 1ª ordem.

2ª) Dez unidades simples recebem o nome de dezena e constituem uma unidade de 2ª ordem.

3ª) As dezenas recebem as seguintes denominações:
- uma dezena ou dez (10);
- duas dezenas ou vinte (20);
- três dezenas ou trinta (30);
- quatro dezenas ou quarenta (40);
- cinco dezenas ou cinqüenta (50);
- seis dezenas ou sessenta (60);
- sete dezenas ou setenta (70);
- oito dezenas ou oitenta (80);
- nove dezenas ou noventa (90).

4ª) Entre dez e vinte intercalam-se os números, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove. Assim sendo, teremos:
- dez e um ou onze (11);
- dez e dois ou doze (12);

[5] Esse sistema foi introduzido na Europa por Fibonacci ou Leonardo de Pisa(1.170–1.250), através do *Liber Abaci*(livro de cálculo)

- dez e três ou treze (13);
- dez o quatro ou quatorze (14);
- dez e cinco ou quinze (15);
- dez e seis ou dezesseis (16);
- dez e sete ou dezessete (17);
- dez e oito ou dezoito (18);
- dez e nove ou dezenove (19);

Analogamente ao que foi escrito anteriormente, poderemos estender o raciocínio para as intercalações entre vinte e trinta, trinta e quarenta, ... noventa e cem.

5ª) Dez dezenas recebem o nome de uma centena, e constituem uma unidade de 3ª ordem.

As centenas recebem as seguintes denominações:
- uma centena ou cem (100);
- duas centenas ou duzentos (200);
- três centenas ou trezentos (300);
- quatro centenas ou quatrocentos (400);
- cinco centenas ou quinhentos (500);
- seis centenas ou seiscentos (600);
- sete centenas ou setecentos (700);
- oito centenas ou oitocentos (800);
- nove centenas ou novecentos (900);

Observação: Entre as centenas colocamos os nomes das dezenas acompanhadas das respectivas unidades, caso hajam.

1.12.3 Classes e Ordens

Por convenção, no sistema de numeração decimal, cada três ordens formam uma classe.

Seja $N = \ldots zyx \ldots lkjihgfedcba$, um número dado.

Dividindo-o em classes de três algarismos, teremos:

$N =$	$\ldots$	zyx	$\ldots$	lkj	ihg	fed	cba	
				4ª	3ª	2 ª	1ª	classe(s)

De acordo com o princípio da numeração falada, podemos perceber que a contagem das ordens, a partir da direita, deverá ser efetuada do seguinte modo:

1ª ordem: de 1 em 1 unidade;

2ª ordem: de 10 em 10 unidades;

3ª ordem: de 100 em 100 unidades;

4ª ordem: de 1.000 em 1.000 unidades;

⋮

Assim sendo, teremos:

6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª	ordens
100.000	10.000	1.000	100	10	1	unidade(s)

1.12.4 Nomenclatura das Classes

1ª classe: das unidades;

2ª classe: dos milhares; (Obs.: É desta classe que retiramos o radical mil)

3ª classe: dos milhões;

4ª classe: dos bilhões;

5ª classe: dos trilhões;

6ª classe: dos quatrilhões;

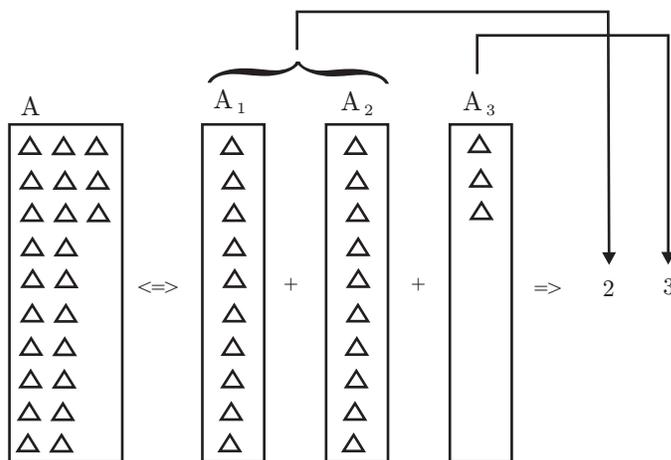
7ª classe: dos quintilhões;

⋮

sextilhões, septilhões, octilhões, nonilhões, decilhões,...subdivididas também em unidades, dezenas e centenas. Com essas classes definidas, pode-se dar nomes a qualquer número.

1.12.5 Formação e Leitura dos Números Polidígitos

1º caso: *O número dado possui apenas dois algarismos.*

Seja por exemplo, o conjunto seguinte:

O número anterior possui 2 dezenas e 3 unidades, portanto, lê-se: vinte e três.

2º caso: *O número dado possui mais de três algarismos.*

Regra:
Divide-se o número dado em classe de três algarismos, da direita para a esquerda. A seguir, lê-se o número da esquerda para a direita, acompanhado do(s) nome(s) da(s) mesma(s).

Ex.: Ler o número 28354017689

Dividindo-o em classes de três algarismos, teremos:

28	354	017	689
bilhões	milhões	milhares	unidades

O número acima lê-se: vinte e oito bilhões, trezentos e cinqüenta e quatro milhões, dezessete mil, seiscentos e oitenta e nove unidades.

Obs.: O zero indica ausência de unidades numa ordem qualquer.

2º Princípio: da numeração escrita

Todo algarismo escrito à esquerda de outro, representa unidades de ordem igual a dez vezes as unidades de ordem desse outro.

1.12.6 Numerais Ordinais

São os numerais que nos dão a idéia de ordem (posição) dos elementos em uma sucessão.

Os numerais ordinais são expressos por números, com a letra "o" à direita e ao mesmo tempo sobrescrita.

Leitura

Cardinais	*Ordinais*
um	primeiro (1º)
dois	segundo (2º)
três	terceiro (3º)
quatro	quarto (4º)
cinco	quinto (5º)
seis	sexto (6º)
sete	sétimo (7º)
oito	oitavo (8º)
nove	nono (9º)
dez	décimo (10º)
onze	décimo primeiro (11º)
doze	décimo segundo (12º)
treze	décimo terceiro (13º)
catorze ou quatorze	décimo quarto (14º)
quinze	décimo quinto (15º)
dezesseis	décimo sexto (16º)
dezessete	décimo sétimo (17º)
dezoito	décimo oitavo (18º)
dezenove	décimo nono (19º)
vinte	vigésimo (20º)
trinta	trigésimo (30º)
quarenta	quadragésimo (40º)
cinqüenta	qüinquagésimo (50º)
sessenta	sexagésimo (60º)
setenta	septuagésimo (70º)
oitenta	octagésimo (80º)
noventa	nonagésimo (90º)

cem	centésimo (100º)
duzentos	ducentésimo (200º)
trezentos	tricentésimo (300º)
quatrocentos ...	quadringentésimo (400º)
quinhentos ...	qüingentésimo (500º)
seiscentos ...	sexcentésimo (600º)
setecentos ...	setingentésimo (700º)
oitocentos ...	octingentésimo (800º)
novecentos ...	noningentésimo ou nongentésimo (900º)
mil	milésimo ou primeiro milésimo (1.000º)
dez mil	décimo milésimo (10.000º)
cem mil	centésimo milésimo (100.000º)
um milhão	primeiro milionésimo (1.000.000º)
um bilhão	primeiro bilhonésimo (1.000.000.000º)

Obs: O ordinal de "B"é o **beésimo** , o ordinal de "N"é o **enésimo**, e assim por diante.

1.12.7 Valores Posicionais dos Algarismos

Existem dois valores posicionais para os algarismos:

o valor absoluto e o valor relativo

.

a) *Valor Absoluto (V. A)* - É o número de unidades simples desse algarismo, que independe de sua posição (ordem) em um número dado.

Ex.: No número 2.543, temos:

$$\mathsf{V.A}(2) = 2; \quad \mathsf{V.A}(5) = 5; \quad \mathsf{V.A}(4) = 4; \quad \mathsf{V.A}(3) = 3$$

b) *Valor Relativo (V.R)* - É o número de unidades simples, de dezenas, de centenas, ... de um algarismo qualquer, que vai depender portanto de sua posição (ordem) em um número dado.

Ex.: No número 2.543, temos:

$V.\ R\ (2) = 2.000$ (duas unidades de 4ª ordem)

$V.\ R\ (5) = 500$ (cinco unidades de 3ª ordem)

V. R (4) = 40 (quatro unidades de 2ª ordem)

V. R (3) = 3 (três unidades de 1ª ordem)

1.12.8 Propriedades

1ª *De um número natural* α *até um outro natural* ω *existem, sucessivamente,* $[(\omega - \alpha) + 1]$ *números.*

2ª *Em uma centena de números naturais sucessivos, qualquer algarismo se repete* 20 *vezes*[6], *nas* 1ª *e* 2ª *ordens.*

3ª *Em um milhar de números naturais sucessivos, qualquer algarismo se repete* 300 *vezes*[7], *nas* 1ª , 2ª *e* 3ª *ordens.*

4ª *De* 1 *até* 10^n *(exclusive), qualquer algarismo significativo se repete* $n \times 10^{n-1}$ *vezes*[8], *nas* 1ª , 2ª , 3ª , ... n*-ésima ordens.*

5ª *De* 0 *até* 10^n *, exclusive, o algarismo* 0 *se repete* $n \times 10^{n-1} - 10$ *vezes*[4], *nas* 1ª , 2ª , 3ª , ... n*-ésima ordens.*

1.12.9 Quantidade (Q) de algarismos, na sucessão dos números naturais, de 1 até N

Para efeito de demonstração consideremos de 0 até a, de 00 até ab, de 000 até abc...

1º) De 1 até a, teremos:

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a \end{matrix}\right\} \quad Q = [(a - 0) + 1] - \underbrace{1}_{\text{zero}} \text{ ou } Q = a \text{ algarismos}$$

[6]O zero só começa a se repetir 20 vezes, nas 1ª e 2ª ordens, em todas as centenas sucessivas a partir de 10.

[7]O zero só começa a se repetir 300 vezes, nas 1ª , 2ª e 3ª ordens, em todas as centenas sucessivas a partir de 10 e assim, por diante.

[8]O zero só começa a se repetir $n \times 10^{n-1}$ vezes, nas 1ª ,2ª , 3ª ,..., nª ordens, em todas as unidades, dezenas, centenas sucessivas ... a partir de 10 e assim, por diante.

2º) De 1 até ab, teremos:

$$\left.\begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ \vdots \\ 09 \\ 10 \\ 11 \\ \vdots \\ ab \end{matrix}\right\} Q = [(ab - 00) + 1] \times 2 - \underbrace{(1 + 10)}_{11 \text{ zeros}} \text{ ou } Q = [(ab + 1) \times 2 - 11] \text{ algarismos}$$

3º) De 1 até abc, teremos:

$$\left.\begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 002 \\ \vdots \\ 009 \\ 010 \\ 011 \\ \vdots \\ abc \end{matrix}\right\} \begin{array}{l} Q = [(abc - 000) + 1] \times 3 - \underbrace{(1 + 10 + 100)}_{111 \text{ zeros}} \\ \text{ou} \\ Q = [(abc + 1) \times 3 - 111] \text{ algarismos} \end{array}$$

4º) De 1 até abcd, teremos:

$$\left.\begin{matrix} 0000 \\ 0001 \\ 0002 \\ \vdots \\ 0009 \\ 0010 \\ 0011 \\ \vdots \\ 0099 \\ 0100 \\ 0101 \\ \vdots \\ 0999 \\ 1000 \\ 1001 \\ \vdots \\ abcd \end{matrix}\right\} \begin{array}{l} Q = [(abcd - 0000) + 1] \times 4 - \underbrace{(1 + 10 + 100 + 1.000)}_{1.111 \text{ zeros}} \\ \text{ou} \\ Q = [(abcd + 1) \times 4 - 1.111] \text{ algarismos} \end{array}$$

Generalizando para $N = \underbrace{abc\ldots w}_{\alpha \text{ algs}}$, chegaremos a conclusão que:

$$\mathbf{Q = (N+1) \times \alpha - \underbrace{(111\ldots1)}_{\alpha\ 1\text{'s}}}$$

Ex$_1$.: Calcular a quantidade algarismos que existem na sucessão dos números naturais, de 1 até 432.

Resolução:

Se $N = 432 \Rightarrow \alpha = 3 \rightarrow Q = (432+1) \times 3 - 111 \therefore Q = 1.188$ algarismos

Verificação:

De 1 até 9 $\Rightarrow$ 9 números ou 9 algarismos
De 10 até 99 $\Rightarrow$ 90 números ou 180 algarismos
De 100 até 432 $\Rightarrow$ 333 números ou 999 algarismos

Total: $9 + 180 + 999 = 1.188$ algarismos

1.12.10 Lei de Formação da Quantidade de Algarismos

De 1 até 9 $\Rightarrow Q = (9+1) \times 1 - 1 \therefore Q = 9$ algs
De 1 até 99 $\Rightarrow Q = (99+1) \times 2 - 11 \therefore Q = 189$ algs
De 1 até 999 $\Rightarrow Q = (999+1) \times 3 - 111 \therefore Q = 2.889$ algs
De 1 até 9.999 $\Rightarrow Q = (9.999+1) \times 4 - 1111 \therefore Q = 38.889$ algs
$\vdots$

Conseqüentemente, de 1 até $\underbrace{999\ldots9}_{\alpha \text{ algs}}$, teremos: $Q =$"$\alpha - 1$" $\underbrace{888\ldots8}_{\alpha-1\ 8\text{'s}}9$.

Observações:[9].

Se $1 \leq Q \leq 9 \Rightarrow N = a \therefore \alpha = 1$

[9] Os sinais > e < apareceram pela 1ª vez em Londres, 1.631, na obra **Artis Analyticae Práxis**, de Thomaz Harriot(1.560–1.621), enquanto os sinais $\geq$ e $\leq$ devemo-los a Pierre Bouguer(1.698–1.758)

Se $9 < Q \leq 189 \Rightarrow N = ab \therefore \alpha = 2$
Se $189 < Q \leq 2.889 \Rightarrow N = abc \therefore \alpha = 3$
Se $2.889 \leq Q < 38.889 \Rightarrow N = abcd \therefore \alpha = 4$
$\vdots$

Cuidado! A quantidade de algarismos nos intervalos $9 < Q \leq 189$, $189 < Q \leq 2.889, \ldots$ poderá gerar um número que não tenha todas as ordens (v. exerc. resolv. $n^{\underline{o}}$ 6) .

1.12.11 Cálculo Simplificado de Q em Função de N, e vice-versa

Vimos que: $Q = (N+1) \times \alpha - \underbrace{(111\ldots1)}_{\alpha\ 1\text{'s}}$ algarismos

Se $\alpha = 1 \rightarrow Q = N$ ou $N = Q$
Se $\alpha = 2 \rightarrow Q = 2N - 9$ ou $N = \dfrac{Q+9}{2}$
Se $\alpha = 3 \rightarrow Q = 3N - 108$ ou $N = \dfrac{Q+108}{3}$
Se $\alpha = 4 \rightarrow Q = 4N - 1.107$ ou $N = \dfrac{Q+1.107}{4}$
$\vdots$

Observe uma "lei"regendo o numerador: 9, 108, 1.107, 11.106, $111.105, \ldots$

1.13 Exercícios Resolvidos

1) Calcular a quantidade de números naturais sucessivos que existem, de 7 até 18.

   Resolução:

   De acordo com a $1^{\underline{a}}$ propriedade, podemos facilmente ver que:

   $[(18-7)+1] = 12$ números.

2) Escolher um algarismo significativo, qualquer, e verificar que de 0 até 10^n (exclusive) ele aparece $n \times 10^{n-1}$ vezes, nas $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$,$\ldots$ n-ésimas ordens.

Resolução:

Seja, para efeito de demonstração, o algarismo 7.

1º) De 0 até 10 (exclusive) o 7 aparece uma única vez, quando escrevemos o próprio 7.

2º) De 0 até 100 (exclusive) deveremos analisá-lo nas, 1ª e 2ª ordens.

Na ordem das unidades u o 7 aparece nos números:

$7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87$ e 97

ou seja, 10 vezes;

Na ordem das dezenas d, vê-se que o 7 aparece de 70 até 79, isto é,

$[(79 - 70) + 1] = 10$ vezes

Total: $10(u) + 10(d) = 20$ vezes

3º) De 1 até 1.000 (exclusive)

1 milhar $\Leftrightarrow$ 10 centenas (c);

Se em cada centena o 7 aparece 20 vezes, então em 10 centenas aparecerá 10×20 vezes, ou seja, 200 vezes (unidades + dezenas);

O 7 aparece na ordem das centenas, de 700 até 799, ou seja:

$[(799 - 700) + 1] = 100$ vezes.

Total: $200(u; d) + 100(c) = 300$ vezes.

Conclusão:

De 0 até 10^1 (exclusive) $\Rightarrow$ 1 vez; $1 = 1 \times 10^0$;

De 0 até 10^2 (exclusive) $\Rightarrow$ 20 vezes $= 2 \times 10^1$ vezes;

De 0 até 10^3 (exclusive) $\Rightarrow$ 300 vezes $= 3 \times 10^2$ vezes;

$\vdots \quad \vdots$

De 0 até 10^n (exclusive) $\Rightarrow n \times 10^{n-1}$ vezes

3) Determinar o número de algarismos que existem na sucessão dos números naturais, de 1 até 4.321.

Resolução:

Se $N = 4.321 \rightarrow \alpha = 4 \therefore Q = 4 \times 4.321 - 1.107$ ou $Q = 16.177$

4) Calcular o número de vezes o algarismo 7 aparece na sucessão dos números naturais, de 0 até 10.000, exclusive.

Resolução:

Sabemos que $10.000 = 10^4 \Rightarrow n = 4$

Se, de 0 até 10^n (exclusive) $\Rightarrow n \times 10^{n-1}$, então, de 1 até 10^4 teremos:

$4 \times 10^{4-1} = 4.000$ vezes.

5) Determinar o último número N escrito na sucessão dos números naturais, sabendo que de 1 até N foram escritos 3.829 algarismos.

Resolução:

Se $Q = 3.829$, então,

$$2.889 < 3.829 \leq 38.889 \Rightarrow \alpha = 4 \to N = \frac{3.829 + 1.107}{4} = \frac{4.936}{4} = 1.234$$

6) Na sucessão dos números naturais, a partir de 1, calcular o 15.000° algarismo escrito. [10]

Resolução:

Esta resolução é análoga à anterior, portanto ...

Se $Q = 15.000$, então,

$$2.889 < 15.000 \leq 38.889 \Rightarrow \alpha = 4 \to N = \frac{15.000 + 1.107}{4} = \frac{16.107}{4}$$

```
16.107 |_4___
   010   4.026
    27
     3
```

Vê-se que o último número deveria ser o 4.026, mas como o resto é igual a 3, indica-nos que existem apenas três algarismos para compormos o próximo número, que é um número de quatro algarismos, portanto, o próximo número será o 402 e o último algarismo escrito, como vemos, será o 2.

[10] 15.000° – Lê-se: décimo quinto milésimo.

1.14 Exercícios Propostos

1) O número 7.896 tem .... centenas e .... dezenas.

2) Se o algarismo y tiver o valor .... , a soma dos valores absolutos dos algarismos do número $57y4$ será 24.

3) Calcule a diferença entre a soma dos valores relativos dos algarismos do número 2.345 e a soma de seus valores absolutos.

4) Somei 11 centenas a .... dezenas, e obtive 7 unidades de 4ª ordem.

5) No sistema de numeração decimal, 100 unidades de 3ª ordem formam 10 unidades de .... ordem.

6) No número 19.894, o valor relativo do algarismo 9 da primeira classe é .... vezes o valor absoluto do algarismo 9 da quarta ordem.

7) Em 5.897 há .... dezenas e .... meias centenas.

8) Quinhentas unidades de 2ª ordem, correspondem a .... de 5ª ordem ou a 50 de .... ordem.

9) Quarenta e três meias unidades de 3ª ordem, valem .... dezenas.

10) O valor relativo do algarismo 7 no número 38.794 é .... vezes o seu valor absoluto.

11) O número 567.894 tem .... dezenas, ... unidades de 3ª ordem e .... meios milhares.

12) O número .... é constituído de 9 unidades de 2ª ordem, 4 unidades de milhar, 3 unidades de 6ª ordem, 3 unidades simples e 4 unidades de milhões.

13) Um número tem 14 algarismos. A ordem de suas unidades mais elevadas é a das ....

14) Se a ordem mais elevada de um número natural é a das dezenas de milhões, esse número consta de .... ordens, e .... classes.

15) Somei 7 centenas a .... dezenas, e obtive 8 unidades de 4ª ordem.

16) Se de 9 unidades de 4ª ordem subtrairmos .... centenas, o resto será igual a 370 dezenas.

17) No número 15.346 há .... meias centenas.

18) Cinqüenta e quatro meias unidades de 4ª ordem valem .... unidades de 3ª ordem.

19) Quantas dezenas simples têm doze dezenas de milhar?

20) Quantas centenas simples têm cem dezenas de milhar?

21) Um número é formado de 3 unidades de 6ª ordem, 6 de 5ª ordem e meia unidade de 3ª ordem. Esse número tem .... dezenas simples.

22) Qual o número que, por extenso, representa três quatrilhões, cinco milhões e duas unidades?

23) Foram pintados 1.389 algarismos nas cadeiras de um teatro. Qual o número da última cadeira?

24) Quantos algarismos têm um livro de:

a) 234 páginas?

b) 1.499 páginas?

c) 13.247 páginas?

25) Para enumerar as páginas de um livro gastaram-se 986 algarismos. Qual o último algarismo escrito?

26) Quantas páginas têm um livro que possui:

a) 594 algarismos?

b) 4.889 algarismos?

c) 55.129 algarismos?

27) De 1 até 365 escrevem-se, sucessivamente, ... algarismos.

28) De 37 até 78 há .... números naturais e .... algarismos.

29) Para fazer a relação de todos os números de dois e três algarismos, e alguns de quatro, escreveram-se 3.068 algarismos. Qual o último algarismo escrito?

30) Do número .... ,inclusive, até 2.573, inclusive, há 348 números naturais sucessivos.

31) Quantos números pares há entre 273 e 833?

32) Na sucessão dos números naturais de 1 até 876, quantas vezes aparece o algarismo 3?

33) Se um livro tiver 2.593 páginas, quantos algarismos serão necessários para numerá-las?

34) Calcule quantos números foram escritos sucessivamente, a partir de 1, se foram empregados 14.805 algarismos?

35) Escreve-se de 1 até 537, inclusive. Quantas vezes figurou o algarismo 5?

36) Quantas vezes o algarismo 7 aparece na sucessão dos números naturais, de 1 até 2.850?

37) Escrevendo-se a sucessão dos números naturais, qual o algarismo que ocupa a 206.788ª posição?

38) Quantos números de três algarismos existem?

39) Quantos números de cinco algarismos existem?

40) Determine o número de vezes que o algarismo 6 aparece, na série dos números naturais, de 1 até 10.000.

41) As entradas de um circo são numeradas com quatro algarismos: ou seja $0001, 0002, 0003, \ldots$ até 2.000. Quantos zeros insignificativos existem, nos números dessas entradas?

42) Quantos algarismos são necessários para acrescentar 100 páginas, num livro que possui 80 páginas?

43) Quantos algarismos são necessários para escrever todos os números naturais, de 1 até 654?

44) Um livro tem 290 páginas. Quantos algarismos serão necessários para numerá-las?

45) Empregaram-se 1.507 algarismos para escrever números naturais, dos quais 23 é o menor. Qual será o maior deles?

46) Para numerar um livro, da página do menor número de dois algarismos distintos até a do maior de três algarismos, também distintos, inclusive os extremos, de quantos algarismos precisaremos?

47) Numerando-se as casas de uma rua, foram pintados 855 algarismos. Quantas casas tem essa rua?

48) Se o algarismo 1 aparecer 211 vezes na numeração das páginas sucessivas de um livro, quantas páginas terá o mesmo?

49) Um pintor recebeu R$65,35 para numerar seguidamente de 48 em diante, inclusive, todas as cadeiras de um auditório. Sabendo que esse serviço foi pago à razão de R$0,05 por algarismo, calcule o número de cadeiras trabalhadas.

50) Foram usados os números naturais de 26 até 575 inclusive, para numerar as casas de uma rua. Convencionou-se colocar uma lixeira na frente da casa que tivesse o algarismo 7 no seu número. Quantas lixeiras devem ser compradas?

51) Quantos números entre 70 e 80 possuem mais dezenas que unidades?

52) Generalize, em $\mathbb{N}$, a expressão que permite-nos determinar o número de algarismos necessários para escrevermos todos os números de:

a) n algarismos;

b) 0 até 10^n (exclusive).

53) Determine o número de vezes que o zero aparece de 0 até 10^n (exclusive).

54) Um aluno escreveu, em ordem crescente, todos os números naturais, de 1 até 2.004. Qual é o dígito central deste número?

Respostas:

1) 78 e 789
2) 8
3) 2.331
4) 590
5) 4^a
6) 10
7) 589 e 117
8) meia e 3^a
9) 215
10) cem
11) 56.789; 5.678 e 1.135
12) 4.304.093
13) Dezenas de trilhões
14) 8 e 3
15) 730
16) 53
17) 306
18) 270
19) 12.000
20) 10.000
21) 36.005
22) 3.000.000.005.000.002
23) 499
24) a) 594
b) 4.889
c) 55.129
25) 6

26) a) 234
b) 1.499
c) 13.247

27) 987
28) 42 e 84
29) 6
30) 2.226
31) 280
32) 278
33) 9.265
34) 3.978
35) 142
36) 865
37) 7
38) 900
39) 90.000
40) 4.000
41) 1.107
42) 281
43) 1.854
44) 762
45) 550
46) 2.844
47) 321
48) 518
49) 453
50) 51
51) 7
52) a) $9 \times n \times 10^{n-1}$
b) $9 \times (1 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^2 + \cdots + n \times 10^{n-1})$
53) $n \times 10^{n-1} - 10$
54) 1

Capítulo 2

Operações Fundamentais em $\mathbb{N}$

2.1 Introdução

Uma operação diz-se fundamental, quando servir de base (fundamento) para outra(s) operação(ões).

As principais operações fundamentais são: a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão, a potenciação e a radiciação.

Estudaremos cada uma delas, seguida de suas respectivas propriedades.

2.2 Adição

É a operação que tem por fim reunir, num só número, dois ou mais números dados.

Os números a serem reunidos denominam-se *parcelas* e são interligados pelo sinal (+)[1], leia-se: *mais*.

O resultado da adição denomina-se *soma* ou *total* e é separado das parcelas pelo sinal (=) [2] leia-se: *igual* . Assim, sendo $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$, vários números dados, teremos:

[1](+) Johannes Widman (1.462 − 1.498) – 1.489 e Michael Stifel (1.480 − 1.567); ( ) parênteses . . . Nicolo Tartaglia

[2]O sinal = apareceu pela 1ª vez na obra "The Whetstone of Witte", de Robert Record, Londres,1.557.

$$\underbrace{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k}_{\text{parcelas}} = s \quad (s = \textit{soma} \text{ ou } \textit{total})$$

2.2.1 Propriedades

1ª *Comutativa*

A ordem das parcelas não altera a soma.

Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então, $a + b = b + a$

2ª *Associativa*

A soma não se altera quando duas ou mais parcelas forem substituídas por uma outra.

Se $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$, então, $[(a + b) + c] = [a + (b + c)]$

3ª *Fechamento*

A soma de dois números naturais é um número natural.

Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então, $(a + b) \in \mathbb{N}$

4ª *Elemento Neutro*

O elemento neutro da adição é o zero.

Se $a \in \mathbb{N}$, então, $a + 0 = 0 + a$

5ª *Somando-se n números naturais* $(a, b, c, \ldots z)$, *diferentes de zero, a cada uma das parcelas* $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ *de uma adição, a soma ficará aumentada desses números.*

Se $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = S$, então ...
$(p_1 + a) + (p_2 + b) + (p_3 + c) + ... + (p_k + z) = S'$
$(a + b + c + ... + z) + (p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k) = S'$ ou
$S' = S + a + b + c + ... + z$

De um modo mais claro, teremos:

$$+\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_k \\ \hline S \end{array} \qquad +\begin{array}{c} p_1 + a \\ p_2 + b \\ p_3 + c \\ \vdots \\ p_k + z \\ \hline S' \end{array} \qquad +\begin{array}{l} p_1 + a \\ p_2 + b \\ p_3 + c \\ \vdots \\ p_k + z \\ \hline S + a + b + c + \cdots + z \end{array}$$

2.2.2 Exercício

Verifique, através de exemplos numéricos, cada uma das propriedades anteriores.

2.2.3 Sucessivo (ou sucessor) de um Número Natural

Denomina-se sucessivo (ou sucessor) de um número natural a todo número que possui uma unidade a mais que o seu anterior.

Exemplos: O sucessor de 3 é $3+1$, ou seja, 4;

O sucessor de 7 é $7+1$, ou seja, 8;

O sucessor de$n$ é $n+1$.

Obs.: A expressão geral dos números ímpares pode ser dada indicada por $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, ou $2n-1$, $n \in \mathbb{N}^*$, e a dos números pares é igual a $2n$, $n \in \mathbb{N}$ ou $2n-2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2.4 Exercícios Resolvidos

1) Estudar a variação que ocorre na soma de três parcelas, quando somamos 3 à primeira, 2 à segunda e 4 à terceira.

   Resolução:

   De acordo com o que vimos na teoria, a soma ficará acrescida desses valores, portanto,

$$\begin{array}{r} p_1 \\ +\ p_2 \\ p_3 \\ \hline S \end{array} \qquad \begin{array}{r} p_1+3 \\ +\ p_2+2 \\ p_3+4 \\ \hline S+3+2+4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} p_1 \\ +\ p_2 \\ p_3 \\ \hline S+9 \end{array}$$

   Conclusão: A soma ficará aumentada de 9 unidades.

2) Determinar (em ordem crescente) três números naturais sucessivos, cuja soma seja igual a 30.

   Resolução:

   Sejam n, $n+1$ e $n+2$ três números naturais sucessivos. De acordo com o enunciado, podemos escrever que:

   $n+n+1+n+2=30$

$3n = 27$

$n = 9$

Os números, portanto, são: $9, 10$ e 11, respectivamente.

3) A soma de três números pares e consecutivos é igual a 30. Determinar esses números.

Resolução:

Sejam x; $x+2$ e $x+4$, três números pares consecutivos.

De acordo com os dados, teremos:

$x + x + 2 + x + 4 = 30$

$3x = 24$

$x = 8$

Portanto, os números serão $8, 10$ e 12, respectivamente.

2.3 Subtração

É a operação que tem por fim, a partir de dois números, encontrar um terceiro que, somado ao segundo, reproduza o primeiro.

Os números a serem reunidos denominam-se *termos* e são separados pelo sinal $(-)$[3], leia-se: *menos*. O primeiro termo denomina-se *minuendo* (m), o segundo, *subtraendo* (s) e, o terceiro, *resto* (r), *excesso* ou *diferença*.

De acordo com a definição, podemos escrever:

$$\mathbf{m - s = r}$$

2.3.1 Propriedades

As propriedades da adição não são válidas para a subtração. Estudaremos outras que, provenientes de observações, não possuem nomes específicos.

1ª *Somando-se ou subtraindo-se um número natural qualquer k (diferente de zero) ao minuendo, o resto ficará aumentado ou diminuído desse número.*

[3] Widman

$$\begin{cases} m - s = r \\ (m \pm k) - s = r' \Rightarrow \underbrace{m - s}_{r} \pm k = r' \therefore r' = r \pm k \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 30 \\ -\underline{20} \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 + 5 \\ -\underline{20} \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 35 \\ -\underline{20} \\ 15 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 30 - 5 \\ -\underline{20} \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 25 \\ -\underline{20} \\ 5 \end{array}$$

aumentou 5 unidades

diminuiu 5 unidades

2ª *Somando-se ou subtraindo-se um número natural qualquer (diferente de zero) ao subtraendo, o resto ficará diminuído ou aumentado desse número.*

$$\begin{cases} m - s = r \\ m - (s \pm k) - s = r' \Rightarrow (m - s) \mp k = r' \therefore r' = r \mp k \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 80 \\ -\underline{50} \\ 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ -\underline{50 + 10} \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 80 \\ -\underline{60} \\ 20 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 80 \\ -\underline{50 - 10} \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 80 \\ -\underline{40} \\ 40 \end{array}$$

diminuiu 10 unidades

aumentou 10 unidades

3ª *Somando-se ou subtraindo-se um número natural qualquer ao minuendo e ao subtraendo, o resto não sofre alteração.*

$$\begin{cases} m - s = r \\ (m \pm k) - (s \pm k) = r' \Rightarrow m \pm k - s \mp k = r' \therefore r' = r \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 70 \\ -\underline{30} \\ 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 + 5 \\ -\underline{30 + 5} \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 75 \\ -\underline{35} \\ 40 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 70 - 5 \\ -\underline{30 - 5} \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 65 \\ -\underline{25} \\ 40 \end{array}$$

não houve alteração

não houve alteração

4ª *A soma dos termos de uma subtração é sempre igual ao dobro do minuendo.*

$$\begin{cases} m - s = r \\ \text{ou} \\ m + r + s = t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m - s - r = 0 \ldots (I) \\ m + s + r = t \ldots (II) \end{cases}$$

Somando-se (I) com (II), teremos

$2m = t \ \ldots (III)$

Substituindo (III) em (II), virá: $\mathbf{m + s + r = 2m} \ \ldots$ c.q.d.

Exemplo 1:

$30 - 20 = 10 \Rightarrow 30 + 20 + 10 = 60$ (dobro de 30)

Exemplo 2:

$80 - 50 = 30 \Rightarrow 80 + 50 + 30 = 160$ (dobro de 80)

Exemplo 3:

$70 - 30 = 40 \Rightarrow 70 + 30 + 40 = 140$ (dobro de 70)

5ª *Somando-se ou subtraindo-se números naturais* $a, b, c, \ldots z$, *quaisquer (diferentes de zero) às parcelas* $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ *de uma adição, a soma da mesma ficará aumentada ou diminuída desses números.*

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = S$

$p_1 + a + p_2 - b + p_3 + c + \ldots - p_k \pm z = S'$

$(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k) + a - b + c - \ldots \pm z = S'$ ou $S' = S + a - b + c - \ldots \pm z$

ou simplesmente ...

$$\begin{array}{cc} & p_1 \\ + & p_2 \\ & p_3 \\ & \vdots \\ & \underline{p_k} \\ & S \end{array} \qquad \begin{array}{cl} & p_1 + a \\ + & p_2 - b \\ & p_3 + c \\ & \vdots \\ & \underline{p_k \pm z} \\ & S' \end{array} \qquad \begin{array}{cl} & p_1 + a \\ + & p_2 - b \\ & p_3 + c \\ & \vdots \\ & \underline{p_k \pm z} \\ & S + a - b + c - \cdots \pm z \end{array}$$

2.3.2 Exercícios Resolvidos

1) A soma dos termos que figuram numa subtração é igual a 60 . Determiná-los, sabendo-se que o subtraendo excede o resto de 10 unidades.

   Resolução:

   De acordo com os dados, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} m + s + r = 60 \ldots (\mathrm{I}) \\ s = r + 10 \ldots (\mathrm{II}) \end{cases}$$

   Em (I) temos que $2m = 60 \therefore m = 30$

   Substituindo m e s em (I), teremos:

$$30 + r + 10 + r = 60 \Rightarrow r = 10$$

   Substituindo m e s em (II), teremos: $s = 20$

   Resp.: Minuendo 30, subtraendo 20 e resto 10.

2) Determinar a alteração que ocorre com o resto de uma subtração, quando somarmos 15 unidades ao subtraendo e subtrairmos 10 unidades ao minuendo.

   Resolução:

$$-\begin{array}{c} m \\ \underline{s} \\ r \end{array} \qquad -\begin{array}{c} m-10 \\ \underline{s+15} \\ \end{array} \qquad -\begin{array}{l} m \\ \underline{s\qquad\qquad\quad} \\ r-10-15 \end{array} \qquad -\begin{array}{l} m \\ \underline{s\qquad\quad} \\ r-25 \end{array}$$

   Conclusão: O resto diminui de 25 unidades.

3) Numa subtração, o minuendo e o subtraendo são números ímpares consecutivos. Se a soma dos termos é igual a 26, determinar o subtraendo e o resto.

   Resolução:

   Supondo $2n + 1$ um numero ímpar, seu número consecutivo será $2n + 3$

   Se a soma dos termos é igual a 24, podemos escrever que:

$2n + 3 + 2n + 1 + 2 = 26$

$4n = 20$

$n = 5$

Resp.: O minuendo $2 \times 5 + 3 = 13$ e o subtraendo, $2 \times 5 + 1 = 11$.

4) O minuendo de uma subtração é igual ao menor número de três algarismos distintos. Calcular a soma dos termos.

   Resolução:

   De acordo com os dados, a soma dos termos m é igual a 102 . Logo, o minuendo (4ª ppdd) será igual a 2×102, ou seja, 204

5) A soma dos termos de uma subtração é igual ao maior número par de 2 algarismos diferentes. Determinar a soma dos algarismos do minuendo.

   Resolução:

   Se $2m = 98 \rightarrow m = 49$, logo a soma dos algarismos será $4 + 9$, ou seja, 13.

6) A soma dos termos de uma subtração é igual ao menor número de três algarismos. Calcular esses termos, sabendo que o subtraendo excede o resto de 10 unidades.

   Resolução:

   De acordo com os dados, podemos escrever que:

$$\begin{cases} m + s + r = 100 \ldots \text{(I)} \\ m = ?,\ s = ?,\ r = ? \\ s = r + 10 \ldots \text{(II)} \end{cases}$$

Se $m + r + s = 100$, então, $2m = 100 \therefore m = 50 \ldots \text{(III)}$

Substituindo (III) e (II) em (I), teremos:

$$50 + r + r + 10 = 100 \Rightarrow 2r = 40 \therefore r = 20$$

Substituindo $r = 20$ em (II), teremos: $s = 20 + 10 \therefore s = 30$

2.3.3 Exercícios Propostos

1) Aumentando-se de 4 unidades o minuendo de uma subtração e diminuindo-se de 3 unidades o subtraendo, o resto passou a ser 27. Se, em vez dessa alteração, tivéssemos diminuído o minuendo de 3 unidades e aumentando o subtraendo de 4 unidades, que resto teríamos obtido?

2) Uma adição compõe-se de três parcelas. Aumentando-se a primeira de 37 unidades e diminuindo-se a segunda de 8 unidades, de quantas unidades devemos diminuir a terceira a fim de que a nova soma seja 13 unidades maior que a primitiva?

3) O que acontece ao resto de uma subtração quando, ao subtraendo, adicionamos 15 unidades?

4) A soma de dois números é 48. O maior é o dobro do menor. Quais são esses números?

5) A diferença de dois números é 49. O maior excede de 5 unidades o triplo do menor. Qual é o maior?

6) Numa subtração, o minuendo é o dobro do subtraendo. Se subtrairmos 3 unidades do minuendo e 4 do subtraendo, a diferença dos resultados será 36. Qual era minuendo primitivo?

7) A soma dos três números que figuram numa subtração é igual a 948. Calcule esses números, sabendo que o subtraendo e o resto são iguais.

8) A soma dos três números que figuram numa subtração é 114, e o resto é a metade do subtraendo. Determine o subtraendo.

9) O minuendo de uma subtração é 346. O subtraendo e o resto são números pares e consecutivos. Sendo o resto o maior deles, determine o subtraendo.

10) O minuendo de uma subtração é 4.139. O resto excede o quíntuplo do subtraendo de 2.705. Calcule o subtraendo.

11) Que número devemos subtrair de 528 para obtermos um resto igual ao subtraendo?

12) A diferença de dois números é 663 e a soma desses números é dezenove vezes o menor deles. Qual é o maior dos dois números?

13) A diferença de dois números é 52, e o maior é o quíntuplo do menor mais 8. Determine-os.

14) Acrescentando-se 199 à soma de dois números, obtém-se 1.000. Calcule os números, sabendo-se que, se subtrairmos 323 da diferença dos mesmos, ele ficará sendo 100.

15) A soma de dois números é cinco vezes o menor e a diferença deles é igual a 42. Calcule o maior deles.

16) O número 203 foi dividido em três partes, tal que, a segunda é o dobro da primeira e metade da terceira. Calcule a segunda parte.

17) A soma de dois números é 260. A metade da diferença desses dois números é igual ao menor deles. Determine o maior.

18) Numa subtração, a soma dos três termos é 876. Calcule o subtraendo, sabendo-se que o resto vale a terça parte do minuendo.

19) A soma de três parcelas é igual a 615. Sabendo-se que a primeira é o dobro da segunda e igual a terceira, calcule-as.

20) Uma adição possui três parcelas. Se aumentarmos a primeira de 45 unidades e diminuirmos a segunda de 36, que alteração devemos fazer na terceira, para que a soma permaneça a mesma?

21) A diferença entre dois números é 379. Aumentando-se de 99 unidades o minuendo, que alteração deve ser feita no subtraendo, para que o resto fique sendo 448?

22) A soma dos três termos de uma subtração é 888 e o resto excede o subtraendo de 198. Determine o subtraendo.

23) Se nenhuma das parcelas de uma adição tem mais de n algarismos, e na soma há $n + 2$ algarismos, quantas são, no mínimo, as parcelas?

Respostas:

1) 13
2) 16
3) Diminui de 15 unidades
4) 32 **e** 16
5) 71
6) 70
7) $m = 474$; $s = r = 237$
8) $m = 57$; $s = 38$ **e** $r = 19$
9) 172
10) 239
11) 264
12) 702
13) 63 **e** 11
14) 612 **e** 189
15) 56
16) 29
17) 195
18) 292
19) 246; 123 **e** 246
20) Diminui de 9 unidades
21) Aumenta de 30 unidades
22) 123
23) 11

2.4 Multiplicação

É a operação que tem por fim, a partir de dois números, repetir um deles como parcela tantas vezes quantas forem as unidades do outro.

Os números a serem multiplicados recebem o nome de *fatores*. Esses *fatores* podem ser interligados através do sinal $(\times)$[4], leia-se: *vezes*.

De acordo com a definição e, supondo a e b dois números naturais, podemos ter:

$$\left.\begin{array}{c} a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{“b” parcelas}} = p \\ \text{ou} \\ a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{\text{“a” parcelas}} = p \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underbrace{a \times b}_{\text{fatores}} = p$$

O primeiro fator *(a)* denomina-se *multiplicando* e o segundo, *multiplicador*.

O resultado p denomina-se *produto*.

Observação: Em Aritmética, não é aconselhável a colocação de um ponto $(\cdot)$[5] entre números, pois, $2 \cdot 5$, pode ser confundido com $2,5$. Entretanto, entre números e letras ele pode ser utilizado ou não, ou seja, $2 \cdot a$ ou $2\,a$.

[4] Guilherm William Oughtred (Séc XVII) e Thomas Harriot – 1.631
[5] Harriot e Gottfried Wilhelm Leibniz (1.646 – 1.716)

2.4.1 Propriedades

1ª *Comutativa*

A ordem dos fatores não altera o produto.

Se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então, $a \times b = b \times a$

2ª *Associativa*

O produto não se altera se dois ou mais fatores forem substituídos pelo seu produto.

Se a e $b \in \mathbb{N}$, então, $[(a \times b) \times c] = [a \times (b \times c)]$

3ª *Fechamento*

O produto de dois números naturais é um número natural.

Se a e $b \in \mathbb{N}$, então, $(a \times b) \in \mathbb{N}$

4ª *Elemento Neutro*

O elemento neutro da multiplicação é o 1.

Se $a \in \mathbb{N}$, então, $a \times 1 = 1 \times a = a$

5ª *Distributiva*

Se a e $b \in \mathbb{N}$, então, podemos ter:

a) distributividade em relação à adição

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

b) distributividade em relação à subtração

$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

6ª *O produto de um número natural* $N = abc \ldots xz$ *por* $10, 100, 1.000, \ldots$ *é igual a esse número acrescido de* $1, 2, 3, \ldots$ *zero(s) à sua direita.*

Exemplos:

$23 \times 10 = 230$

$45 \times 100 = 4.500$

$1.435 \times 1.000 = 1.435.000$

$N \times 1\underbrace{000\ldots0}_{\text{“k” 0's}} = N\underbrace{000\ldots0}_{\text{“k” 0's}}$

2.4.2 Numerais Multiplicativos

Quantidade	*Numeral*
duas	dobro
três	triplo
quatro	quádruplo
cinco	quíntuplo
seis	sêxtuplo
sete	séptuplo
oito	óctuplo
nove	nônuplo
dez	décuplo
onze	undécuplo
doze	duodécuplo
cem	cêntuplo

2.4.3 Tábua de Pythagoras

É uma tabuada de multiplicação[6], onde se obtém facilmente - a partir da adição - o produto de dois números. Vejamos a sua construção.

1º Escrevem-se na 1ª linha, a partir da 2ª coluna, os algarismos significativos, ou seja:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2º Repetem-se na 2ª linha, a partir da 2ª coluna, os elementos da 1ª linha, isto é:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3º Escrevem-se na 3ª linha, a partir da 2ª coluna, a soma dos elementos da 1ª com os da 2ª , isto é:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18

[6] Pythagoras 585 A.C-500 A.C

4º Escrevem-se na 4ª linha, a partir da 2ª coluna, a soma dos elementos da 1ª com os da 3ª ; na 5ª linha, os elementos da 1ª com os da 4ª , e assim sucessivamente, ou seja:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	56
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Exemplo: Suponha que se queira obter o produto de 7 por 5 .

Resolução:

Procura-se o fator 7 na 1ª coluna, e o fator 5 , na 1ª linha, ou vice-versa. O elemento da intersecção das linhas, horizontal e vertical, será o produto desejado.

×	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	56
7	7	14	21	28	**35**	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

2.4.4 Exercícios Resolvidos

1) Determinar a alteração sofre o produto de três fatores, quando multiplicamos o primeiro por 2, o segundo por 3 e o terceiro por 4.

Resolução:

$A \times B \times C = P$

$(A \times 2) \times (B \times 3) \times (C \times 4) = \underbrace{A \times B \times C}_{P} \times \underbrace{2 \times 3 \times 4}_{24} = P \times 24$

Conclusão: O produto ficará multiplicado por 24.

2) O produto de dois números é 216. Acrescentando-se 6 unidades ao multiplicando, obtém-se um novo produto igual a 324. Calcular o multiplicador.

Resolução:

De acordo com os dados, pode-se escrever:

$$\begin{cases} A \times B = 216 & \ldots \text{(I)} \\ (A+6) \times B = 324 \Rightarrow A \times B + 6 \times B = 324 & \ldots \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo *(I)* em *(II)*, teremos:

$216 + 6 \times B = 324$

$B = \dfrac{324 - 216}{6} \therefore B = 18$

3) Numa multiplicação de dois fatores, uma pessoa trocou a ordem dos algarismos do multiplicador que era 43, pondo em seu lugar o 34. Sabendo-se que o produto, após a inversão, ficou 99 unidades inferiores ao produto primitivo, determinar o multiplicando.

Resolução:

$$\begin{cases} a \times 43 = p & \text{(I)} \\ a \times 34 = p - 99 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo *(I)* em *(II)*, teremos:

$a \times 34 = a \times 43 - 99$

$43 \times a - 34 \times a = 99$

$9 \times a = 99$

$a = 11$

2.4.5 Proposições

1ª *A soma de dois números pares gera sempre um número par.*

$(2n) + (2p) = 2 \times (n + p) =$ número par (n e $p \in \mathbb{N}$)

2ª *A soma de dois números ímpares gera sempre um número par.*

$(2n+1)+(2p+1) = 2n+2p+1+1 = 2n+2p+2 = 2\times(n+p+1) =$ número par

3ª *A soma de um número par com outro ímpar gera sempre um número ímpar.*

$(2n) + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2 \times (n + p) + 1 =$ número ímpar.

4ª *O produto de dois números pares é um número par.*

$(2n) \times (2p) = 2 \times [n \times (2p)] =$ número par

5ª *O produto de um número par por outro ímpar é um número par.*

$(2n) \times (2p + 1) = 2 \times [n \times (2p + 1)] =$ número par

6ª *O produto de dois números ímpares é um número ímpar.*

$(2n + 1) \times (2p + 1) =$ número ímpar

7ª *O produto de dois ou mais números ímpares é um número ímpar.*

Ao multiplicarmos dois deles, encontraremos um número ímpar (8ª ppdd) que, multiplicado por outro, também gerará um outro ímpar, e assim por diante.

8ª *O produto de dois ou mais números pares é um número par.*

2.4.6 Exercícios Propostos

1) Por quanto devemos multiplicar 18, para que o produto seja o quíntuplo de 198?

2) Em uma multiplicação com dois fatores, por descuido, uma pessoa trocou o multiplicador, que era 715, escrevendo em seu lugar, 751. Sabendo-se que o produto ficou, assim, aumentado em 39.636 unidades, qual foi o multiplicando?

3) Em vez de multiplicar um número por 82, uma pessoa, por engano, multiplicou por 28 e obteve, assim, um produto inferior de 11.016 unidades ao verdadeiro produto. Calcule o número que foi multiplicado por 28.

4) Uma pessoa, ao multiplicar um número por 40, multiplicou-o por 4 e esqueceu de colocar o zero a direita do produto. Encontrou então, um produto inferior em 8.928 unidades ao que deveria ter obtido. Determine esse número.

5) Uma aluna, ao multiplicar um número por 80, multiplicou-o por 8 e esqueceu de colocar o zero à direita do produto, ficando, assim, inferior em 4.824 unidades ao que deveria ter obtido. Calcule-o.

6) Somando-se três unidades ao multiplicador, o produto aumenta de 135 unidades. Determine o multiplicando.

7) Dois números são tais que, um deles é o dobro do outro. Somando-se 4 unidades a cada um deles, o produto dos números dados ficará aumentado de 124. Quais são esses números?

8) Determine a soma gerada por: $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$.

9) Quantos fatores existem nas multiplicações?

a) $6 \times 12 \times 18 \times \cdots \times 288 \times 294 \times 300$.

b) $3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 144 \times 147 \times 150$.

10) Observe e calcule as operações alternadas, de 1.997 até 1, ou seja:

$$1.997 - 1.996 + 1.995 - 1.994 + \cdots + 3 - 2 + 1.$$

11) A soma dos primeiros 1.998 números pares é igual a p, enquanto que a soma dos 1.998 primeiros números ímpares é igual a q. Determine $q - p$.

12) Pesquisando o preço de custo de frutas, observo que 2 maçãs valem por 3 pêras e que meia dúzia de pêras vale 8 laranjas. Quantas maçãs devo trocar por meia dúzia de laranjas?

13) Comprei várias dúzias de lápis. Deram-me uma a mais em cada duas dúzias. Recebi, então, 350 lápis. Quantas dúzias comprei?

14) A diferença entre dois números é 15. Multiplicando o maior deles por 11, a diferença passa a ser 535. Determine esses dois números.

15) Seja a multiplicação 56×24. Aumentando-se o multiplicador de uma unidade, em quanto devemos aumentar o multiplicando, para que o novo produto exceda o primitivo de 456 unidades?

16) Numa multiplicação de dois fatores, um deles termina em 317. Calcule os três últimos algarismos do outro fator, para que o produto efetuado termine por 372.

17) Imagine que 285 candidatos classificados em um concurso resolvam cumprimentarem-se em um salão uma única vez. Qual o número de cumprimentos a serem trocados?

Respostas:

1) 55
2) 1.101
3) 204
4) 248
5) 67
6) 45
7) 9 **e** 18
8) 5.050
9) **a)** 50 **b)** 50
10) 999
11) 1.998
12) 3 **maçãs**
13) 28
14) 52 **e** 37
15) 16
16) 916
17) 4.047

2.5 Divisão

É a operação que tem por fim, a partir de dois números (D e d ; $\mathsf{D} \geq \mathsf{d}$), obter um terceiro ($\mathsf{q}$) que, multiplicado pelo segundo (d), reproduza o maior número (N) menor ou igual ao primeiro (D).

2.5.1 Modos diferentes para indicarmos uma divisão de dois números D e d

Entre os *diferentes métodos*[7] de indicarmos a operação de divisão, destacam-se os seguintes:

$$\frac{\mathsf{D}^{(1)}}{\mathsf{d}};\quad \mathsf{D}/\mathsf{d}^{(2)};\quad \mathsf{D}:\mathsf{d}^{(3)};\quad \mathsf{D}\div\mathsf{d}^{(4)};\quad \mathsf{D}\,\underline{\lfloor\, \mathsf{d}\ }\,;\quad \mathsf{D}\,\underline{\big|\, \mathsf{d}\ }$$

[7](1) Nicole d'Oresme (1.325 − 1.385); (2) Augustus De Morgan (1.806 − 1.871); (3) Johnsons, generalizada por Leibniz; (4) John Heinrich Rahn (1.622 − 1.676).

2.5.2 Prova Real da Divisão

De acordo com a definição, temos inicialmente que:

$D \underline{|\, d}_{\,q}$; $q \times d = N$; $N \leq D$

$\begin{array}{lll} D & \underline{|\, d} & ; \quad D - N = r \\ N & q & \end{array}$

Ou simplesmente ...

dividendo	D	$\underline{|\, d}$	*divisor*
resto	r	q	*quociente*

Uma divisão estará correta se, e só se, o dividendo for igual ao divisor vezes o quociente mais o resto.

$$\mathbf{D = d \times q + r \ \ldots \ 0 \leq r < d}$$

2.5.3 Divisão Exata e Divisão Inexata

Dizemos que uma divisão é exata, em $\mathbb{N}$*, quando o resto for igual a zero; em caso contrário, ou seja, quando o resto for diferente de zero, di-la-emos inexata.*

$$\mathbf{D = d \times q}$$

2.5.4 Teoremas

1º *Numa divisão exata, multiplicando-se o dividendo por um número* k $(k \neq 0)$*, o quociente ficará multiplicado por esse número.*

$$\begin{cases} \text{Hip:} \quad \dfrac{A}{B} = q \ldots (\text{I}) \ \text{ e } \ \dfrac{A \times k}{B} = q' \ldots (\text{II}) \\ \\ \text{Tese:} \quad q' = k \times q \end{cases}$$

De (I) $\quad A = B \times q \ldots (\text{III})$

De (II) $\ldots A \times k = B \times q' \ldots (\text{IV})$

Dividindo (III) por (IV), teremos:

$\frac{1}{k} = \frac{q}{q'} \Rightarrow q' = k \times q$ ... c.q.d.

2º *Numa divisão exata, dividindo-se o dividendo por um número* k $(k \neq 0)$, *o quociente ficará dividido por esse número.*

A demonstração deste teorema é análoga ao do anterior.

3º *Numa divisão exata, multiplicando-se o divisor por um número* k $(k \neq 0)$, *o quociente ficará dividido por esse número.*

$$\begin{cases} \text{Hip:} \quad \frac{A}{B} = q \ldots (\text{I}) \quad \text{e} \quad \frac{A}{B \times k} = q' \ldots (\text{II}) \\ \\ \text{Tese:} \quad q' = \frac{q}{k} \end{cases}$$

De (I) $\ldots A = B \times q \ldots$ (III)

De (II) $\ldots A = B \times k \times q' \ldots$ (IV)

Dividindo (III) por (IV), teremos:

$1 = \frac{q}{k \times q'} \therefore q' = \frac{q}{k}$ ... c.q.d.

4º *Numa divisão exata, dividindo-se o divisor por um número* k $(k \neq 0)$, *o quociente ficará multiplicado por esse número.*

A demonstração deste teorema é idêntica ao do anterior.

5º Numa divisão exata, o quociente não se altera, quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número k $(k \neq 0)$.

$$\begin{cases} \text{Hip:} \quad \frac{A}{B} = q \ldots (\text{I}) \quad \text{e} \quad \frac{A \times k}{B \times k} = q' \ldots (\text{II}) \\ \\ \text{Tese:} \quad q' = q \end{cases}$$

Em (I) $\ldots A = B \times q$...(III)

Em (II) $\ldots A \times k = B \times k \times q' \ldots$ (IV)

Dividindo-se (III) por (IV), teremos:

$1 = \frac{q}{q'} \therefore q' = q \ldots$ c.q.d.

6º *Numa divisão exata, o quociente não se altera, quando dividimos o dividendo e o divisor por um mesmo número* k $(k \neq 0)$.

A demonstração do mesmo segue o raciocínio anterior.

7º *O maior resto* R *em uma divisão inexata é igual ao divisor menos* 1.

Sabemos que, se $0 \leq r < d$, os valores que r podem assumir são, em ordem crescente, $0, 1, 2, 3, \ldots d-1$. Vê-se pois, que:

$R = d - 1 \ldots$ c.q.d.

8º *Multiplicando-se o dividendo e o divisor por um mesmo número* k $(k \neq 0)$, *o quociente não se alterará, mas o resto ficará multiplicado por esse número.*

$$\begin{cases} \text{Hipótese:} \quad \begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \ldots(\text{I}) \quad \text{e} \quad \begin{array}{l|l} D \times k & d \times k \\ \hline r' & q' \end{array} \ldots(\text{II}) \\ \text{Tese:} \quad q' = q \text{ e } r' = k \times r \end{cases}$$

De (I) $\ldots D = d \times q + r \ldots$ (III)

De (II) $\ldots D \times k = d \times k \times q' + k \times r$...(IV)

Multiplicando-se os dois membros em (III) por k, teremos:

$D \times k = d \times k \times q + k \times r \ldots$ (V)

Comparando (IV) com (V), teremos $q' = q$ e $r' = k \times r \ldots$ c.q.d.

9º *Dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número* k $(k \neq 0)$, *o quociente não se alterará, mas o resto ficará dividido por esse número.*

$$\begin{cases} \text{Hipótese:} \quad \begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \ldots(\text{I}) \quad \text{e} \quad \begin{array}{l|l} \frac{D}{k} & \frac{d}{k} \\ \hline r' & q' \end{array} \ldots(\text{II}) \\ \text{Tese:} \quad q' = \frac{q}{r} \end{cases}$$

De (I) $\ldots D = d \times q + r \ldots$ (III)

De (II) $\ldots \dfrac{D}{k} = \dfrac{d}{k} \times q' + r' \ldots$ (IV)

Multiplicando-se os dois membros em (III) por $\dfrac{1}{k}$, teremos:

$D \times \frac{1}{k} = d \times \frac{1}{k} \times q + \frac{1}{k} \times r \ldots (V)$

Comparando (IV) com (V), teremos $q' = q$ e $r' = \frac{r}{k} \ldots$ c.q.d.

$10^{\underline{o}}$ *Numa divisão inexata, o maior número* N *que devemos subtrair do dividendo sem alterar o quociente é igual ao próprio resto.*

$$\begin{array}{ll} D & \underline{|d} \\ r & q \end{array} \ldots (I) \qquad \begin{array}{ll} D - N & \underline{|d} \\ r' & q \end{array} \ldots (II)$$

De $(I) \ldots D = d \times q + r \ldots (III)$

De $(II) \ldots D - N = d \times q + r' \ldots (IV)$

Substituindo (III) em (IV), teremos:

$d \times q + r - N = d \times q + r'$ ou $r' = r - N$

Como em $(II), \ldots 0 \leq r' < d \Rightarrow 0 \leq r - N < d$

Ou ainda, $r - d < N \leq r$

Dessa dupla desigualdade,vê-se que: $N \leq r$

Conclusão: $N = r \ldots$ c.q.d.

$11^{\underline{o}}$ *Numa divisão inexata, o menor número* n *que devemos somar ao dividendo* D*, a fim de aumentar o quociente em 1 unidade é igual ao divisor* d *menos o resto* r*.*

$$\begin{cases} \text{Hipótese:} \quad \begin{array}{ll} D & \underline{|d} \\ r & q \end{array} \ldots (I) \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} D + n & \underline{|d} \\ r' & q+1 \end{array} \ldots (II) \\ \text{Tese:} \quad n = d - r \end{cases}$$

Em $(I) \ldots D = d \times q + r \ldots (III)$

Em $(II) \ldots D + n = d \times q + d + r' \ldots (IV)$

Substituindo (III) em (IV) $\Rightarrow d \times q + r + n = d \times q + d + r' \therefore$

$r' = r + n - d \ldots (V)$

Como, em (II), $0 \leq r' < d \Rightarrow 0 \leq r + n - d < d$ ou ainda,

$d - r \leq n < 2d - r \ldots (VI)$

Dessa dupla desigualdade, pode-se afirmar que: $n \geq d - r \ldots$ (VII) e $n < 2d - r$.

Como queremos determinar o menor valor de n, vemos em (VII) que:
se $n \geq d - r$, então ...

$n = d - r \ldots$ c.q.d.

Observação: Substituindo $n = d - r$ em (III), teremos:

$r' = r + d - r - d \therefore r' = 0$.

Conclusão: Quando o quociente aumentou de 1 unidade, o resto tornou-se igual a zero.

2.5.5 Quantidade de Algarismos do Quociente numa Divisão Exata

Teorema:

A quantidade de algarismos do quociente de uma divisão é igual ao menor número de zeros necessários a acrescentar ao divisor, até torná-lo maior que o dividendo.

Exemplo 1: Seja dividir $ab\ cde$ por xy

$$\begin{array}{l|l} abcde & \underline{xy} \\ & q \end{array}$$

$ab000 \leq abcde < ab0000$

Como $ab\ cde = xy \times q$, podemos escrever que:

$xy \times 1000 \leq xy \times q < xy \times 10.000$ ou

$1.000 \leq q < 10.000 \Rightarrow q$ um quociente com 4 algarismos.

Exemplo 2: Seja dividir 24.900 por 83.

$$\begin{array}{l|l} 24.900 & \underline{83} \\ & q \end{array}$$

$8.300 \leq 24.900 < 83.000$, como $24.900 = 83 \times q$

$83 \times 100 \leq 83 \times q < 83 \times 1.000$
$100 \leq q < 1.000 \Rightarrow q$ um quociente com 3 algarismos.

Vê-se, nos exemplos anteriores, que 4 e 3 são, respectivamente, a menor quantidade de zeros necessários a acrescentarmos ao divisor, quando objetivamos torná-lo "maior"que o dividendo, o que confirma o teorema.

2.5.6 Exercícios Resolvidos

1) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, demonstrar que ao subtrairmos o mesmo número n ($n \in \mathbb{N}^*$) ao dividendo e ao divisor, o quociente gerado q', será maior ou igual ao quociente q.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \quad \ldots (I)$$

$$\begin{array}{l|l} D-n & d-n \\ \cline{2-2} r' & q' \end{array} \quad \ldots (II)$$

Temos a demonstrar que $q' \geq q$

De (I) $\ldots D = d \times q + r \ldots$ (III), $\quad 0 \leq r < d$

De (II) $\ldots D - n = (d - n) \times q' + r' \ldots$ (IV), $\quad 0 \leq r' < d - n$

ou $D = (d - n) \times q - n \times q + r \ldots (V)$

$D - n = (d - n) \times q' + r' \ldots (VI)$

$(VI) - (V) \Rightarrow -n = (d - n) \times (q' - q) + r' - n \times q - r$ ou

$(d - n) \times (q' - q) = n \times (q - 1) + r - r' \ldots (VII)$

Os limites, mínimo e máximo, que os restos r e r' podem assumir em (I) e (II) são, respectivamente, 0 e $d - n - 1$.

Substituindo-os na igualdade anterior, teremos:

$(d - n) \times (q' - q) = n \times (q - 1) - (d - n) + 1$

ou

$(d-n)\times(q'-q+1)=n\times(q-1)+1$

Para que essa igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$q'-q+1\geq 0$ ou $q'\geq q\ldots$ c.q.d.

2) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, demonstrar que ao somarmos o mesmo número n ($n\in\mathbb{N}^*$) ao dividendo e ao divisor, o quociente gerado q' será menor ou igual ao quociente q.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots(\text{I})$$

$$\begin{array}{l|l} D+n & d+n \\ \hline r' & q' \end{array} \quad \ldots(\text{II})$$

Temos a demonstrar que $q'\leq q$.

De (I) $\ldots D=d\times q+r\ldots$(III), $0\leq r<d$

De (II) $\ldots D+n=(d+n)\times q'+r'\ldots$(IV), $0\leq r'<d-n$

ou $D=(d+n)\times q-n\times q+r\ldots$(V)

$D+n=(d+n)\times q'+r'\ldots$(VI)

(VI) $-$ (V) $\Rightarrow n=(d+n)\times(q'-q)+r'+n\times q-r$ ou

$(d+n)\times(q'-q)=n\times(1-q)+r-r'\ldots$(VII)

Os limites, mínimo e máximo, que os restos r e r' podem assumir em (I) e (II) são, respectivamente, 0 e $d+n-1$.

Substituindo-os na igualdade anterior, teremos:

$(d+n)\times(q'-q)=n\times(1-q)-(d+n)+1$

ou

$(d+n)\times(q'-q+1)=n\times(1-q)+1$

Para que essa igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$q'-q+1\leq 0$ ou $q'\leq q\ldots$ c.q.d.

3) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, determinar os possíveis valores naturais n a serem somados ao dividendo, de modo que o quociente aumente de k unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots \quad D=d\times q+r \qquad 0\leq r<d\ldots(\mathrm{I})$$

$$\begin{array}{l|l} D+n & d \\ \hline r' & q+k \end{array} \quad \ldots \quad D+n=d\times q+k\times d+r', 0\leq r'<d\ldots(\mathrm{II})$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$(d\times q)+r+n=(d\times q)+k\times d+r'\Rightarrow r'=r+n-k\times d$

Como $0\leq r'<d$, então $0\leq r+n-k\times d<d$

Dessa dupla desigualdade podemos escrever que:

$r+n-k\times d\geq 0\ldots(\mathrm{III})$ e $r+n-k\times d<d\ldots(\mathrm{IV})$

Em $(\mathrm{III})\ldots n\geq k\times d-r$ e em $(\mathrm{IV}), n<(k+1)\times d-r\ldots(\mathrm{V})$

De (IV) e (V) pode-se escrever que: $k\times d-r\; n<(k+1)\times d-r\ldots(\mathrm{VI})$

4) Observando a solução anterior, calcular:

a) o menor número n que devemos somar ao dividendo, de modo que o quociente aumente de k unidades.

Em (V) concluiremos facilmente que: $n=k\times d-r$

b) os possíveis valores que devemos atribuir a n, de modo que o quociente aumente de 1 unidade.

Fazendo $k=1$ em (VI), teremos: $d-r\leq n<2\times d-r$

c) o menor valor n e o maior valor de N que podemos somar ao dividendo, de modo que o quociente aumente de 1 unidade.

Fazendo $k = 1$ em (VI), teremos: $d - r \leq n < 2 \times d - r$

Analisando essa dupla desigualdade, teremos:

1º) $n = d - r$

2º) $N = 2 \times d - r - 1$

d) os possíveis valores a serem atribuídos a n, de modo que o quociente não se altere.

Fazendo $k = 0$ em (VI), teremos: $-r \leq n < d - r$

Como $0 \leq r < d$, então concluiremos que: $n < d - r$

5) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, determinar os possíveis valores naturais n a serem subtraídos do dividendo, de modo que o quociente diminua de k unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots D = d \times q + r,\ 0 \leq r < d \ldots \text{(I)}$$

$$\begin{array}{l|l} D - n & d \\ \hline r' & q - k \end{array} \quad \ldots D - n = d \times q - k \times d + r',\ 0 \leq r' < d \ldots \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$(d \times q) + r - n = (d \times q) - k \times d + r' \Rightarrow r' = r - n + k \times d$$

Como $0 \leq r' < d$, então $0 \leq r - n + k \times d < d$

Dessa dupla desigualdade podemos escrever que:

$r - n + k \times d \geq 0 \ldots \text{(III)}$ e $r - n + k \times d < d \ldots \text{(IV)}$

Em $\text{(III)} \ldots n \leq k \times d + r$ e, em $\text{(IV)}, n > (k - 1) \times d + r \ldots \text{(V)}$

De (IV) e (V) pode-se escrever que:

$(k - 1) \times d + r < n\ k \times d + r \ldots \text{(VI)}$

6) Observando a solução anterior, determinar:

a) o menor número n que devemos subtrair do dividendo, de modo que o quociente diminua de k unidades.

   Em (VI) concluiremos facilmente que: $n = r + (k-1) \times d + 1$

b) o maior número N que devemos subtrair do dividendo, de modo que o quociente diminua de k unidades.

   Em (VI) vemos que: $N = k \times d + r$

c) os possíveis valores n que podemos subtrair do dividendo, de modo que o quociente não se altere.

   Fazendo $k = 0$ em (VI), teremos: $r - d < n \leq r$.

   Como $r < d$ e $n \in \mathbb{N} \to 0 \leq n \leq r$

   Observação: A partir dessa última desigualdade, vê-se que o maior valor que devemos subtrair de N, sem alterar o quociente, é igual ao próprio resto.

d) o menor valor n e o maior valor N que podemos subtrair ao dividendo, de modo que o quociente diminua de 1 unidade.

   Fazendo $k = 1$ em (VI), teremos: $r < n \leq d + r$

   Analisando essa dupla desigualdade, teremos:

   1º) $n = r + 1$

   2º) $N = d + r$

7) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, determinar os possíveis valores naturais n a serem somados ao divisor, de modo que o quociente diminua de k unidades.

   Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots D = d \times q + r, 0 \leq r < d \ldots (I)$$

e

$$\begin{array}{l|l} D + n & d + n \\ \hline r' & q - k \end{array}$$

onde

$$D = (q-k) \times d + n \times (q-k) + r', 0 \leq r' < d + n \ldots (II)$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$(d \times q) + r = (d \times q) - k \times d + n \times (q-k) + r' \Rightarrow r' = r + k \times d - n \times (q-k)$$

Como $0 \leq r' < d + n$, então $0 \leq r + k \times d - n \times (q - k) < d + n$

Dessa dupla desigualdade podemos escrever que:

1º) $r + k \times d + n \times (k - q) \geq 0 \Rightarrow n \geq \dfrac{-r - k \times d}{k - q}$ e $n \leq \dfrac{r + k \times d}{q - k}$

2º) $r + k \times d + n \times (k - q) < d + n$

$n \times (k - q - 1) < d - r - k \times d$

$n > \dfrac{k \times d - d + r}{q - k + 1}$ ou ainda, $n > \dfrac{(k - 1) \times d + r}{q - k}$

Portanto ... $\dfrac{(k-1) \times d + r}{q - k + 1} < n \leq \dfrac{r + k \times d}{q - k}$

8) Observando a solução anterior, determinar:

   a) os que valores que devem ser atribuídos a n, de modo que o quociente não se altere.
   Fazendo $k = 0$, na desigualdade anterior, teremos: $\dfrac{-d + r}{q + 1} < n \leq \dfrac{r}{q}$
   Como $n \in \mathbb{N}$, concluiremos que n poderá assumir vários valores e o maior deles será igual a $\dfrac{r}{q}$.

   b) que valores podemos subtrair do divisor, de modo que o quociente diminua de 1 unidade.
   Fazendo $k = 1$ em $\dfrac{(k - 1) \times d + r}{q - k - 1} < n \leq \dfrac{r + k \times d}{q - k}$, teremos:
   $\dfrac{r}{q - 2} < n \leq \dfrac{r + d}{q - 1}$

9) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, calcular os possíveis valores n a serem subtraídos ao divisor, de modo que o quociente aumente de k unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots D = d \times q + r, 0 \leq r < d \ldots (I)$$

$$\begin{array}{l|l} D + n & d - n \\ \hline r' & q + k \end{array} \quad \ldots D = (d - n) \times (q + k) + r', 0 \leq r' < d - n \ldots (II)$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$(d \times q) + r = (d \times q) + k \times d - n \times (q + k) + r' \Rightarrow r' = r - k \times d + n \times (q + k)$

Como $0 \leq r' < d - n$, então, $0 \leq r - k \times d + n \times (q + k) < d - n$...(III)

Dessa dupla desigualdade, podemos escrever:

1º) $r - k \times d + n \times (q + k) \geq 0 \Rightarrow n \geq \dfrac{k \times d - r}{q + k}$

2º) $r - k \times d + n \times (q + k) < d - n \Rightarrow n < \dfrac{(k + 1) \times d - r}{q + k + 1}$

Conclusão: $\dfrac{k \times d - r}{q + k} \leq n < \dfrac{(k + 1) \times d - r}{q + k + 1}$

10) Analisando a solução anterior, calcular:

a) o(s) valor(es) de n a serem diminuídos do divisor, sem que o quociente se altere.
Fazendo $k = 0$ em $\dfrac{k \times d - r}{q + k} \leq n < \dfrac{(k + 1) \times d - r}{q + k + 1}$, teremos:
$\dfrac{-r}{q + 1} \leq n < \dfrac{d - r}{q + 2}$
Como $n \in \mathbb{N}$, então, $0 \leq n < \dfrac{d - r}{q + 2}$

b) os valores que podem assumir o número n, de modo que o quociente aumente de 1 unidade.
Fazendo $k = 1$ em $\dfrac{k \times d - r}{q + k} \leq n < \dfrac{(k + 1) \times d - r}{q + k + 1}$, teremos:
$\dfrac{d - r}{q + 1} \leq n < \dfrac{2 \times d - r}{q + 2}$

11) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, determinar os possíveis valores naturais n a serem somados ao dividendo e ao divisor, de modo que o quociente diminua de k unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots D = d \times q + r, 0 \leq r < d \ldots \text{(I)}$$

$$\begin{array}{r|l} D + n & d + n \\ \hline r' & q - k \end{array} \quad \ldots D = (d + n) \times (q - k) + r' \ldots \text{(II)}$$

com $0 \leq r' < d + n \ldots$(III)

Substituindo (I) em (II), teremos:

$(d \times q) + r + n = d \times q - d \times k + n \times (q - k) + r'$

$r' = r + k \times d + n - n \times (q - k)$

ou ainda . . .

$r' = r + k \times d + n \times (1 - q + k) \ldots (IV)$

Substituindo (IV) em (III), teremos:

$0 \leq r + k \times d + n \times (1 - q + k) < d + n$

Dessa dupla desigualdade, podemos escrever:

1º) $r + k \times d + n \times (1 - q + k) \geq 0$

$n \times (1 - q + k) \geq -r - k \times d$

$n \geq \dfrac{-r - k \times d}{1 - q + k}$ ou $n \leq \dfrac{r + k \times d}{q - k - 1}$

2º) $r + k \times d + n \times (1 - q + k) < d + n$, ou ainda

$n \times (1 - q + k) - n < d - r - k \times d$

portanto . . .

$n \times (1 - q + k - 1) < d - r - k \times d$

$n < \dfrac{d - r - k \times d}{-q + k}$ ou $n > \dfrac{r + (k - 1) \times d}{q - k}$

$\dfrac{r + (k - 1) \times d}{q - k} < n \leq \dfrac{k \times d + r}{q - k - 1}$

12) Analisando a dupla desigualdade anterior, determinar:

a) os valores que podem ser atribuídos a n, de modo que o quociente não se altere.
Fazendo $k = 0$ na expressão anterior, teremos: $\dfrac{r - d}{q} < n \leq \dfrac{r}{q - 1}$

b) os valores atribuídos a n, a fim de que o quociente diminua de 1 unidade.
Fazendo $k = 1$ em $\dfrac{r - d + k \times d}{q - k} < n \leq \dfrac{r + k \times d}{q - k - 1}$, teremos:
$\dfrac{r}{q - 1} < n \leq \dfrac{r + d}{q - 2}$

c) o maior valor N, de modo que o quociente diminua de 1 unidade?

Na inequação anterior, vê-se facilmente que: $N = \dfrac{r+d}{q-2}$

13) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, determinar os possíveis valores naturais n a serem subtraídos do dividendo e do divisor, de modo que o quociente aumente de k unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}, \quad D = d \times q + r, \quad 0 \leq r < d \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{l|l} D-n & d-n \\ \hline r' & q+k \end{array}, \quad D-n = (d-n) \times (q+k) + r' \ldots \text{(II)}$$

com $0 \leq r' < d - n \ldots$ (III)

Substituindo (I) em (II), teremos:

$(d \times q) + r - n = d \times q + d \times k - n \times (q+k) + r' \Rightarrow$

$r' = r - k \times d - n + n \times (q+k)$

ou ainda ...

$r' = r - k \times d + n \times (q+k-1) \ldots$ (IV)

Substituindo (IV) em (III), teremos:

$0 \leq r - k \times d + n \times (q+k-1) < d - n$

Dessa dupla desigualdade, teremos:

1º) $r - k \times d + n \times (q+k-1) \geq 0$

$n \geq \dfrac{k \times d - r}{q+k-1}$

2º) $r - k \times d + n \times (q+k-1) < d - n$

$r - k \times d + n \times (q+k) < d \quad$ ou $\quad n < \dfrac{(k+1) \times d - r}{q+k}$

14) Analisando a dupla desigualdade anterior, determinar:

a) qual ou quais deve(m) ser o(s) valor(es) n, de modo que o quociente não se altere.

Fazendo $k = 0$ na dupla desigualdade anterior, teremos:
$\frac{-r}{q-1} \leq n < \frac{d-r}{1}$

b) qual ou quais deve(m) ser o(s) valor(es) n, de modo que o quociente aumente de 1 unidade.

Fazendo $k = 1$, teremos:
$\frac{d-r}{q} \leq n < \frac{2 \times d - r}{q+1}$

15) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, demonstrar que, ao subtrairmos o mesmo número n ($n \in \mathbb{N}*$) ao dividendo e ao divisor, o quociente gerado q' será maior ou igual ao quociente primitivo q.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots(I)$$

$$\begin{array}{l|l} D-n & d-n \\ \hline r' & q' \end{array} \quad \ldots(II)$$

Temos a demonstrar que $q' \leq q$.

De (I) $\ldots D = d \times q + r \ldots$ (III) $\quad 0 \leq r < d$

De (II) $\ldots D - n = (d-n) \times q' + r' \ldots$ (IV) $\quad 0 \leq r' < d - n$

ou $D = (d-n) \times q - n \times q + r \ldots (V)$

$D - n = (d-n) \ldots q' + r' \ldots (VI)$

$(VI) - (V) \Rightarrow -n = (d-n) \times (q'-q) + r' - n \times q - r$ ou

$(d-n) \times (q'-q) = n \times (q-1) + r - r' \ldots (VII)$

Os limites mínimo e máximo que os restos r e r' podem assumir em (I) e (II) são, respectivamente, 0 e $d - n - 1$.

Substituindo-os na igualdade anterior, teremos:

$(d - n) \times (q' - q) = n \times (q - 1) - (d - n) + 1$

ou

$(d - n) \times (q' - q + 1) = n \times (q - 1) + 1$

Para que essa igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$q' - q + 1 > 0$ ou $q' \geq q \ldots$ c.q.d.

16) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, demonstrar que, ao somarmos o mesmo número n ($n \in \mathbb{N}*$) ao dividendo e ao divisor, o quociente gerado q', será menor ou igual ao quociente primitivo q.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \ldots (\mathrm{I})$$

$$\begin{array}{l|l} D + n & d + n \\ \hline r' & q' \end{array} \quad \ldots (\mathrm{II})$$

Temos a demonstrar que $q' \leq q$.

De (I) $\ldots D = d \times q + r \ldots$ (III) $\quad 0 \leq r < d$

De (II) $\ldots D + n = (d + n) \times q' + r' \ldots$ (IV) $\quad 0 \leq r' < d + n$

ou $D = (d + n) \times q - n \times q + r \ldots$ (V)

$D + n = (d + n) \times q' + r' \ldots$ (VI)

(VI) $-$ (V) $n = (d + n) \times (q' - q) + r' + n \times q - r$ ou

$(d + n) \times (q' - q) = n \times (1 - q) + r - r' \ldots$ (VII)

Os limites mínimo e máximo que os restos r e r' podem assumir em (I) e (II) são, respectivamente, 0 e $d + n - 1$.

Substituindo-os na igualdade anterior, teremos:

$(d + n) \times (q' - q) = n \times (1 - q) - (d + n) + 1$

ou

$(d + n) \times (q' - q + 1) = n \times (1 - q) + 1$

Para que essa igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$q' - q + 1 \leq 0$ ou $q' \leq q$ ... c.q.d.

17) Numa divisão de dividendo D, divisor d, quociente q e resto r, demonstrar que, ao somarmos um múltiplo do divisor $k \times d$ (diferente de zero) ao dividendo, obteremos o mesmo resto, e o novo quociente ficará aumentado de k unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}, \quad D = d \times q + r, \quad 0 \leq r < d \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{l|l} D + k \times d & d \\ \hline r' & q' \end{array}, \quad D + k \times d = d \times q' + r', \quad 0 \leq r' < d \quad \text{(II)}$$

1º) Provemos que $r' = r$

Em (I) ... $D =$ múlt. $d + r$ ... (III)

Em (II) ... $D +$ múlt. $d =$ múlt. $d + r'$ ... (IV)

Substituindo (III) em (IV), teremos:

múlt. $d + r +$ múlt. $d =$ múlt. $d + r'$

Dividindo-se os dois membros por múlt. d, concluiremos que $r' = r$ . . . c.q.d.

2º) Provemos que $q' = q + k$

$D = d \times q + r$ ... (I)

$D + k \times d = d \times q' + r'$ ... (II)

Substituindo (I) em (II) e fazendo em (II), $r = r'$, teremos:

$$d \times q + r' + k \times d = d \times q' + r'$$

Simplificando-se convenientemente, teremos: $q' = q + k$ . . . c.q.d.

18) Numa divisão, o quociente é o maior número natural de um algarismo, e o divisor, o menor de três algarismos diferentes. Determinar o dividendo, sabendo que o resto é o maior possível.

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos: $q = 9$; $d = 102$ e $R = 101$.

Sabemos que $D = d \times q + R$ e substituindo q, d e R, convenientemente, teremos:

$D = 102 \times 9 + 101$

$D = 918 + 101$

$D = 1.019$

19) Numa divisão de um número natural por 35, determinar a soma de todos os restos (naturais) possíveis.

Resolução:

É óbvio que o menor resto será o zero e, o maior, 34. Portanto, a soma S será:

$\underbrace{0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 34}$

Vê-se que na parte *subchaveada* existem 17 pares cuja soma é igual a 35, portanto:

$S = 17 \times 35 \Rightarrow S = 595$

20) Determinar o menor e o maior número natural que divididos por 19 dão resto igual ao quociente.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & 19 \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Os valores que r pode assumir, variam de 0 até 18 . Portanto ...

a) Para $r = 0 \Rightarrow D = 19 \times 0 + 0 = 0$

b) Para $r = 18 \Rightarrow D = 19 \times 18 + 18 = 360$

21) Determinar o menor e qual é o maior número natural que divididos por 29 dão resto inferior ao quociente de 2 unidades.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & 29 \\ \hline q-2 & q \end{array}$$

O menor valor de D será para $q - 2 = 0$, ou seja, $q = 2$. Portanto . . .

$D = 29 \times 2 + 0 \therefore D = 58$.

O maior valor será para $q - 2 = 28$, ou seja, $q = 30$. Portanto . . .

$D = 29 \times 30 + 28 \therefore D = 898$

22) Calcular os números naturais que divididos por d dão um resto igual ao quociente.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & d \end{array}$$

$D = d \times q + q \Rightarrow D = q \times (q + 1)$

Para $q = 0 \Rightarrow D = 0 \times (d + 1)$

Para $q = 1 \Rightarrow D = 1 \times (d + 1)$

Para $q = 2 \Rightarrow D = 2 \times (d + 1)$

Para $q = 3 \Rightarrow D = 3 \times (d + 1)$

Para $q = d - 1 \Rightarrow D = d \times (d - 1) + d - 1 = d^2 - 1$

Resposta: Múltiplos de $d + 1$, menores ou iguais a $d^2 - 1$

23) Somando 24 ao dividendo de uma divisão e 6 ao divisor, o quociente e o resto não se alteram. Determinar o quociente.

Resolução:

De acordo com a teoria, esse quociente será, simplesmente, igual a $\dfrac{24}{6} = 4$.

2.5.7 Exercícios Propostos

1) Uma pessoa tinha que dividir o número N por 3, mas enganou-se, multiplicando-o por 3, e encontrou a mais 104 unidades do que deveria. Determine N.

2) Diminuindo-se 215 unidades da multiplicação de um número por 5, um aluno encontrou para resto a metade desse produto. Determine esse número.

3) Diminuindo-se 48 de um certo número, obtém-se o mesmo resultado da divisão desse número por 3. Qual é o número?

4) Dividindo-se certo número por 6, ficam faltando 115 unidades ao quociente para se obter o dividendo. Determine-o.

5) Numa divisão, o dividendo é 136, o quociente é 12 e o resto é 4. Qual é o divisor?

6) Qual é o resto de uma divisão, cujo divisor é 45 4 e que, ao somarmos 25 ao dividendo, a divisão torna-se exata?

7) Numa divisão de divisor 13 e resto 7, ficam faltando 223 unidades ao quociente para ele ser igual ao dividendo. Calcule o dividendo.

8) Numa divisão, o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. Calcule o dividendo, sabendo que a soma do dobro do quociente com o resto é igual a 410.

9) Numa divisão o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. Sendo a soma do divisor e do quociente igual a 6, determine o dividendo.

10) Numa divisão, o quociente é 6 e, o resto, 15. Determine o dividendo e o divisor, sabendo que a soma desses dois números com o quociente e o resto é 183.

11) Numa divisão, o quociente é 107, que é igual a soma do divisor com o resto. Calcule o dividendo, sabendo que o resto é o maior possível.

12) Numa divisão, o divisor é 28, o quociente é o quádruplo do divisor, e o resto é o maior possível. Calcule o dividendo.

13) Numa divisão o quociente é 48 e o resto é a terça parte do quociente. Calcule o dividendo sabendo que o resto é o maior possível.

14) Subtraindo-se de 552 certo número, obtém-se o quociente desse número por 7. Calcule esse número.

15) Dividindo-se um número sucessivamente por 15 e 24, o primeiro quociente excede o segundo de 21 unidades. Determine o dividendo e o primeiro quociente, sabendo que nas duas divisões os restos são nulos.

16) Numa divisão, o divisor é 298, o quociente é o triplo do divisor e o resto é o maior possível. Qual é o dividendo?

17) Numa divisão, onde o divisor é 12, o quociente é 10 e o resto é o maior possível, qual é o dividendo?

18) O dividendo de uma divisão é 237, o resto é 17 e o divisor é o menor possível. Determine o quociente.

19) Subtraindo-se de um certo número D o quociente de sua divisão por 3, obtemos 258. Qual é o número?

20) Numa divisão, o dividendo é 270 e o divisor é 18. De quanto se deve diminuir o divisor, para que o quociente aumente de 12 unidades?

21) Se acrescentarmos 6 unidades à terça parte de um número, ainda fica faltando uma unidade para completar a metade desse número. Determine-o.

22) Somando-se a um certo número o quociente da sua divisão por 5, obtemos 114. Qual é esse número?

23) Dividindo-se 1.112 por um certo número, obtém-se quociente 65 e resto 7. Determine esse número.

24) Em uma divisão, a soma do divisor com o quociente é igual a 24 e o resto é o maior possível. Calcule o dividendo, sabendo que o divisor é o triplo do quociente.

25) Nas divisões inexatas por 39, quantos restos diferentes podem ocorrer?

26) Qual é o maior número que, dividido por 21, deixa resto igual ao quíntuplo do quociente?

27) Numa divisão exata, a soma do dividendo, divisor e quociente é 423 . Sendo o quociente igual a 7, calcule o dividendo e o divisor.

28) Divide-se um número por 3 e, em seguida, divide-se o quociente obtido por 4. Sendo as duas divisões exatas e a soma dos respectivos quocientes 420, qual é esse número?

29) Trabalhando no conjunto dos números naturais, efetuamos a divisão de P por D e obtemos quociente Q e o resto R. Em seguida, dividindo-se o resto Q por D', obtemos o quociente Q' e o resto R'. Caso dividíssemos o número P pelo produto $D \times D'$, qual seria o novo resto?

30) A diferença de dois números naturais é 286. Dividindo-se o maior deles pelo menor, obtém-se o quociente 7 e o resto, o maior possível. Determine o número menor.

31) A soma do dividendo, divisor, quociente e resto de uma divisão é 145. O quociente é 3, e o resto, o maior possível. Calcule o dividendo.

32) Numa divisão, o divisor é 15 e o resto é 6. Qual é o menor número que devemos somar ao dividendo, para que o quociente aumente de 1 unidade?

33) Numa divisão, o quociente é 2 e o resto é 192. Determine o maior número que se pode somar ao divisor sem que o quociente se altere.

34) Na divisão exata de um número por 7, ficam faltando 228 unidades ao quociente para igualá-lo ao dividendo. Determine esse número.

35) Os restos das divisões dos números 111 e 50 por x são 3 e 5, respectivamente. Os restos das divisões dos números 78 e 100 por y são 6 e 4, respectivamente. Qual é o maior valor possível para a soma de x e y?

36) Dividindo-se um número natural P por outro S, obtemos quociente Q e resto R. Aumentando-se o dividendo P de 10 unidades e o divisor S de 6 unidades, o quociente Q e o resto R não se alteram. Determine o quociente.

37) Uma fábrica de fósforos usa os seguintes critérios:

uma caixa: conjunto de 45 fósforos;

um maço: conjunto de 10 caixas;

um pacote: conjunto de 12 maços.

Dividindo-se 13 pacotes, 5 maços, 8 caixas e 22 fósforos por 8 , obtém-se um número P de pacotes, M maços, C de caixas e F de fósforos.

Determine: $P + M + C + F$

38) Dentre os números naturais inferiores a 200, quais são os que podem servir de dividendo em uma divisão cujo quociente seja 4 e o resto 35?

39) Sejam N, x e y, números naturais. Se q for o quociente da divisão de N por x e q' for o quociente de q por y, qual será o quociente da divisão de N por $x \cdot y$?

40) Em uma divisão, o dividendo é igual a 651 e o quociente é 13. Calcule o menor valor que pode assumir o divisor.

41) A divisão do número natural A pelo número natural B gera quociente Q e resto R. Aumentando-se o dividendo A de 15 unidades e o divisor B de 5, o quociente e o resto não se alteram. Determine o quociente Q.

42) Dentre os números menores que 500, quais são os que podem servir de dividendo e divisor, numa divisão cujo quociente é 13 e o resto 37?

43) Quais são os números naturais que divididos por 7 geram:

a) quociente igual a resto?

b) quociente igual ao resto menos uma unidade?

c) quociente igual ao quadrado do resto?

d) o resto igual ao quadrado do quociente?

44) O que acontecerá ao quociente e ao resto de uma divisão quando:

a) adicionarmos ao dividendo o quíntuplo do divisor?

b) multiplicarmos o dividendo pelo quíntuplo do divisor?

45) Em uma divisão, adiciona-se 16 unidades ao dividendo e 2 ao divisor. Sabendo-se que o quociente e o resto não se alteraram, qual foi o quociente?

46) Numa divisão inexata, o dividendo é igual a 500 e o divisor é 55. Determine o maior número que se pode subtrair do divisor sem alterar o quociente.

47) Tomando-se para divisor o quociente de uma certa divisão, em que caso se obtém, para quociente e resto, os mesmos números da primeira divisão?

48) Dividindo-se um número natural A por um outro B, obtém-se um quociente Q e um resto R. Ao aumentarmos o dividendo A de K unidades e o divisor B de 1 unidade, o quociente e o resto não se alteram. Determine o quociente.

49) Quantos devem ser os números naturais k, de modo que a divisão de $113k + 7$ por $k + 1$, seja exata?

50) Observe o algoritmo seguinte:

$$\begin{array}{l|l} 43 & 4 \\ \hline r & q \end{array}$$

Qual é o menor número que se pode somar ao dividendo, de modo que o quociente aumente de 500 unidades?

Respostas:

1) 39
2) 86
3) 36
4) 138
5) 11
6) 20
7) 241
8) 18.905
9) 11
10) 141 e 21
11) 5.831
12) 3.163
13) 832
14) 483
15) 56 e 840
16) 266.709
17) 131
18) 13
19) 387
20) 8
21) 42
22) 95
23) 17
24) 125
25) 38
26) 104
27) 364 e 52
28) 1.008
29) $R' \times D + R$
30) 41
31) 95
32) 9
33) 96
34) 266
35) 41
36) 3
37) 25
38) $179, 183, 187, 191, 195$ e 199
39) $q \times q' - 1$
40) 47
41) 3
42) **Não há números que satisfaçam às condições dadas**
43) **a)** $8, 16, 24, 32, 40$ e 48
b) $1, 9, 17, 25, 33$ e 41
c) $8, 30, 66, 116, 180$ e 259
d) $8, 18, 30, 44, 60$ e 78
44) **a) Ficará acrescido de 5 unidades e o resto não se altera;**
b) Ficará multiplicado por 5 e o resto será igual a zero.
45) 8
46) 4
47) **Quando o divisor** (d) **e o quociente** (q) **são maiores que** r
48) k/l
49) 4
50) 1.997

2.6 Potenciação

É qualquer multiplicação em que todos os fatores são iguais.

Exemplo 1: $2 \times 2 \times 2$

Exemplo 2: 3×3

Exemplo 3: $a \times a \times a \times \cdots \times a$

2.6.1 Notação

$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fatores}}$ ou a^m ($m \in \mathbb{N}$, tal que $m \geq 2$)[8]

Em $a^m = p$, temos as seguintes nomenclaturas:
a . . . *base* ou *raiz*
m . . . *expoente* ou *grau de multiplicidade*
p . . . *potência*

2.6.2 Leitura

A representação a^m, lê-se: a elevado a m.

Exemplo: 2^4. Lê-se: dois elevado a quatro.

Observação: Quando o expoente for 2 ou 3, são utilizadas as palavras *quadrado* e *cubo*, respectivamente.

Exemplo 1: 3^2. Lê-se: três elevado a dois ou três ao quadrado.

Exemplo 2: 5^3. Lê-se: cinco elevado a três ou cinco ao cubo.

2.6.3 Potência

Dá-se o nome de potência[9] *a qualquer produto obtido através da potenciação.*

Exemplo 1: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, onde o 8 é a potência.

---

[8] A notação a^m é devida a Nicholas Chuquet ($1.445 - 1.488$) e generalizada por René Descartes ($1.596 - 1.650$)

[9] No contexto da matemática, esta palavra é atribuida a Hipócrates de Quio (460a.c).

Exemplo 2: $3^2 = 3 \times 3 = 9$, onde o 9 é a potência.

2.6.4 Propriedades da Potenciação

1ª *Zero elevado a qualquer número natural, diferente de zero, é igual a zero.*

$0^m = 0 \ (m \neq 0)$

2ª *Numa multiplicação de bases iguais, basta conservarmos a base e somarmos os respectivos expoentes.*

$a^m \times a^n \times a^p \times \cdots = a^{m+n+p+\cdots}$ (a recíproca é verdadeira)

Observação:

$a^m \times a^n \times a^p \times \ldots$

$$= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fatores}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fatores}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{p \text{ fatores}} = a^{m+n+p+\cdots} \quad \text{c.q.d.}$$

3ª *Numa divisão de mesma base, basta conservarmos a base e diminuirmos (da esquerda para a direita) os respectivos expoentes.*

$a^m \div a^n \div a^p \div \cdots = a^{m-n-p-\cdots}$ (a recíproca é verdadeira)

Observação: Suponha apenas a divisão $a^m \div a^n \ldots$ (I), onde $m > n$.

Seja $m - n = k \Rightarrow m = k + n$

Substituindo m em (I), teremos: $a^{k+n} \div a^n = \dfrac{a^k \times a^n}{a^n} = a^{m-n} \ldots$ c.q.d.

Generalizando, concluiremos facilmente que: $a^m \div a^n \div a^p + \cdots = a^{m-n-p-\cdots}$

4ª *Para elevarmos uma multiplicação a qualquer expoente, basta elevarmos cada um desses fatores a esse expoente.*

$(a \times b \times c \times \ldots)^m = a^m \times b^m \times c^m \times \ldots$ (a recíproca é verdadeira)

Partamos inicialmente de $(a \times b)^n$.

Sabemos que:

$$(a \times b)^m = \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{m \text{ fatores}} =$$

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fatores}} \times \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{m \text{ fatores}} = a^m \times b^m$$

Generalizando, chegaremos "tranqüilamente"a propriedade inicial.

5ª *Para elevarmos um número da forma* a^m *a vários expoentes, basta conservamos a base e multiplicarmos os expoentes entre si.*

$$\left\{\left[(a^m)^p\right]^q\right\}^{r\ldots} = a^{m\times p\times q\times r\times\ldots}$$

Analisemos inicialmente, $(a^m)^p$

$$(a^m)^p = \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{p \text{ fatores}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{p \text{ parcelas}}} = a^{m\times p}$$

Generalizando, chegaremos facilmente à propriedade primitiva.

6ª *A potência de ordem superior é igual a potência do número que tem para base, a base do número dado, e para expoente, a potência gerada pelas potências desses expoentes.*

Assim, a potência gerada pelo número

$$N = a^{b^{c^{\cdots^{w^{x^{y^z}}}}}}$$

deverá ser calculada a partir das geradas pelos últimos expoentes.

Suponhamos, para efeito de análise, um número da forma $N = w^{x^{y^z}}$. Inicialmente, a única potência que podemos determinar é y^z, daí ...

1º)

$$x^{y^z} = x^{(y^z)} = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{y^z \text{ fatores}}.$$

Se $y^z = k$, então,

$$x^{y^z} = x^{(y^z)} = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{k \text{ fatores}} = x^k = p_1;$$

2º)

$$w^{x^{y^z}} = w^{\left(x^{y^z}\right)} = w^{\left[x^{(y^z)}\right]} = w^{p_1} = p,$$

onde p é a potência procurada.

7ª *A potência gerada por* 10^m *é igual ao* 1 *seguido de* m *zeros.*

$10^m = 1\underbrace{000\ldots0}_{m0\text{'s}}$

8ª *Os algarismos* $0, 1, 5$ *ou* 6 *ou números polidígitos em que o algarismo das unidades seja um desses, geram potências cujo algarismo das unidades são, respectivamente,* $0, 1, 5$ *ou* 6.

9ª *Ao compararmos potências de mesma base (base maior que* 1*), a maior delas será aquela que possuir maior expoente.*

Se $a > 1$ e $m > p$, devemos provar que $a^m > a^p$.

$a^1 = a > 1$ ou $a^1 > a^0$

$a^2 = a \times a > a^1$

$a^{p+1} = a^p \times a > a^p$

$a^{p+2} > a^{p+1}$

$a^{p+3} > a^{p+2}$

$\vdots \quad \vdots$

$a^{m-1} > a^{m-2}$

$a^m > a^{m-1}$

Multiplicando-se as desigualdades anteriores, membro a membro, teremos:

$$a^{p+1} \times a^{p+2} \times a^{p+3} \times \cdots \times a^{m-1} \times a^m > a^p \times a^{p+1} \times a^{p+2} \times \cdots \times a^{m-1}$$

Simplificando-se, convenientemente, os fatores comuns desses dois membros, teremos:

$a^m > a^p \;\ldots$ c.q.d.

2.6.5 Nótulas Complementares

Vimos na definição de potenciação que $a^m = p$ $(m \geq 2)$. Portanto, a^1 e a^0 não podem ser consideradas como potenciações, logo, não geram potências e, para esses dois casos particulares de NÃO potenciações, são consideradas as seguintes propriedades:

1ª *Todo número elevado a* 1 *é igual a ele mesmo.*

Seja a divisão de a^p por a^q.

Admitamos, para efeito de demonstração, $p = q + 1$

A partir desta suposição, pode-se escrever:

$$\frac{a^{q+1}}{a^q} = a^{q+1-q} = a^1 \ldots (\text{I}) \quad \text{e}$$

$$\frac{a^{q+1}}{a^q} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{q+1}}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{q}} = a \ldots (\text{II})$$

Comparando (I) com (II), vê-se facilmente que $a^1 = a$

2ª *Todo número (diferente de zero) elevado a zero é igual a* 1.

Demonstração (em $\mathbb{N}$*)*

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \ldots (\text{I}) \quad \text{e} \quad \frac{a^m}{a^m} = 1 \ldots (\text{II})$$

Igualando-se (I) com (II), poderemos afirmar que $a^0 = 1$

Obs.: Em $\mathbb{R}$, por definição, $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

2.6.6 Proposições

1ª *Um número par elevado a um expoente par ou ímpar gera sempre um número par*.

$(2n)^{2p} = 2^{2p} \times (n^{2p}) = 2^p \times 2^p \times (n^{2p}) = 2 \times \{[2^{p-1} \times 2^p] \times (n)^{2p}\} =$ número par

$(2n)^{2p+1} = (2n)^1 \times (2n)^{2p} = 2 \times [(n) \times (2n)^{2p}] =$ número par

2ª *Um número ímpar elevado a um expoente par ou ímpar, gera sempre um número ímpar*.

$(2n+1)^1 = 2n+1 =$ número ímpar
$(2n+1)^2 = (2n+1) \times (2n+1) =$ número ímpar
$(2n+1)^3 = (2n+1)^2 \times (2n+1) =$ número ímpar
$(2n+1)^4 = (2n+1)^3 \times (2n+1) =$ número ímpar

2.6.7 Representação Polinômica de um Número Natural Polidígito N

Se N for um número natural de dois, três, quatro... α algarismos, então podemos explicitá-lo das seguintes formas:

$N = ab$ ou $N = a \times 10^1 + b$, ou ainda, $N = 10a + b$
$N = abc$ ou $N = a \times 10^2 + b \times 10^1 + c$, ou ainda, $N = 100a + 10b + c$
$N = abcd$ ou $N = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d$, ou ainda,
$N = 1.000a + 100b + 10c + d$

$$\vdots$$

$$N = \underbrace{abc\ldots xyz}_{\alpha \text{ algarismos}} \quad \text{ou}$$

$$N = \underbrace{a \times 10^{\alpha-1} + b \times 10^{\alpha-2} + c \times 10^{\alpha-3} + \cdots + x \times 10^2 + y \times 10^1 + z}_{\text{forma polinômica}}$$

Obs.:Em "Álgebra", a notação "ab" está associada a "$a \times b$". Cuidado para não confundir essa notação com essa forma polinômica da "Aritmética".

2.6.8 Exercícios Resolvidos

1) Um número N é constituído de dois algarismos e, colocando-se o zero entre eles, esse número aumenta de 180 unidades. Sabendo-se que o algarismo das unidades excede o das dezenas de 7 unidades, determinar esse número.

   Resolução:

   Seja $N = ab$ $(a > b)$

   De acordo com os dados do problema, teremos:

$$\begin{cases} N' = a0b\ldots(\text{I}) \\ N' = N + 180\ldots(\text{II}) \end{cases}$$

   Substituindo (I) em (II), tem-se:

$$a0b = ab + 180$$

$$100 \times a + 10 \times 0 + b = 10 \times a + b + 180$$

$90 \times a = 180$

$a = 2$

Como b excede o a em 5 unidades, poderemos afirmar que $b = 7$.

Conclusão: O número procurado é o 27.

2) Existem números constituídos de dois algarismos significativos tais que, invertendo-se a ordem dos mesmos, obtém-se outros que excedem os primitivos de 36 unidades. Determinar esses números.

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos:

$N = ab \ldots$ (I); $N' = ba \ldots$ (II) e, $N' = N + 36 \ldots$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), teremos:

$ba = ab + 36$

$10b + a = 10a + b + 36$

$10b - b + a - 10a = 36$

$9b - 9a = 36$

$b - a = 4$

Analisando essa última igualdade, poderemos determinar os algarismos e, conseqüentemente, os números que satisfazem a condição do problema, ou seja:

$b = 9$ e $a = 5 \Rightarrow N = 59$;

$b = 8$ e $a = 4 \Rightarrow N = 48$;

$b = 7$ e $a = 3 \Rightarrow N = 37$;

$b = 6$ e $a = 2 \Rightarrow N = 26$;

$b = 5$ e $a = 1 \Rightarrow N = 15$

Resp.: $59, 48, 37, 26$ e 15

3) Para escrever todos os números naturais consecutivos desde $1ab$ até $ab2$, inclusive, foram utilizados $1ab1$ algarismos. Determinar o número de algarismos a mais que precisaremos para escrever todos os números naturais até aab, inclusive.

Resolução:

$(ab2 - 1ab + 1) \times 3 = 1ab1$

$(100a + 10b + 2 - 100 - 10a - b + 1) \times 3 = 1.000 + 100a + 10b + 1$

$(90a + 9b - 97) \times 3 - 100a - 10b = 1.001$

$270a + 27b - 100a - 10b = 1001 + 291$

$17(10a + b) = 1.292$

$ab = \dfrac{1.292}{17}$

$ab = 76$

Portanto, de 763 até $aab \Rightarrow (776 - 763 + 1) \times 3 = 14 \times 3 = 42$.

Resp.: 42 algarismos

4) Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$. Calcular $a + b + c$.

Resolução:

$(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$

$(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = (10c + c)^2$

$100a^2 + 20ab + b^2 - 100b^2 - 20ab - a^2 = 121c^2$

$99a^2 - 99b^2 = 121c^2$

$9(a^2 - b^2) = 11c^2$

Dessa igualdade, podemos escrever que:

1º) $c^2 = 9 \therefore c = 3$

2º) $a^2 - b^2 = 11 \Rightarrow (a + b) \times (a - b) = 11 \therefore a = 6$ e $b = 5$

Portanto ... $a + b + c = 6 + 5 + 3 = 14$.

Resp.: 14

2.6.9 Proposição

No sistema de numeração decimal, o maior número de k *algarismos é formado por* k *noves e, o menor, é igual a unidade* 1*, seguida de* $k - 1$ *zeros.*

Exemplo 1: O maior número de um algarismo é o 9, e o menor é o 1.

Exemplo 2: O maior número de dois algarismos é o 99, e o menor é o 10.

Exemplo 3: O maior número de três algarismos é o 999, e o menor é o 100.

Exemplo 4: O maior número de quatro algarismos é o 9.999, e o menor é o 1.000.

Observação: De acordo com a proposição anterior, se

$$N = \underbrace{abcd \ldots vwxy}_{\text{k algarismos}},$$

podemos sempre escrever que: $10^{k-1} \leq N < 10^{k}$

2.6.10 Estimativa da Quantidade de Algarismos de um Produto

1º Caso: A multiplicação possui apenas dois fatores.

Teorema:

Se A *e* B *são dois números, onde* A *possua* α *algarismos e* B *tenha* β *algarismos então o produto terá, no máximo,* $\alpha + \beta$ *algarismos e, no mínimo,* $\alpha + \beta - 1$ *algarismos.*

Demonstração:

Se B tiver β algarismos, podemos escrever que $10^{\beta-1} \leq B < 10^{\beta}$. Multiplicando-se essa dupla desigualdade por A, teremos:

$$A \times 10^{\beta-1} \leq A \times B < A \times 10^{\beta}$$

Se A tiver α algarismos, então:
$A \times 10^{\beta-1}$, terá $\alpha + \beta - 1$ algarismos,
$A \times 10^{\beta}$, $\alpha + \beta$ algarismos, ... c.q.d.

Observação: De 2.4.1, 6ª propriedade, sabemos que se $A = \underbrace{abc \ldots xyz}_{\alpha \text{ algs}}$ e $B = 1\underbrace{000 \ldots 0}_{\beta \text{ 0's}}$, então: $A \times B = \underbrace{abc \ldots xyz}_{\alpha \text{ algs}}\ \underbrace{000 \ldots 0}_{\beta \text{ algs}}$

Vê-se, portanto, que o produto terá $\alpha + \beta$ algarismos.

2º Caso: A multiplicação possui mais de dois fatores.

Teorema:

O produto P *gerado por* n *fatores* A, B, C, $D, \ldots, W$, *com* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \omega$ *algarismos, respectivamente, terá, no máximo,* $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega$ *algarismos e, no mínimo,* $[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega)-(n-1)]$ *algarismos.*

Demonstração:

1º) Sabemos que, se B possui β algarismos, então, $10^{\beta-1} \leq B < 10^{\beta}$.

Multiplicando-se essa dupla desigualdade por A, teremos:

$$\underbrace{A \times 10^{\beta-1}}_{\alpha+\beta-1 \text{ algs}} \leq \underbrace{A \times B}_{P_1} < \underbrace{A \times 10^{\beta}}_{\alpha+\beta \text{ algs}} \ldots \text{(I)}$$

Conclusão: Como P está entre esses dois números, esse produto terá, no máximo $\alpha+\beta$ algarismos e, no mínimo, $\alpha+\beta-1$ algarismos.

Observação: $\alpha+\beta-I = \alpha+\beta-(2-1)$, onde 2 é o número de fatores.

2º) Se C possui γ algarismos, então, $10^{\gamma-1} \leq C < 10^{\gamma}$.

Multiplicando-se essa dupla desigualdade por (I), teremos:

$$\underbrace{A \times 10^{\beta-1} \times 10^{\gamma-1}}_{\alpha+\beta+\gamma-2 \text{ algs}} \leq \underbrace{A \times B \times C}_{P_3} < \underbrace{A \times 10^{\beta} \times 10^{\gamma}}_{\alpha+\beta+\gamma \text{ algs}} \ldots \text{(II)}$$

Conclusão: O produto P_3 terá, no máximo, $\alpha+\beta+\gamma$ algarismos, e no mínimo, $\alpha+\beta+\gamma-2$ algarismos.

Observação: $\alpha+\beta+\gamma-2 = \alpha+\beta+\gamma-(3-1)$, onde 3 é o número de fatores.

3º) Se D possui δ algarismos, então, $10^{\delta-1} \leq D < 10^{\delta}$.

Multiplicando-se essa dupla desigualdade por (II), teremos:

$$\underbrace{A \times 10^{\beta-1} \times 10^{\gamma-1} \times 10^{\delta-1}}_{\alpha+\beta+\gamma+\delta-3 \text{ algs}} \leq \underbrace{A \times B \times C \times D}_{P_4} < \underbrace{A \times 10^{\beta} \times 10^{\gamma} \times 10^{\delta}}_{\alpha+\beta+\gamma+\delta \text{ algs}} \ldots \text{(II)}$$

Conclusão: O produto P_4 terá, no máximo, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ algarismos e, no mínimo, $\alpha+\beta+\gamma+\delta-3$ algarismos.

Observação: $\alpha+\beta+\gamma+\delta-3 = \alpha+\beta+\gamma+\delta-(4-1)$, onde 4 é o número de fatores.

Para n fatores, chegaremos empiricamente a conclusão que, de A até W teremos:

$$\underbrace{A \times 10^{\beta-1} \times 10^{\gamma-1} \times \cdots \times 10^{\omega-1}}_{[(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\omega)-(n-1)] \text{ algs}} \leq \underbrace{A \times B \times C \times \cdots \times W}_{P_n}$$

$$< \underbrace{A \times 10^{\beta} \times 10^{\gamma} \times \cdots \times 10^{\omega-1}}_{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\omega) \text{ algs}} \ldots \text{(III)}$$

Vê-se que o produto P_n terá, no máximo $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\omega$, algarismos e, no mínimo $[(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\omega)-(n-1)]$ algarismos.

Pelo teorema da indução matemática, temos em (III) que:

1º) para $n = 1$, esta hipótese não existe, porque a multiplicação deverá possuir, no mínimo, dois fatores;

2º) para $n = 2 \Rightarrow \underbrace{A \times 10^{\beta-1}}_{[(\alpha+\beta)-(2-1)] \text{ algs}} \leq P_2 < \underbrace{A \times 20^{\beta}}_{\alpha+\beta \text{ algs}}$

Vê-se que o produto P_2 terá, no máximo, $\alpha+\beta$ algarismos e, no mínimo, $\alpha+\beta-1$ algarismos;

3º) para $n = k \Rightarrow$

$$\underbrace{A \times 10^{\beta-1} \times 10^{\gamma-1} \times 10^{\delta-1} \times \cdots \times 10^{\omega-1}}_{[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega)-(k-1)] \text{ algs}} \leq P_k$$

$$< \underbrace{A \times 10^{\beta} \times 10^{\gamma} \times 10^{\delta} \times \cdots \times 10^{\omega}}_{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega) \text{ algs}}$$

Daí, o produto P_k terá, no máximo, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega$ algarismos e, no mínimo, $[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega)-(k-1)]$ algarismos.

4º) Para $n = k+1 \Rightarrow$

$$\underbrace{A \times 10^{\beta-1} \times 10^{\gamma-1} \times 10^{\delta-1} \times \cdots \times 10^{\omega-1}}_{\{[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega)-(k+1)-1]\} \text{ algs}} \leq P_{k+1}$$

$$< \underbrace{A \times 10^{\beta} \times 10^{\gamma} \times 10^{\delta} \times \cdots \times 10^{\omega}}_{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega) \text{ algs}}$$

Vê-se que o produto P_{k+1} terá, no máximo, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega$ algarismos e, no mínimo, $[(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega)-k]$ algarismos.

Como $k = k+1-1 \to k = (k+1)-1$, daí, $k = n-1$.

Podemos então afirmar que o produto P_n terá:

$$\begin{cases} \text{no máximo } (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega) \text{ algarismos} \\ \text{no mínimo } [(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\omega)-(n-1)] \text{ algarismos } \ldots \text{ c.q.d.} \end{cases}$$

2.6.11 Exercícios Propostos

1) Um número tem p algarismos e outro q algarismos. O produto desses números terá no máximo .... algarismos e no mínimo .... algarismos.

2) Supondo A, B, C, D e E números naturais compostos por $10, 15, 20, 25$ e 30 algarismos. Sendo Q a quantidade de algarismos do produto deles, então pode-se afirmar que:

   a) $95 < Q < 100$

   b) $95 \leq Q \leq 100$

   c) $95 \leq Q < 100$

   d) $96 < Q \leq 100$

   e) $Q = 100$

   Resp: 1) $p+q$ e $p+q-1$; 2) d

2.7 Raiz Quadrada Exata e Raiz Cúbica Exata de um Número Natural N (Noções)

2.7.1 Introdução

2.7.2 Quadrados perfeitos e cubos perfeitos

a) *Quadrado perfeito:*

Ao multiplicarmos um número natural qualquer N por ele mesmo, a potência gerada denomina-se um *quadrado perfeito*.

$0 \times 0 = 0^2 = 0$
$1 \times 1 = 1^2 = 1$
$2 \times 2 = 2^2 = 4$
$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$4 \times 4 = 4^2 = 16$
$5 \times 5 = 5^2 = 25$
$6 \times 6 = 6^2 = 36$
$7 \times 7 = 7^2 = 49$
$8 \times 8 = 8^2 = 64$
$\vdots$
$N \times N = N^2$

Assim sendo, $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 \ldots N^2$ são ditos quadrados perfeitos.

b) *Cubos perfeitos*:

Ao multiplicarmos um número natural qualquer N por ele mesmo, três vezes, a potência gerada por cada um deles denomina-se um *cubo perfeito*.

Exemplos:

$0 \times 0 \times 0 = 0^3 = 0$
$1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$
$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$
$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$
$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$
$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$
$7 \times 7 \times 7 = 7^3 = 343$
$8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$
$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$
$\vdots$
$N \times N \times N = N^3$

Sendo assim, as potências 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,... N^3, são ditas cubos perfeitos.

2.7.3 Raízes Quadradas Exatas e Raízes Cúbicas Exatas

a) *Raiz quadrada exata*:

Denomina-se raiz quadrada exata de um número natural N, indica-se por $\sqrt{N}$, a um certo número x, se somente se (s.s.s), x^2 for igual a N.

$\sqrt{N} = x, \quad \text{s.s.s}, \quad x^2 = N.$

Observação: Os números quadrados perfeitos possuem raízes quadradas exatas.

Exemplos

$\sqrt{0} = 0$, pois, $0^2 = 0$
$\sqrt{1} = 1$, pois, $1^2 = 1$
$\sqrt{4} = 2$, pois, $2^2 = 4$
$\sqrt{9} = 3$, pois, $3^2 = 9$
$\sqrt{16} = 4$, pois, $4^2 = 16$
$\sqrt{25} = 5$, pois, $5^2 = 25$
$\sqrt{36} = 6$, pois, $6^2 = 36$
$\sqrt{49} = 7$, pois, $7^2 = 49$
$\sqrt{64} = 8$, pois, $8^2 = 64$
$\sqrt{81} = 9$, pois, $9^2 = 81$
$\vdots$
$\sqrt[3]{N} = x$, pois, $x^2 = N$

b) *Raiz cúbica exata*:

Denomina-se raiz cúbica exata de um número natural N*, indica-se por,* $\sqrt[3]{N}$ *a um certo número* x*, se somente se (s.s.s),* x^3 *for igual a* N.

$\sqrt[3]{N} = x$, s.s.s, $x^3 = N$.

Observação: Assim como os quadrados, os cubos perfeitos também possuem raízes cúbicas exatas.

$\sqrt[3]{0} = 0$, pois, $0^3 = 0$
$\sqrt[3]{1} = 1$, pois, $1^3 = 1$
$\sqrt[3]{8} = 2$, pois, $2^3 = 8$
$\sqrt[3]{27} = 3$, pois, $3^3 = 27$
$\sqrt[3]{64} = 4$, pois, $4^3 = 64$
$\sqrt[3]{125} = 5$, pois, $5^3 = 125$
$\sqrt[3]{216} = 6$, pois, $6^3 = 216$
$\sqrt[3]{343} = 7$, pois, $7^3 = 343$
$\sqrt[3]{512} = 8$, pois, $8^3 = 512$
$\sqrt[3]{729} = 9$, pois, $9^3 = 729$
$\vdots$
$\sqrt[3]{N} = x$, pois, $x^3 = N$

2.8 Expressões Aritméticas

São expressões que envolvem números interligados pelos sinais das operações fundamentais, ou seja, $+, -, \times, \div$

Exemplo: $20 + 30 \div 5 \times 4 - 2$

Tais expressões deverão ser calculadas da esquerda para a direita, e as operações deverão seguir a seguinte ordem:

1ª) potenciações e/ou radiciações (na ordem em que aparecerem);
2ª) multiplicações e/ou divisões (na ordem em que aparecerem);
3ª) adições e/ou subtrações (indiferente da ordem em que aparecerem);

Quando a(s) operação(ões) contiverem parênteses ( ), colchetes [ ] ou chaves { } devemos resolver, em primeiro lugar, o que houver dentro dos parênteses, em segundo, dentro dos colchetes e, em terceiro, dentro das chaves.

Exemplo 1:

$\{[60 - (31 - 6) \times 2 + 25] \div [3 + (12 - 5 \div 2)]\}$
$= \{[60 - 25 \times 2 + 25] \div [3 + (12 - 10)]\}$
$= \{[60 - 50 + 25] \div [3 + 2]\}$
$= \{35 \div 5\}$
$= 7$

Exemplo 2:

$4 + 3^2 \times \sqrt{4} + \sqrt{16} \times 9 - 3$
$= 4 + 9 \times 2 + 4 \times 9 - 3$
$= 4 + 18 + 36 - 3$
$= 55$

2.9 Tabela dos Quadrados dos Números Naturais Inferiores a 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Um número menor que 100 possui no máximo dois algarismos portanto, na disposição acima foi adotado o seguinte:

1º : Os quadrados de todos os números que possuem o mesmo algarismo das dezenas estão colocados em uma mesma linha.

2º : Os quadrados de todos os números que possuem o mesmo algarismo das unidades estão colocados em uma mesma coluna.

Assim, o quadrado do número 58, por exemplo, se encontra na interseção da linha com número 5 com a coluna de número 8.

2.10 Exercícios Resolvidos

1) Calcular a potência gerada por: 2^{3^2}

Resolução:

$$2^{3^2} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{3^2 \text{ fatores}} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{9 \text{ fatores}} = 2^9 = 512$$

Na prática, $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

2) Calcular a potência gerada por: $2^{3^{2^{1^{99}}}}$

Resolução:

$1^{\underline{o}}$)

$$1^{99} = 1 \times 1 \times 1 \times \cdots = 1 \rightarrow 2^{3^{2^{1^{99}}}} = 2^{3^{2^{1}}}$$

$2^{\underline{o}}$)

$$2^1 = 2 \rightarrow 2^{3^{2^{1}}} = 2^{3^{2}}$$

$3^{\underline{o}}$)

$$3^2 = 9 \rightarrow 2^{3^{2^{1}}} = 2^9 = 512$$

Resp.: 512

3) Se $A = 2^{\alpha}$ e $B = 5^{\beta}$, sendo α e β números naturais, diferentes de zero, calcular o número de zeros em que termina o produto gerado por $A \times B$.

Resolução:

$1^{\underline{a}}$) Hipótese: $\alpha < \beta$

Como é uma potência de 5 , então, $A \times B$ terminará em α zeros, pois, $\alpha > \beta - \alpha$

$2^{\underline{a}}$) Hipótese: $\beta < \alpha$

De modo análogo ao que foi desenvolvido anteriormente, verificar-se-á que $A \times B$ terminará em β zeros.

$3^{\underline{a}}$) Hipótese: $\alpha = \beta = k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

Nessa hipótese $A \times B = 2^k \times 5^k = 10^k$, portanto, $A \times B$ terminará em k zeros.

Conclusão: O número de zeros será dado pelo menor de um desses dois expoentes (2^{α} ou 5^{β}) e a(s) potência(s) de outro(s) fator(es) primo(s) envolvido(s) não afetará(ão) na quantidade de zeros.

Observação: Se $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma} \times 7^{\delta} \times 11^{\xi} \times \ldots$, a quantidade de zeros gerada pelo produto dessas potências será dada pelo expoente de 2ou de 5, o que for menor!

4) Determinar o número de dígitos do produto gerado por $2^{101} \times 5^{97}$.

Resolução:

$$2^{101} \times 5^{97} = 2^4 \times 2^{97} \times 5^{97} = 16 \times 10^{97}$$

Como o número 16 tem 2 algarismos e 10^{97} gera 97 zeros, então, o total de algarismos será $2 + 97$, ou seja, 99 algarismos.

5) Determinar o número de zeros do produto gerado por:

a) $2^4 \times 5^4$

b) $2^5 \times 5^8$

c) $2^6 \times 5^3$

d) $2^3 \times 3^5 \times 5^4$

Resolução:

De acordo com o que vimos anteriormente, teremos em:

a) $2^4 \times 5^4$......4 zeros (os dois expoentes são iguais a 4)

b) $2^5 \times 5^8$......5 zeros (expoente do 2)

c) $2^6 \times 5^3$......3 zeros (expoente do 5)

d) $2^3 \times 3^5 \times 5^4$......3 zeros (expoente do 2)

6) Determinar o algarismo das unidades gerado por 3^{50}.

Resolução:

$3^1 = 3$

$3^2 = 9$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$3^{50} = \left(3^4\right)^{12} \times 3^2 = 81^{12} \times 9$

De acordo com o item 4.6.4, 8ª propriedade, 81^{12} gerará uma potência cujo algarismo das unidades é o 1 e, multiplicando-se esse resultado por 9, geraremos um número cujo algarismo das unidades é o 9, daí ...

$3^{50} = (3^4)^{12} \times 3^2 = 81^{12} \times 9 = \ldots 1 \times 9 = 9$

Conclusão: O algarismo das unidades é o 9.

7) Determinar a soma dos algarismos da potência gerada por $(\underbrace{999\ldots995}_{100 \text{ algs}})^2$.

Resolução:

Elevemos ao quadrado $95, 995, 9.995, \ldots$ e observemos se existe alguma lei regendo essas potências...

$95^2 = 9.025$

$995^2 = 990.025$

$9.995^2 = 99.900.025$

$99.995^2 = 9.999.000.025$

Observe que as potências formam uma "lei"[10], ou seja, cada n noves na base implica em n noves na potência, acompanhada de n zeros, seguida do número 25. Portanto ...

Dessa potência, podemos afirmar que a soma dos algarismos será:

$9 \times 99 + 2 + 5 = 891 + 7 = 898$ algarismos

8) Colocando-se o "zero" à direita de um certo algarismo, obtém-se um número acrescido 63 unidades em relação a esse algarismo. Determinar esse algarismo.

Resolução:

Seja a o algarismo procurado.

De acordo com o enunciado, têm-se:

$a0 = a + 63$

$10 \times a + 0 = a + 63$

$10a - a = 63$

$9a = 63$

$a = 7$

9) Retirando-se de um número N composto por três algarismos consecutivos, o algarismo das dezenas, ele irá diminuir de 210 unidades. Determinar esse número.

[10] É a relação constante dos elementos que variam.

Resolução:

Seja $N = abc$

De acordo com o enunciado, podemos escrever que:

$ac = abc - 210$

$10a + c = 100a + 10b + c - 210$ ou, reduzindo e explicitando o a em função de b, teremos:

$$a = \frac{21 - b}{9}$$

Para que a divisão anterior seja exata, implicará $b = 3$, logo, $a = 2$. Se os algarismos são consecutivos, então $c = 4$.

Resp.: $N = 234$

10) Seja N um número composto por dois algarismos, tais que, o das dezenas seja o triplo do das unidades. Subtraindo-se 36 unidades desse número, obtém-se um outro constituído pelos mesmos algarismos, mas com as ordens permutadas. Determinar N.

Resolução:

Conforme o enunciado, teremos:

$$\begin{cases} N = ab \\ a = 3 \times b & \text{(I)} \\ ab - 36 = ba \ldots & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) pode-se escrever:

$10a + b - 36 = 10b + a$

$9a - 9b = 36$ ou

$a - b = 4 \ldots \text{(III)}$

Substituindo (I) em (III), tem-se:

$3b - b = 4$

$2b = 4$

$b = 2$

Substituindo b em (I), teremos: $a = 3 \times 2 \Rightarrow a = 6$

Resp.: $N = 62$

11) Um número N é constituído por três algarismos, tais que, o das centenas é o dobro do das dezenas, e o das dezenas, é o dobro do das unidades. Determinar N, sabendo que a soma de seus algarismos é 14.

Resolução:

De acordo com os dados, temos:

$$\begin{cases} N = cdu & \text{(I)} \\ c = 2d & \text{(II)} \\ d = 2u & \text{(III)} \\ c + d + u = 14 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Explicitando (II) em função de u, tem-se:

$c = 2 \times (2u)$ ou $c = 4 \times u \ldots (V)$

Substituindo (III) em (IV) teremos:

$4 \times u + 2 \times u + u = 14$

$7 \times u = 14$

$u = 2$

Substituindo u em (III), tem-se:

$d = 2 \times 2$, donde, $d = 4$

Substituindo $d = 4$ em (II), teremos:

$c = 2 \times 4$, donde, $c = 8$.

Resp.: 842

12) Determinar o quociente e o resto da divisão de 7×3^{51} por 5×3^{49}.

Resolução:

$$\frac{7 \times 3^{51}}{5 \times 3^{49}} = \frac{7 \times 3^2 \times 3^{49}}{5 \times 3^{49}} = \frac{63 \times 3^{49}}{5 \times 3^{49}}$$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 5 \\ \hline 3 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 63 \times 3^{49} & 5 \times 3^{49} \\ \hline 3 \times 3^{49} & 12 \end{array}$$

Resp.: Quociente $= 12$ e resto $= 3 \times 3^{49} = 3^{50}$

13) Demonstrar que o número $\underbrace{111\ldots111}_{(n-1)\ 1\text{'s}}\underbrace{222\ldots222}_{n\ 2\text{'s}}$ é um quadrado perfeito.

Resolução:

$$\underbrace{111\ldots111}_{(n-1)\ 1\text{'s}}\underbrace{222\ldots222}_{n\ \ 2\text{'s}} = 5 + \underbrace{222\ldots222}_{n\ \ 2\text{'s}}0 + \underbrace{111\ldots111}_{n-1\ 1\text{'s}} \times 10^{n+1}$$

$$= 5 + 2 \times \underbrace{111\ldots111}_{n\ 1\text{'s}} \times 10 + \left(\frac{10^{n-1}-1}{9}\right) \times 10^{n+1}$$

$$= 5 + 20 \times \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + \frac{10^{2n} - 10^{n+1}}{9}$$

$$= \frac{45 + 2 \times 10^{n+1} - 20 + 10^{2n} - 10^{n+1}}{9}$$

$$= \frac{25 + 10^{n+1} + 10^{2n}}{9} = \left(\frac{5 + 10^n}{3}\right)^2 \ \ldots \text{c.q.d}$$

14) Calcular a soma dos "n" primeiros números naturais (S_n), a partir de 1.

Resolução:

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$ ... (I) ou

$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$ ... (II)

Somando (I) e (II), teremos:

$$2S_n = (1+n)+(2+n-1)+3+n-2)+\ldots(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1)$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{\text{"}n\text{" parcelas}}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

15) Se S_n é igual à soma dos "n" primeiros números naturais, a partir de 1, determinar:

a) $S_n - S_{n-1}$

b) $S_n + S_{n-1}$

c)$(S_n)^2 - (S_{n-1})^2$

Resolução:

a) $S_n - S_{n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \dfrac{n^2+n-n^2+n}{2} = n$

b) $S_n + S_{n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \dfrac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2$

c) Sabemos que $S_n - S_{n-1} = n$ e $S_n + S_{n-1} = n^2$ logo, multiplicando ambas membro a membro, temos:

$(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = n \times n^2$

$(S_n)^2 - (S_{n-1})^2 = n^3$

16) Calcular a soma dos "n" números pares (S_p), a partir de 2.

Resolução:

$(S_p) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

$(S_p) = 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$$(S_p) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$(S_p) = n(n+1)$

17) Calcular a soma de todos os "n" primeiros números ímpares (S_i), a partir de 1.

Resolução:

$(S_i) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

$(S_i) = (2 - 1) + (4 - 1) + (6 - 1) + \cdots + (2n - 1)$

$$(S_i) = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) - \left[\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{"n" 1's}}\right]$$

$(S_i) = n(n+1) - n$

$(S_i) = n^2$

18) Calcular a soma S gerada por $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Resolução:

Observe a identidade $(x+1)^3 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x$, onde $x = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$

Supondo

$x = 1 \Rightarrow 2^3 - 1 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1$

$x = 2 \Rightarrow 3^3 - 1 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2$

$x = 3 \Rightarrow 4^3 - 1 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$x = n - 1 \Rightarrow n^3 - 1 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3 \times (n-1)$

$x = n \Rightarrow (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$

Somando-se as igualdades anteriores,membro a membro, teremos:

$\left(2^3 - 1\right) + \left(3^3 - 1\right) + \left(4^3 - 1\right) + \cdots + \left(n^3 - 1\right) + (n+1)^3 - 1$

$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) + 3\,[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n]$

simplificando convenientemente, teremos:

$$(n+1)^3 - \left[\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{\text{"}n\text{" parcelas}}\right] = 1 + 3S + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$2(n+1)^3 - 2n = 2 + 6S + 3n(n+1)$

$2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1) = 6S$

$(n+1)\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right] = 6S$

$(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n) = 6S$

$6S = (n+1)(2n^2 + n)$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

19) Calcular a soma S dos cubos dos "n" primeiros números naturais a partir de 1.

Resolução:

Seja $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$

Observe que:

$(S_1)^2 = 1^3$

$(S_2)^2 - (S_1)^2 = 2^3$

$(S_3)^2 - (S_2)^2 = 3^3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$(S_n)^2 - (S_{n-1})^2 = n^3$

Somando membro a membro, teremos:

$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (S_n)^2$

$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ ou ainda

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

20) Multiplicando-se um número N por 1.010 e somando 1 ao produto, obtemos um quadrado perfeito. Determine N.

Resolução:

De acordo com os dados podemos escrever que:

$N \times 1.010 + 1 = x^2$

$x^2 - 1 = N \times 2 \times 5 \times 101$

$(x+1)(x-1) = 5N \times 202$

Dessa igualdade podemos afirmar que:

$$\begin{cases} x - 1 = 5N \\ x + 1 = 202 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 1 = 5N \ldots (I) \\ x - 1 = 200 \ldots (II) \end{cases}$$

Igualando (I) com (II), virá,

$5N = 200 \Rightarrow N = 40$

21) Seja $N = abab$. Subtraindo-lhe 1, obtemos um quadrado perfeito. Determinar$N$.

Resolução:

$N = abab \Rightarrow abab - 1 = N'$, onde $N' = (xy)^2$

De acordo com os dados no enunciado, podemos escrever que:

$abab - 1 = (xy)^2$

$(10x + y)^2 + 1 = 1.000a + 100b + 10a + b$

$100x^2 + 20xy + y^2 + 1 = 1.010a + 101b$

$101x^2 - x^2 + 101y^2 - 100y^2 + 20xy + 1 = (10a + b) \times 101$

$101(x^2 + y^2) - (x^2 - 20xy + 100y^2) + 1 = (ab) \times 101$

$$\underbrace{101(x^2+y^2)}_{\text{mult.11}} - \underbrace{(x^2 - 20xy + 100y^2)}_{(x-10y)^2} + 1 = \underbrace{(ab) \times 101}_{\text{mult.101}}$$

Para que a igualdade anterior se verifique, devemos ter:

$1 - (x^2 - 20xy + 100y^2) = 1 - (x + 10y)^2 = \text{mult.}101 \Rightarrow$

$1 - (x + 10y)^2 = 0 \Rightarrow (x + 10y)^2 = 1$

$$\begin{cases} x - 10y = 1 \Rightarrow x = 10y + 1 \ldots (I) \\ 10y - x = 1 \Rightarrow x = 10y - 1 \ldots (II) \end{cases}$$

Em (II), se $y = 1 \Rightarrow x = 9$

daí $N' = (91)^2 = 8.281$

Como $abab = N' + 1$ então $abab = 8.282$

22) O número $N = xxyy$ é um quadrado perfeito. Determinar esse número.

Resolução:

Representando N polinômicamente, teremos:

$N = 1.000x + 100x10y + y$

$N = 1.100x + 11y$ ou

$N = 11(100x + y)$ ... (I)

Para que N seja um quadrado perfeito é necessário e suficiente que $100x + y$ seja múltiplo de 11 daí,

$100x + y = 90x + x + y = \dot{1}1$

Como $99x = \dot{1}1 \Rightarrow x + y = 11$, logo ...

$100x + 11 = 99x + 11 = 11(9x + 1)$ ... (II)

Substituindo (II) em (I), teremos:

$N = 11[11(9x + 1)] - 11^2(9x + 1)$

Para que $11^2(9x + 1)$ seja um quadrado perfeito é necessário que $9x + 1$ seja, também, um quadrado perfeito, logo:

$9x + 1 = k^2$ e como x é um algarismo que varia de 0 a 9 fácilmente verifica-se que a única solução possível é $x = 7$ e daí $y = 4$.

Como $N = xxyy$ então $N = 7744$.

2.11 Exercícios Propostos

1) Calcule as seguintes expressões aritméticas:

a) $(10 + 6) + (14 - 10)$

b) $(16 + 2 + 6) + (38 - 20)$

c) $(28 + 6 + 10) - (12 + 6)$

d) $(34 + 4 - 12) - (12 + 6)$

e) $16 + (24 - 4) - (90 - 80)$

f) $88 - (56 - 26) - (32 - 24)$

g) $40 - (16 + 4 + 14)$

h) $14 + (6 + 4) - (12 + 8 + 2)$

i) $10 + (40 + 28) - (42 - 26)$

j) $70 - (40 - 32) - (18 + 14 + 6)$

k) $94 + (20 - 8) - (58 - 28) - (16 + 14 + 16 + 20)$

l) $10 - [14 - (12 - 8)]$

m) $26 - [10 + (10 - 4)]$

n) $(66 - 16) - [(42 + 10) - (26 - 16)]$

o) $(12 + 18 + 10) - [14 + (12 - 8) - (26 - 12)]$

p) $130 - \{30 + (22 - 14) - [18 - (14 - 6)]\}$

q) $42 - [44 - (8 + 10 + 4)] - \{30 - [(38 - 8) - (14 - 6)]\}$

r) $266 - [(70 + 16) - (24 - 6)] - \{(34 + 8) - [30 - (11 - 6)]\}$

2) Calcule as seguintes expressões:

a) $[(36 + 12) \div 12 + (250 \times 5 - 24^0 \times 5)] \times 25$

b) $[6 \times (14 - 4) - (8 \times 2) \div (28 - 20)] \times 6 + (4 + 30 \times 2) \div 16$

c) $(32 + 8) \div 10 + (6 \times 16) \div [12 - (2 + 4 \times 2)] + 6 \div (18 - 8 \times 2)$

d) $(28 - 14) \div 14 + 50 \div [20 + (14 + 8 \times 2)] + 6 \div (18 - 4 \times 4)$

e) $(6 + 8 \times 5) \times (20 - 64 \div 4) + 6 \times [72 - (12 + 4 \times 3) \div 8] \div (18 - 8 \times 2)$

f) $(40 - 7 \times 4) \div (42 - 5 \times 6)] + [2 + (12 + 4 \times 6) \div 12] \times (16 + 20 \div 10)$

g) $[120 + (62 + 12) \times 4 + 30] \div [6 + (24 - 5 \times 4)]$

h) $[50 \times 3 \times (34 - 5 \times 6)] \div [3 \times (14 - 10) \times (2 + 6 \times 8)]$

3) Calcule as seguintes expressões:

a) $\{2^3 - 3 \times [24 - 6 \times (13 - 5 \times 2) \div 3^2] \div 11\} \times 6 + 8$

b) $3^4 \times 4 + 300 \div (18 - 8)2 - 3^2 \times 10 + 48 \div (2^4 - 10)$

c) $4^3 \div 2^4 + (100 \times 2^2) \div (2 + 6 \times 2^3) + 4 \times 5^2 - 72 \div (2^3 + 10)$

d) $2 \times 6^2 + 10 \times (2^3 \times 6 - 40 \div 2^3 + 2^0) - (2 \times 3^2 + 10 \times 2^2 + 2 \times 1^{20}) \div (42 - 2 \times 4^2)$

e) $5^2 \times 2^5 + 2^4 \times (2 \times 3^2 - 4 \times 5^4 \div 5^4) + (2 \times 3^2 + 5 \times 2^2 \times 5 + 2) \div (2 \times 21 - 2^5)$

f) $\{2^2 + 2^5 \div (3^2 - 2^3) \times [6 + 2^3 \times (2^5 - 2^3)]^0 - 5^2\} \div 11$

g) $\{2^{2^2} + 3^{3^0} - 4^{0^4} + 5 \times [1^{119} + 199^1 - 2 \times (6^2 + 2^6)]\}$

h) $4 \times \sqrt{4} + 9 \div \sqrt{9} + 4^{\sqrt{4}} + \sqrt{5^2} - \sqrt{5^{\sqrt{4}} - 2^{\sqrt{16}}}$

4) Calcule as potências geradas por:

a) $2^{3^{2^1}}$ b) 3^{2^0} c) 3^{0^2} d) $3^{2^{1^0}}$

e) $5^{1^{0^2}}$ f) $1^{2^{0^3}}$ g) $\left\{\left[\left(\sqrt{4}\right)^{\sqrt{4}}\right]^{\sqrt{1}}\right\}^{\sqrt{4}}$

5) Em quantos zeros termina cada uma das potências geradas por:

a) 10^7? b) $(10^2)^3$? c) 10^{2^3}? d) 10^{3^2}?

6) Em quantos zeros termina cada um dos produtos gerados por:

a) $2^8 \times 5^8$? b) $2^{13} \times 5^{17}$?

7) Qual é o algarismo das unidades gerado por cada potência a seguir?

a) 2^{90} b) 4^{30} c) 5^{70} d) 6^{45}

e) 7^{102} f) 2^{3^4} g) $3^{50^{50}}$

8) Qual é o algarismo das unidades gerado por:

a) 7×3^{70} b) $2 \times 3^{15} + 3 \times 2^{16}$ c) $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} + 9$ d) 7^{102}

e) 2^{3^4} f) $3^{50^{50}}$

9) Calcule o produto dos algarismos significativos da soma gerada por:

$1 + 2 + 3 + \cdots + 10^{1.998}$

10) Se $N = \underbrace{999\ldots99}_{220 \text{ algs}}$, qual é a soma dos algarismos de N^2?

11) As representações decimais dos números $2^{1.999}$ e $5^{1.999}$ são escritas lado a lado. O número de algarismos escritos é igual a?

a) 1.999 b) 2.000 c) 2.001 d) 3.998 e) 3.999

12) Se $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 99^3 + 100^3$ e $B = (1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100)^2$, então:

a) $A > B$ b) $A < B$ c) $A = B$ d) $\frac{A}{B} > 1$ e) $\frac{A}{B} < 1$

13) Se $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 49^3 + 50^3$, então $\sqrt{A}$ é igual a:

 a) 1.725 b) 1.275 c) 1.527 d) 1.257 e) 1.752

14) Qual é a soma dos algarismos de cada uma das potências geradas por:

 a) $\underbrace{1.000\ldots01^2}_{100 \text{ algs}}$ b) $\underbrace{2.000\ldots01^2}_{200 \text{ algs}}$ c) $\underbrace{3.000\ldots01^2}_{300 \text{ algs}}$

 d) $\underbrace{4.000\ldots01^2}_{400\text{algs}}$ e) $\underbrace{5.000\ldots01^2}_{500 \text{ algs}}$ f) $\underbrace{6.000\ldots01^2}_{600 \text{ algs}}$

 g) $\underbrace{7.000\ldots01^2}_{700 \text{ algs}}$ h) $\underbrace{8.000\ldots01^2}_{800 \text{ algs}}$ i) $\underbrace{9.000\ldots01^2}_{900 \text{ algs}}$

15) Um número termina em um zero. Suprimindo-o, obtemos um número inferior em 396 unidades ao primeiro. Calcule-o.

16) Dado um número, calculemos o seu quadrado e adicionemos 1 à soma dos algarismos deste quadrado, obtendo assim um novo número. Se começarmos com o número 7 obteremos, no primeiro passo, o número $1 + (4 + 9) = 14$, uma vez que $7^2 = 49$. Que número obteremos no 1.999º passo?

17) A colocação do algarismo 3 à direita de um número equivaleu a aumentá-lo de 201 unidades. Qual é esse número?

18) Um número natural N possui dois algarismos, cujo produto é 24. Trocando-se a posição dos algarismos, o número resultante excederá em 18 unidades, o número primitivo. Determine-o.

19) Suponha um número de dois algarismos, tal que, dividido-o pela soma dos mesmos, o quociente seja 4 e o produto desses mesmos algarismos, aumentado de 52, gere o número invertido. Determine-o.

20) Um número N possui três algarismos cuja soma é 21. Trocando-se a posição do algarismo das unidades com o das dezenas, o novo número é 45 unidades maior que N. Calcule N.

21) Um aluno deveria multiplicar um número natural N, por outro número natural de dois algarismos. Em vez disso, inverteu a ordem dos algarismos deste segundo número e obteve um outro, aumentado de 207 unidades em relação ao produto primitivo . Determine N.

22) Dividindo-se um número de dois algarismos (ab ; $a > b$) pela soma destes, o quociente é 7 e o resto é 6. Trocando-se a posição dos algarismos e dividindo-o pela diferença dos mesmos, o quociente é 7 e o resto é 2. Determine esse número.

23) Um número é composto por dois algarismos cuja soma é 10. Trocando-se a ordem desses algarismos, encontramos um outro com 72 unidades maior que o primeiro. Calcule o 1º número.

24) Um número é composto de três algarismos cuja soma é 18. O das unidades é o dobro do das centenas e o das dezenas é igual a soma do algarismo das unidades com o das dezenas. Determine esse número.

25) Um número é composto de dois algarismos cuja soma é 9. Trocando-se a ordem dos mesmos, encontraremos um segundo número 45 unidades maior que o primeiro. Calcule o primeiro número.

26) A soma de dois algarismos de um número é o maior número de um algarismo. Determine esse número, sabendo que lhe somando 27 unidades, obtém-se um outro escrito com os mesmos algarismos.

27) O número natural N de dois algarismos, quando dividido por 13, dá quociente A e resto B e, quando dividido por 5, dá quociente B e resto A. Determine a soma de todos os valores de N que satisfaçam às condições anteriores.

28) Dividindo-se um número de dois algarismos pela soma destes, o quociente é 7 e o resto é 6. Trocando-se a posição dos algarismos e, dividindo-o pela diferença dos mesmos, o quociente é 6 e o resto é 2. Determine esse número.

29) A diferença entre um número de dois algarismos e outro escrito com os mesmos algarismos em ordem inversa é 36. Determine-os, sabendo-se que o algarismo das dezenas do primeiro é igual ao natural consecutivo do dobro do algarismo das unidades desse mesmo número.

30) Um número é constituído por dois algarismos cuja soma dos valores é 14. Trocando-se a ordem desses algarismos, encontraremos um segundo número com 36 unidades menor que o primeiro. Determine esse primeiro número.

31) Um número de seis algarismos tem a sua $6^{\underline{a}}$ ordem ocupada pelo algarismo 1. Se passarmos esse algarismo da $6^{\underline{a}}$ ordem para a $1^{\underline{a}}$, o número que se obtém é o triplo do anterior. Determine o número.

32) Determine os números de três algarismos significativos que aumentam em 54 unidades, quando se troca o algarismo das unidades com o das dezenas e diminui em 630 unidades, quando se troca o algarismo das centenas com o das dezenas.

33) Qual é a soma dos algarismos, na base dez, da potência gerada por $\left(10^{n^3} + 3\right)^2$, supondo $n \in \mathbb{N}^*$?

34) Simplificando a expressão:

$$\frac{(6 \times 12 \times 18 \times \cdots \times 300)}{(2 \times 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times 98) \times (4 \times 8 \times 12 \times 16 \times \times \times 100)}$$

obtemos:

a) 2^{300} b) 1 c) 3^{50} d) 3 e) 50

35) Determine qual é o algarismo das unidades nos números a^2, b^2 e ab (no sistema decimal), sabendo que:

$$a = 2^{2.002} + 3^{2.002} + 4^{2.002} + 5^{2.002} \text{ e } b = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2.002}$$

36) Qual é o último dígito de $7^{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}$, sabendo-se que essa expressão possui 1.001 dígitos 7?

37) Determine os números de dois algarismos tais que, multiplicando-os pela soma deles, obtemos um produto igual à soma dos cubos dos mesmos.

38) Se $\underbrace{111\ldots11}_{\alpha \text{ algs}}$ é igual a $\dfrac{10^{\alpha} - 1}{a}$, calcule a soma dos algarismos da raiz quadrada de $\underbrace{(111\ldots1)}_{100 \text{ uns}} - \underbrace{(222\ldots2)}_{50 \text{ dois}}$.

39) Se a, b e c representam dígitos distintos, calcule $a + b + c$ nos seguintes casos:

i) $a + ab = bcc$;

ii) $a + a + bb = ccc$;

iii) $aa + bb + cc = cba$;

iv) $ba + ab + ab = caa$;

v) $abc + abc + abc = caa$.

40) Os quadrados dos números naturais são números escritos seguidamente, ou seja:

$$149162536496481100121144169\ \ldots$$

Qual é o algarismo que ocupa a $100^{\underline{a}}$ posição?

Respostas:

1) **a)** 20 **b)** 42 **c)** 26 **d)** 8 **e)** 26 **f)** 50 **g)** 6 **h)** 2 **i)** 62 **j)** 24 **k)** 10 **l)** 0 **m)** 10 **n)** 8 **o)** 36 **p)** 102 **q)** 12 **r)** 181

2) **a)** 5 **b)** 355 **c)** 46 **d)** 5 **e)** 391 **f)** 91 **g)** 35 **h)** 1

3) **a)** 20 **b)** 229 **c)** 108 **d)** 306 **e)** 1.306 **f)** 1 **g)** 18 **h)** 29

4) **a)** 512 **b)** 3 **c)** 1 **d)** 9 **e)** 5 **f)** 1 **g)** 4

5) **a)** 7 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 9

6) **a)** 8 **b)** 13

7) **a)** 4 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 9 **f)** 2 **g)** 1

8) **a)** 3 **b)** 2 **c)** 5

9) 25

10) 1.980

11) b

12) c

13) b

14) **a)** 4 **b)** 9 **c)** 16 **d)** 16 **e)** 9 **f)** 13 **g)** 19 **h)** 18 **i)** 19

15) 440

16) 5

17) 22

18) 46

19) 8

20) 849

21) 23

22) 26

23) 19

24) 936

25) 27

26) 36

27) 160

28) 3

29) 73 e 37

30) 5

31) 142

32) 817 e 928

33) 16

34) c

35) 6; 4 e 2

36) 3

37) 37 e 48

38) 150

39) **i)** 10; **ii)** 16; **iii)** 18; **iv)** 10; **v)** 14

40) 9

Capítulo 3

Numeração Não Decimal

3.1 Introdução

Para fazermos a contagem dos elementos de um conjunto, precisamos definir a base. Sabemos que no sistema decimal a contagem é de dez em dez unidades, entretanto, poderemos contar esses elementos da maneira que desejarmos, ou seja: de dois em dois, de três em três ...

3.2 Terminologia das Bases e Símbolos

Bases	**Símbolos**
dois (ou binária)	0 e 1
três (ou ternária)	$0, 1$ e 2
quatro (ou quaternária)	$0, 1, 2$ e 3
cinco (ou quinária)	$0, 1, 2, 3$ e 4
seis (ou senária)	$0, 1, 2, 3, 4$ e 5
sete (ou setenária)	$0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6
oito (ou octonária ou octaval)	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7
nove (ou nonária)	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8

A partir da base onze, teríamos que gerar novos símbolos para indicarmos dez unidades, onze unidades, ... , que certamente causaria transtornos, pois seriam necessários decorá-los, além dos já existentes. Para contornar esse impasse, convencionaram-se letras latinas $(A, B, C \dots)$ ou gregas $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$, onde:

"A" ou "α" indicam "dez" unidades.
"B" ou "β" indicam "onze" unidades.
"C" ou "γ" indicam "doze" unidades.

Assim sendo, teremos:

Base	**Símbolos**
onze (undecimal)	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e "A" ou "α"
doze (duodecimal)	$0, 1, 2, , 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$ "A" e "B" ou "β"
...	...

3.3 Proposição

Numa base qualquer, o menor número de k algarismo(s) é igual ao 1 seguido de "$k - 1$" zeros e o maior, é constituído por k algarismo(s) igual(is) a $\beta - 1$.

Ex.: Na base 7, o menor número de 4 algarismos é igual a 1000, e o maior é igual a 6666.

3.4 Princípios

3.4.1 Princípio da Numeração Falada

De acordo com o estudo desenvolvido no capítulo 1, esses princípios vão depender da base considerada.

Base dois

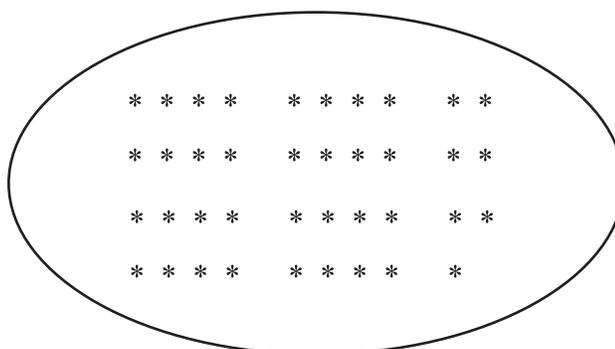
Duas unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

Base três

Três unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.
Obs.: O enunciado dos princípios para outras bases ficará por conta do nosso raciocínio.

3.5 Representação nas Bases não Decimais

Imaginemos que em uma fazenda existam 39 ovelhas, e que uma pessoa tenha resolvido representá-las por um numeral na base quatro.

1º) Representemos inicialmente cada ovelha por um asterisco (*)

2º) Coloquemos inicialmente os elementos (asteriscos) na 1ª ordem

3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
		∗∗∗∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗∗∗∗∗ ∗
		39

3º) Fazendo, na 1ª ordem, cada conjunto de quatro asteriscos igual a um triângulo, teremos na 2ª ordem nove triângulos e sobrarão três asteriscos na 1ª ordem, ou seja,

3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
	△△△ △△△ △△△	∗∗∗
	9	3

4º) Fazendo, na 2ª ordem, cada quatro triângulos igual a um quadrado, teremos na 3ª ordem dois quadrados e sobrará um triângulo na 2ª ordem, ou seja:

3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
□□	△	* * *
2	1	3

Portanto ... $39 = 213$ (base quatro)

3.5.1 Notações

Há várias formas para representarmos um número dado N numa base β.

As principais são:

$$N_\beta, (N)_\beta, N_{(\beta)}, \overline{N}^\beta, \underline{N}_\beta \text{ ou } N_{beta}$$

3.6 Leitura

Lê-se um número não decimal da esquerda para a direita de acordo com o nome dos algarismos, seguido do nome da base.

Ex.:

$213_{(4)}$ - Lê-se: dois, um, três, base quatro.

3.7 Mudanças de Base

1º Caso: Da base decimal para outra qualquer

Observando o que foi desenvolvido anteriormente, vê-se que formar subconjuntos com quatro elementos significa dividir o número inicial de elementos, 39, por 4, bem como os dos subconjuntos obtidos nas outras ordens. Portanto, através das divisões sucessivas, teremos:

```
39*        |4
3*         9△      |4
1º resto   1       2□      |4
           2º resto 2      0
                   3º resto
```

Na prática, tem-se:

```
39 |4
3   9 |4
    1  2
```

ou seja, $39 = 213_{(4)}$

Obs.:

- O 1º resto representa "3" unidades de 1ª ordem (na base 4)
- O 2º resto representa "1" unidade de 2ª ordem (na base 4)
- O 3º resto representa "2" unidades de 3ª ordem (na base 4)

2º Caso: De uma base não decimal para a decimal

Seja $N = (abc \dots ijk)_\beta$ um número com n algarismos. Explicitando-o sob a forma polinômica, teremos:

$$N = a \times \beta^{n-1} + b \times \beta^{n-2} + c \times \beta^{n-3} + \dots + i \times \beta^2 + j \times \beta^1 + k \times \beta^0$$

Ex.: Seja passar o numeral $4213_{(5)}$ para a base dez.

Resolução:

$4213_{(5)} = 4 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0$

$4213_{(5)} = 4 \times 125 + 2 \times 25 + 1 \times 5 + 3 \times 1$

$4213_{(5)} = 500 + 50 + 5 + 3$

Resp. $4213_{(5)} = 558$

3º Caso: De uma base não decimal para outra também não decimal.

1ª) Resolução: Indireta

1º passo: Passa-se para a base dez;

2º passo: Da base dez para a desejada.

Ex.: Transformar o numeral $4213_{(5)}$ para a setenária

Resolução:

1º) $4213_{(5)} = 558$

2º)

$$\begin{array}{llll} 558 & \underline{|7} & & \\ 5 & 79 & \underline{|7} & \\ & 2 & 11 & \underline{|5} \\ & & 4 & 1 \end{array}$$

Resp.: $4213_{(5)} = 1425_{(7)}$

4ª Resolução: Direta

$4213_{(5)} \quad \underline{|7} \quad 4_{(5)} < 7$

então baixa-se a próxima ordem, ou seja,

$42_{(5)} \underline{|7}$

Passa-se, mentalmente, $42_{(5)}$ para a base 10 e divide-se o resultado por 7, ou seja:

$$\begin{array}{llll} 42_{(5)} = 4 \times 5 + 2 = 22_{(10)} & \underline{|7} & \Rightarrow & 4213_{(5)} \quad \underline{|7} \\ 1 & 3 & & 1 \qquad\quad 3 \end{array}$$

A seguir, baixa-se a próxima ordem, ou seja, o algarismo 1.

$$\begin{array}{ll} 4213_{(5)} & \underline{|7} \\ \ \ 11_{(5)} & 3 \end{array}$$

Passa-se, mentalmente, $11_{(5)}$ para a base 10 e divide-se o resultado por 7, isto é:

$$\begin{array}{llllll} 11_{(5)} = 1 \times 5 + 1 = 6_{(10)} & \underline{|7} & \Rightarrow & 4213_{(5)} & \underline{|7} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 6 & 0 & & \ \ 11_{(5)} & 30 \\ & & & \quad 6_{(5)} & \end{array}$$

Baixando a próxima ordem, tem-se:

$$\begin{array}{ll} 4213_{(5)} & \underline{|7} \\ \ \ 11_{(5)} & 30 \\ \ \ 63_{(5)} & \end{array}$$

Passando mentalmente $63_{(5)}$ para a base 10 e dividindo o resultado por 7, tem-se:

$$\begin{array}{ll} 63_{(5)} = 6 \times 5 + 3 = 33_{(10)} & \underline{|7} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 5 & 4 \end{array}$$

A partir daqui, o algoritmo se repete ao dividirmos $304_{(5)}$ por 7.

Resumidamente, teremos:

$$\begin{array}{llll} 4213_{(5)} & \underline{|7} & & \\ \ \ 11_{(5)} & 304_{(5)} & \underline{|7} & \\ \ \ 63_{(5)} & \ \ 14_{(5)} & 21_{(5)} & \underline{|7} \\ \quad 5 & \quad 2 & \ \ 4 & 1 \end{array}$$

O resultado será obtido colocando-se, após o último quociente (1), todos os outros restos (de baixo para cima), ou seja, $1425_{(7)}$.

Portanto, $4213_{(5)} = 1425_{(7)}$.

3.8 Operações

As operações nas bases não decimais são análogas às das decimais. Devemos, entretanto, ter em mente que β unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.

Vejamos as principais operações, ou seja: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

1ª) Operação: Adição

Ex.: Seja efetuar $1011_{(2)} + 110_{(2)}$

1ª) Resolução: Indireta

Nessa resolução, basta transformarmos as parcelas para a base dez, obtermos a soma da mesma e, por fim, passarmos essa soma para a base dois.

Ex.: $1011_{(2)} + 110_{(2)}$

Resolução:

1º)
$$\begin{aligned} 1011_{(2)} &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

2º)
$$\begin{aligned} 110_{(2)} &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 4 + 2 + 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

3º)

$11 + 6 = 17$

4º)

$$\begin{array}{lllll} 17 & \underline{|2} & & & \\ 1 & 8 & \underline{|2} & & \\ & 0 & 4 & \underline{|2} & \\ & & 0 & 2 & \underline{|2} \\ & & & 0 & 1 \end{array}$$

Resp.: $10001_{(2)}$

2ª) Resolução: Direta

1º passo: Dispõe-se as parcelas, uma debaixo da outra, de modo que as ordens coincidam-se, ou seja,

$$\begin{array}{r} 1011_{(2)} \\ +110_{(2)} \\ \hline \end{array}$$

2º passo: Na 1ª ordem temos $(1 + 0 = 1)$

$$\begin{array}{r} 1011_{(2)} \\ +110_{(2)} \\ \hline 1_{(2)} \end{array}$$

3º passo: Na 2ª ordem, temos $(1+1=0)$ e, como duas unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior, levaremos 1 unidade da 2ª para a 3ª , ou seja,

$$\begin{array}{r} 1\phantom{1_{(2)}} \\ 1011_{(2)} \\ +110_{(2)} \\ \hline 01_{(2)} \end{array}$$

4º passo: Na 3ª ordem, temos $(1+0+1=0)$, logo, vai 1 unidade da 3ª para a 4ª ordem, ou seja:

$$\begin{array}{r} 11\phantom{11_{(2)}} \\ 1011_{(2)} \\ +110_{(2)} \\ \hline 001_{(2)} \end{array}$$

5º passo: Na 4ª ordem, temos $(1+1=0)$, logo, vai 1 unidade da 4ª para a 5ª ordem, ou seja,

$$\begin{array}{r} 111\phantom{1_{(2)}} \\ 1011_{(2)} \\ +110_{(2)} \\ \hline 0001_{(2)} \end{array}$$

6º passo: Como na 4ª ordem o 1 não tem a quem ser somado, repetimo-lo na 5ª ordem da soma e, finalmente, teremos:

$$\begin{array}{r} 111\phantom{11_{(2)}} \\ 1011_{(2)} \\ +110_{(2)} \\ \hline 10001_{(2)} \end{array}$$

Resumindo:

$$\begin{array}{ccccc} & \underline{vai1} & \underline{vai1} & \underline{vai1} & \\ & 1 & 0 & 1 & 1_{(2)} \\ & & +1 & 1 & 0_{(2)} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1_{(2)} \end{array}$$

[1]

Resp.: $10001_{(2)}$

[1] Obs.: Vai 1, nesse caso, significa que foi 1 unidade de uma ordem para outra.

2ª) Operação: Subtração

Ex.: Seja efetuar: $1100_{(2)} - 110_{(2)}$

Resolução:

$$\begin{array}{r} 1100_{(2)} \\ -110_{(2)} \\ \hline 0_{(2)} \end{array}$$ uma vez que $(0 - 0 = 0)$

Levando-se uma unidade da 3ª ordem para a 2ª , teremos:

$$\begin{array}{r} 1\phantom{00_{(2)}} \\ 1100_{(2)} \\ -110_{(2)} \\ \hline 10_{(2)} \end{array}$$ Como uma unidade de 3ª ordem equivale a duas de 2ª tem-se $(2-1 = 1)$

Levando-se uma unidade da 4ª ordem, para a 3ª , teremos:

$$\begin{array}{r} 11\phantom{0_{(2)}} \\ 1100_{(2)} \\ -110_{(2)} \\ \hline 0110_{(2)} \end{array}$$

Resp.: $110_{(2)}$

Obs.: Uma unidade de 3ª ordem (no sistema binário), ao retornar à segunda ordem, é igual a duas unidades.

3ª) Operação: Multiplicação

Seja multiplicar $1101_{(2)}$ por $101_{(2)}$

1ª) Resolução: Indireta

a) Passando cada fator para a base 10, teremos:
1º) $1101_{(2)} = 13$
2º) $101_{(2)} = 5$

b) $13 \times 5 = 65$

c) Passando o 65 para a base 2, teremos o numeral $1000001_{(2)}$

2ª) Resolução: Direta

Multiplicando-se normalmente os fatores, teremos:

$$\begin{array}{r} 1101_{(2)} \\ \times 101_{(2)} \\ \hline 1101_{(2)} \\ 00000_{(2)} \\ 110100_{(2)} \end{array}$$

Determinando agora a soma desses produtos parciais, teremos:

$$\begin{array}{r} 1101_{(2)} \\ \times 101_{(2)} \\ \hline 1101_{(2)} \\ 00000_{(2)} \\ +110100_{(2)} \\ \hline 1000001_2 \end{array}$$

Solução: $1000001_{(2)}$

4ª) Operação: Divisão (direta)

Seja dividir $110110_{(2)}$ por $11_{(2)}$

Resolução:

1º) Divide-se os dois primeiros algarismos do dividendo, ou seja, [11] pelo divisor [$11_{(2)}$] encontrando o "1", que é o primeiro algarismo do quociente.

$$\begin{array}{l|l} 110110_{(2)} & 11_{(2)} \\ \cline{2-2} & \quad 1 \end{array}$$

2º) Multiplica-se esse 1º algarismo do quociente pelo divisor [$11_{(2)}$], encontrando $11_{(2)}$ que será colocado abaixo dos dois primeiros algarismos do dividendo, permitindo-nos, assim, determinar o 1º resto parcial "00" [$11_{(2)} - 11_{(2)}$]

$$\begin{array}{l|l} 110110_{(2)} & 11_{(2)} \\ \cline{2-2} \underline{11\quad\quad} & \quad 1 \\ 00 & \end{array}$$

3º) Baixa-se o 3º algarismo do dividendo [0], colocando-o ao lado direito do 1º resto parcial [00], dividindo-o pelo quociente [$11_{(2)}$]. Encontraremos, assim, o 3º algarismo do quociente, ou seja, "0", que multiplicado pelo quociente [$11_{(2)}$] é igual a zero, permitindo-nos, assim, determinar o 2º resto parcial [$0 - 0 = 0$]

```
110110(2)   |11(2)
11            10
000
  0
  0
```

4º) Baixa-se o 4º algarismo do dividendo [1] ao lado direito do 2º resto parcial "0".

```
110110(2)   |11(2)
11            10
000
  0
  01
```

5º) Como esse último resto [1] é menor que [$11_{(2)}$], coloca-se o um "0" para compor o 3º algarismo do quociente e baixa-se o 5º algarismo do dividendo ao lado direito do resto parcial [1], obtendo assim,

```
110110(2)   |11(2)
11            100
000
  0
  011(2)
```

6º) Divide-se a seguir o resto parcial [$11_{(2)}$] pelo divisor [$11_{(2)}$], encontrando assim o "1", que é o 4º algarismo do quociente, ou seja:

```
110110(2)   |11(2)
11            1001
000
  0
  011(2)
```

7º) Multiplicando-se o 4º algarismo do quociente [1] pelo divisor [$11_{(2)}$], obtém-se o produto [$11_{(2)}$], que deve ser colocado abaixo do resto parcial [$011_{(2)}$], isto é:

```
110110(2)   |11(2)
11           1001
000
 0
  011(2)
   11(2)
    0
```

$8^{\underline{o}}$) Finalmente, baixa-se o último algarismo do dividendo "0", divide-se pelo divisor $11_{(2)}$, encontrando assim o "0" (último algarismo do quociente) que, multiplicado pelo divisor $[11_{(2)}]$, gerará o último produto parcial (0), permitindo-nos, assim, determinar o último resto. Portanto, teremos:

```
110110(2)   |11(2)
11          10010(2)
 0
  011(2)
   11(2)
    0
    0
    0
```

Resp.: $Q = 10010_{(2)}$ e $r = 0$

Obs.: A divisão anterior poderá ser efetuada de um modo simples, ou seja:

```
110110(2)   |11(2)
11          10010(2)
 0
  011(2)
   00
    0
```

3.9 Propriedades

$1^{\underline{a}}$) Numa base qualquer β, a potência gerada por (10_β) é igual ao 1 seguido de n zeros nessa mesma base.

$2^{\underline{a}}$) Numa base qualquer β, a potência gerada por (10_β) é, na base 10, igual a β.

$3^{\underline{a}}$) A soma gerada por $[(10_\beta)^n + k]$, $k < \beta$ é, na base 10, igual a $\beta^n + k$.

Obs$_1$.: Se $k = 0$, então $(10_\beta)^n = \beta^n, \quad (\forall\beta)^2$

Obs$_2$.: Se $k = 1$, então $(10_\beta)^n + 1 = \beta^n + 1$, $\forall$ β

3.10 Tópico Complementar - Sistema de Numeração Romana

3.10.1 Introdução

É um sistema de limitadas aplicações. Tais aplicações podem ser encontradas em capítulos de livros, séculos, relógios de paredes, etc.

Os símbolos romanos, em ordem crescente de seus valores, são:

I	V	X	L	C	D	M
(1)	(5)	(10)	(50)	(100)	(500)	(1000)

3.10.2 Regras

1ª) Um traço horizontal colocado sobre um número aumenta mil vezes seu valor, dois traços aumentam um milhão de vezes e assim sucessivamente.
Ex.:

$\overline{V} = 5.000$
$\overline{\overline{V}} = 5.000.000$

Obs.: Os números 1.000, 2.000 e 3.000 não são representados por $\overline{I}$, $\overline{II}$ e $\overline{III}$ e sim por: M, MM e MMM.

2ª) Os símbolos I, X, C e M podem ser escritos, seguidamente, até três vezes.

Ex.: II, XXX, CCC

3ª) Os símbolos I, X e C só podem anteceder um dos dois de maior valor que lhes sucedem a ordem, isto é:

Ex.: I, antes de V ou de X
X, antes de L ou de C
C, antes de D ou de M

Obs.: Nesse caso, subtrai-se o menor do maior.

[2] $\forall$... David Hilbert $(1.862 - 1.943)$.

Ex$_1$.: $\mathsf{IV} = 5 - 1$
Ex$_2$.: $\mathsf{XL} = 50 - 10 = 40$

4ª) Os símbolos C, X e M podem figurar no mesmo número mais de três vezes, desde que seguidamente.

Ex.: XXXIX, CCCXC

5ª) Um símbolo escrito à direita de outro de valor, igual ou maior, tem seu valor somado ao desse outro.

Ex$_1$. $\mathsf{XI} = 10 + 1 = 11$
Ex$_2$. $\mathsf{MV} = 1.000 + 5 = 1.005$
Ex$_3$. $\mathsf{XX} = 10 + 10 = 20$

6ª) Os símbolos V, L e D podem ser escritos seguidamente, desde que estejam com valores diferentes.

Ex.: $\overline{\overline{\mathsf{V}}}\overline{\mathsf{V}}\mathsf{V} = 5.000.000 + 5.000 + 5$

7ª) Apenas os símbolos I, X e C podem ser colocados entre outros de maior valor. Nesse caso, subtrai-se o valor do algarismo do meio do da direita e soma-se esse resultado ao da esquerda.

Ex$_1$. $\mathsf{LIX} = (10 - 1) + 50 = 59$
Ex$_2$. $\mathsf{CXL} = (50 - 10) + 100 = 140$

3.11 Exercícios Resolvidos

1) Escrever o número 527 na base 12.

Resolução:

$$\begin{array}{lll} 527 & \underline{|12} & \\ 47 & 43 & \underline{|12} \\ \underbrace{11}_{B} & 7 & 3 \end{array}$$

Resp.: $37B_{(12}$

2) Escrever na base 10, o número $ABC_{(13)}$

Resolução:

$$\begin{aligned} ABC_{(13)} &= A \times (13)^2 + B \times (13)^1 + C \times (13)^0 \\ ABC_{(13)} &= 10 \times 169 + 11 \times 13 + 12 \times 1 \\ ABC_{(13)} &= 1.690 + 143 + 12 \\ ABC_{(13)} &= 1.845 \end{aligned}$$

3) O número 740 escrito numa base desconhecida é igual ao triplo do número A0 escrito numa base igual ao dobro da primeira. Determinar essa base.

Resolução:

De acordo com os dados, podemos escrever que:

$$740_x = 3 \times [A0_{(2x)}]$$
$$7x^2 + 4x = 3 \times [10 \times 2x + 0]$$
$$7x^2 - 56x = 0$$
$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 8 \end{cases}$$

Resp.: 8.

4) Determinar o valor relativo do algarismo que ocupa a 3ª ordem do numeral $3310_{(4)}$, quando o mesmo for escrito no sistema decimal.

Resolução:

Colocando-o na base 10, teremos:

$$3310_{(4)} = 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 0 \times 4^0$$
$$3310_{(4)} = 3 \times 64 + 3 \times 16 + 1 \times 4 + 0 \times 1$$
$$3310_{(4)} = 192 + 48 + 4 + 0$$
$$3310_{(4)} = 244$$

Portanto, o valor relativo do algarismo das centenas é igual a 200.

5) Determinar o valor de b no numeral $132_{(b)}$, sabendo-se que, na base 10, esse número é igual a 72.

Resolução:

Passando $132_{(b)}$ para a base 10 e igualando a 72, teremos:

$$1 \times b^2 + 3 \times b^1 + 2 \times b^0 = 72$$

$$b^2 + 3 \times b + 2 \times 1 - 72 = 0$$

$$b^2 + 3b - 70 = 0$$

Resolvendo essa equação, teremos: $b' = -10$ e $b'' = 7$

Como não existe base negativa, teremos: $b = 7$.

6) Suponha vários números consecutivos escritos em ordem crescente, na base 5, a partir de $304_{(5)}$. Determinar o 36º número dessa sucessão.

Resolução:

$$\underbrace{304_{(5)}, 310_{(5)}, \ldots, N}_{36 \text{ números}}{}_{(5)} \text{ ou } \underbrace{304_{(5)}, 310_{(5)}, \ldots, N}_{121_{(5)} \text{ números}}{}_{(5)}$$

$$N_{(5)} - 304_{(5)} + 1 = 121_{(5)}$$

$$N_{(5)} = 304_{(5)} - 1 + 121_{(5)}$$

$$N_{(5)} = 424_{(5)}$$

7) Determinar o número de algarismos, na base 7, necessários para enumerarmos um livro de 200 páginas.

1ª Resolução:
$200 = 404_{(7)}$

Sabemos que, na base 7, os algarismos são: $0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. A partir desses dados, teremos:

1º) de $1_{(7)}$ até $6_{(7)} \Rightarrow 6$ páginas de 1 algarismo, ou seja, 6 algarismos;

2º) de $10_{(7)}$ até $66_{(7)} \Rightarrow 42$ páginas de 2 algarismos, ou seja, 84 algarismos;

3º) de $100_{(7)}$ até $404_{(7)} \Rightarrow 152$ páginas de 3 algarismos, ou seja, 456 algarismos

Total: $6 + 84 + 456 = 546$ algarismos

2ª Resolução:

$Q = (404_{(7)} + 1) \times 3 - 111_{(7)} = 1410_{(7)} = 546$

Resp.: 546 algarismos

8) Seja N um numeral com α algarismos iguais a b, onde $b + 1$ seja a sua base. Demonstrar que, na base 10, $N = (b + 1)^{\alpha} - 1$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
N = b_{b+1} \Rightarrow N &= b \times (b+1)^0 \\
N &= b \\
N &= (b+1)^1 - 1 \\
N = bb_{b+1} \Rightarrow N &= b \times (b+1)^1 + b \\
N &= b^2 + 2b \\
N &= (b+1)^2 - 1 \\
N = bbb_{b+1} \Rightarrow N &= b \times (b+1)^2 + b \times (b+1)^1 + b \times (b+1)^0 \\
N &= b^3 + 3b^2 + 3b \\
N &= (b+1)^3 - 1
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, para $N = \overbrace{bbb\ldots b}^{\alpha \text{ algarismos}}{}_{b+1}$, teremos $N = (b+1)^\alpha - 1$

9) Calcular, na base 10, os seguintes números:

a) $333_{(4)}$

b) $2222_{(3)}$

c) $\overbrace{777\ldots7}^{\alpha \text{ algs}}{}_{(8)}$

Resolução:

a) $333_{(4)} = 4^3 - 1 = 64 - 1 = 63$

b) $2222_{(3)} = 3^4 - 1 = 81 - 1 = 80$

c) $\overbrace{777\ldots7}^{\alpha \text{ algs}}{}_{(8)} = 8^\alpha - 1 = 2^{3\alpha} - 1$

10) Determinar o algarismo das unidades do quociente gerado pela divisão de $\overbrace{333\ldots3}^{100 \text{ algs}}{}_{(4)}$ por $\underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ algs}}{}_{(2)}$, quando o mesmo for escrito no sistema decimal.

Resolução:

$$\frac{\overbrace{333\ldots3}^{100 \text{ algs}}{}_{(4)}}{\underbrace{111\ldots1}_{100 \text{ algs}}{}_{(2)}} = \frac{4^{100} - 1}{2^{100} - 1} = \frac{(2^{100})^2 - 1^2}{2^{100} - 1} = \frac{(2^{100} + 1)(2^{100} - 1)}{2^{100} - 1} = 2^{100} + 1$$

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$

$\vdots$

$2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$

Como todas as bases cujo algarismo das unidades é o 6, geram potências em que o algarismo das unidades também é o 6, conclui-se que:

$$16^{25} = \ldots\ldots 6$$
$$\underline{+1}$$
$$7$$

Portanto, o algarismo procurado é o 7.

11) Provar que em todo sistema de numeração de base b, $b > 2$, o numeral 121_b gera, na base 10, um quadrado perfeito.

Resolução:

Passando 121_b para a base 10, teremos:

$$121_b = 1 \times b^2 + 2 \times b^1 + 1 \times b^0 = b^2 + 2 \times b + 1 = (b+1)^2 \ldots \quad \text{c. q. d}$$

12) Provar que $111_{(b)}$ divide $10101_{(b)}$

Resolução:

Sabemos que uma divisão diz-se exata quando o resto for igual a zero. Portanto, teremos dois passos a seguir:

$1^{\underline{o}}$) passar os dois termos para a base 10;
$2^{\underline{o}}$) efetuar a divisão, convenientemente.

$$1^{\underline{o}})\frac{10101_{(b)}}{111_{(b)}} = \frac{1 \times b^4 + 0 \times b^3 + 1 \times b^2 + 0 \times b^1 + 1 \times b^0}{1 \times b^2 + 1 \times b^1 + 1 \times b^0}$$
$$= \frac{b^4 + b^2 + 1}{b^2 + b + 1}$$

$2^{\underline{o}}$)

$$\begin{array}{l|l} b^4 + 0 \times b^3 + b^2 + 0 \times b^1 + 1 & b^2 + b + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-b^4 \quad - b^3 - b^2} & b^2 - b + 1 \\ \quad -b^3 + 0 \times b^2 + 0 \times b + 1 & \\ \underline{\quad +b^3 \quad + b^2 \quad + b} & \\ \quad +b^2 \quad + b \quad + 1 & \\ \underline{\quad -b^2 \quad - b \quad - 1} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

3.12 Exercícios Propostos

1) Escreva na base binária os seguintes números expressos no sistema de numeração decimal:

a) 32	e) 48	i) 35	m) 26	q) 315	u) 213
b) 14	f) 24	j) 628	n) 129	r) 311	v) 631
c) 29	g) 69	k) 1728	o) 704	s) 1030	x) 3215
d) 18	h) 625	l) 13	p) 71	t) 201	

2) Escreva na base decimal os seguintes números expressos no sistema de numeração binária:

a) 101	e) 10011	i) 100100	m) 110010000
b) 1001	f) 100010	j) 10100111	n) 1111100010
c) 10	g) 11001	k) 1110000	o) 1001110100
d) 10001	h) 101011	l) 110010	p) 100001010

3) Escreva na base binária os seguintes números expressos no sistema de numeração quaternária:

a) 311 b) 2130 c) 1030 d) 1122 e) 201 f) 2001

4) Escreva na base senária os seguintes números expressos na numeração decimal:

a) 43 b) 118 c) 1250 d) 12 e) 514

5) Escreva na base octanária os seguintes números expressos na numeração decimal:

a) 24 b) 62 c) 30 d) 832 e) 872

6) Escreva na base decimal os seguintes números expressos no sistema de numeração octanária:

a) 16 b) 157 c) 67 d) 1254 e) 3215 f) 41 h) 256 i) 405 j) 63

7) No sistema de base 6, o número 321 escreve-se:

a) 12533 b)1253 c) 33521 d) 3521

8) O sistema de numeração quinária emprega somente os algarismos:

a) $0, 1, 2, 3$ e 5 b) $1, 2, 3, 4$ e 5 c) $1, 2, 3$ e 4 d) $0, 1, 2, 3$ e 4

9) O numeral na base dez de 121 (base cinco), é:

a) 12 b) 36 c) 21 d) 44

10) Num conjunto com 38 elementos, a contagem na base 5 gera o seguinte numeral:

a) 19 b) 123 c) 76 d) 138

11) Qual das afirmações abaixo não relaciona o número 32?

a) $(40)_5$ b) $(1012)_3$ c) $(200)_4$ d) $(100000)_2$

12) O número 41 pode ser expresso por:

a) $(101)_4$ b) $(131)_5$ c) $(112)_3$ d) $(2210)_4$

13) O número 29, quando escrito na base 3, ficará representado por:

a) 1020 b) 2001 c) 1002 d) 2100

14) Qual resultado de $[10^3 : (2 \times 10^2)]$ no sistema de numeração de base 5?

a) $(01)_5$ b) $(10)_5$ c) $(0005)_5$ d) $(5000)_5$

15) O resultado da subtração $(1340)_6 - (1333)_4$, na base 9, é:

a) 256 b) 265 c) 277 d) 722

16) Na base 5, o numeral 121 corresponde, na base 10, ao número:

a) 12 b) 36 c) 21 d) 44

17) Dado o numeral romano MMDLXXVI, transforme-o num numeral de base 4.

a) $(7141)_4$ b) $(100100)_4$ c) $(220100)_4$ d) $(10100)_4$

18) Transponha o numeral $(11101)_2 \times (36)_7$ para base 8.

a) $(7141)_8$ b) $(1471)_8$ c) $(4171)_8$ d) $(1417)_8$

19) Um número é representado por 1213 no sistema de base 5. No sistema de base 2, ele será representado por:

a) 11101101 b) 10011011 c) 10110111 d) 111001101

20) No sistema de base 6, o número 4.729 se escreve:

a) 12533 b) 1253 c) 33521 d) 3521

21) O número decimal que corresponde a 12012, no sistema de base 3, é:

a) 18 b) 420 c) 140 d) 1212

22) Passando o número 19 (na base 10) para a base 3, obtém-se:

a) 102 b) 201 c) 140 d) 210

23) Mudando o número 347 da base 8 para a base 5, obtém-se:

a) 114 b) 1141 c) 411 d) 1411

24) O número 103, na base 10, corresponde ao número 403, na base:

a) 4 b) 6 c) 5 d) 7

25) O número $(1021)_4$ equivale, na base 10, ao número:

a) 62 b) 85 c) 73 d) 97

26) Um número no sistema de base 2 é representado por 1010. No sistema de base 7, esse número será igual a:

a) 10 b) 21 c) 13 d) 31

27) Entre as opções abaixo, a única falsa é:

a) $7 = 111_{(2)}$ b) $21 = 10101_{(2)}$ c) $4 = 100_{(2)}$ d) $10 = (1011)_{(2)}$
e) $8 = 1000_{(2)}$

28) O número binário 101010 (base 2), escrito na base 5, é:

a) 132 b) 321 c) 231 d) 345 e) 312

29) O número 15383 está escrito no sistema de numeração decimal. Escreva esse número no sistema duodecimal.

30) Passe o número $(A437)_{12}$ para o sistema decimal.

31) Escreva no sistema senário o número $(3528)_{12}$.

32) Supondo que os números 6542; 5134 e 351 estão na base 7, efetue a adição na base 7 e forneça o resultado nessa mesma base.

33) Determine a diferença entre 849 e 3A7 no sistema duodecimal.

34) Efetue a multiplicação entre $(5253)_7$ e $(425)_7$, dando a solução nesta mesma base.

35) Passe o número 48.215 do sistema decimal para o de base 8.

36) Passe o número 6.764 do sistema decimal para o de base 12.

37) Passe o número 3B4A do sistema de base 12 para o decimal .

38) Passe o número 4A9A do sistema de base 11 para o decimal .

39) Passe o número 5487 do sistema de base 9 para o de base 8.

40) Passe o número 1252246 do sistema de base 7 para o de base 12.

41) Efetue as seguintes operações que estão no sistema binário, sem passar pelo sistema decimal:

a) $10001 + 100010 + 10101$.
b) $1011 + 111 + 100000$.
c) $11000 + 11100 + 11000$.
d) $1110 + 1011 + 1111$.
e) $1011001 + 10100101$.
f) $1011001 + 10100101 + 10110$.
g) $110 + 11101 + 1101 + 10011$.
h) $101110011 + 110100101$.
i) $100111 + 10111 + 101 + 1111$.
j) $100111 - 10110$.
k) $1011 - 101$.
l) $111011 - 11011$.
m) $1111011 - 1001111$.
n) $1010101 - 111011$.
o) $1110 - 1011$.
p) $11110 - 1111$.
q) $101010 - 1010$.
r) $11111 - 10111$.
s) $1110101 - 101010$.
t) $1010010 - 10101$.
u) $101010 - 10101$
v) $11011 - 101$.

42) Efetue as seguintes operações (supondo as mesmas no sistema binário), sem passar pelo sistema decimal:

a) 1101×11101
b) 10111×10011
c) 11111×10010
d) 110110×10010
e) 1110111×11011
f) 11110×101
g) 10101×110010
h) 10011×1111111
i) 10101×1101101
j) 101101×110011
k) $110011 \div 11$
l) $1111001 \div 1011$
m) $10111000 \div 100$
n) $10010111 \div 11$
o) $10010110 \div 101$
p) $1111 \div 11$

43) Adicione, no sistema de base 9, os seguintes números: 12345, 1234, 123.

44) Adicione, no sistema de base 6, os seguintes números: 51423, 35421, 42503, 20351.

45) Subtraia 35243 de 54132, no sistema de base 6.

46) Subtraia 9A5846 de 15A3721, no sistema de base 11.

47) Multiplique 8A97A por 47, no sistema de base 11.

48) Multiplique 35426 por 425, no sistema de base 7.

49) Divida 342836 por 86, no sistema de base 9.

50) Divida 14542005 por 245, no sistema de base 7.

51) Divida 42AB583 por 584, no sistema de base 12, dando o quociente e o resto.

52) Passe o número 151737 do sistema de base 8 para o de base 12, pelo processo direto.

53) Passe o número 3AB1 do sistema de base 12 para o de base 11, pelo processo direto.

54) Calcule a seguinte expressão, no sistema de base 5.

$21321 - \{(13 + 1442 : 23) \times 4 - 21 \times 13\} \times 243.$

Obs.: Essa expressão está na base 5.

55) Determine a base X, sabendo que: $(136)_X - (121)_X = (153)_X - (136)_X$

56) Determine a base do sistema de numeração em que 73 (base decimal) se escreve 243.

57) Em que sistema de numeração 216(base10) se escreve 1000?

58) O número $(346)_7$ é escrito em outro sistema por 91. Qual a base deste sistema?

59) A soma dos números $543_{(Y)}$ e $241_{(Y)}$ é, no sistema decimal, igual a 304. Determine a base em que estão escritos.

60) Se multiplicarmos $17_{(Y)}$ por $23_{(Y)}$, obtemos $435_{(Y)}$. Determine Y.

61) Multiplicando 21 por 23 numa certa base, encontramos o número 523. Determine essa base.

62) Qual a base do sistema de numeração em que 243 é o quadrado de 16?

63) O quadrado de 23 numa certa base é 613 (mesma base). Determine-a.

64) Em que base está escrito o número 10301, sabendo que na base 8 é representado por 1275?

65) Determine o valor de x, sabendo que:

a) $122_{(x)} - 63_{(x)} = 151_{(x)} - 122_{(x)}$
b) $46_{(x)} : 23_{(x)} = 91_{(x)} : 46_{(x)}$
c) $129_{(x)} - 102_{(x)} = 155_{(x)} - 129_{(x)}$
d) $33_{(x)} : 15_{(x)} = 66_{(x)} : 33_{(x)}$

66) Represente no sistema decimal, o número de unidades que varia o número 134_6, quando se intercala um zero entre os algarismos 1 e 3.

67) O número 7543 está escrito na base 8. Qual é o resto da sua divisão por 8?

68) Qual é o menor número do sistema decimal que tem k algarismos? E o maior?

69) Escreva, em numeração decimal, o maior número que se escreve com três algarismos no sistema de base 13.

70) Escreva, em numeração decimal, o maior número que se escreve com três algarismos no sistema de base 11.

71) Um livro possui 50 páginas. Para enumerá-las, usando o sistema de base 8, quantos algarismos serão necessários?

72) Para escrever, no sistema de numeração de base 8, todos os números de dois algarismos, serão necessários quantos algarismos?

73) Um livro de 200 páginas vai ser enumerado no sistema de base 8. Qual o número de algarismos na base "dez"a serem utilizados?

74) Calcule, na base 2, as potências abaixo:

a) $[101_{(2)}]^{10_{(2)}}$
b) $[111_{(2)}]^{11_{(2)}}$

75) Escrevendo-se, sucessivamente, a partir de 1, todos os números na base 8, qual o algarismo que ocupará a octogésima posição?

76) Ao enumerar um caderno no sistema de base 7, um aluno contou 456 algarismos. Qual o penúltimo algarismo por ele escrito?

77) Dado o número $N = 111\dots11_{(2)}$ expresso com k algarismos iguais a 1. A potência gerada por N^2, na base 2, terá:

a) $2k$ uns;
b) k uns e k zeros;
c) k uns e $k-1$ zeros;
d) $k-1$ uns e k zeros;
e) $k-1$ uns e $k-1$ zeros.

78) Se $A = \overbrace{888\dots8}^{\alpha \text{ algs}}{}_{(9)}$ e $B = \overbrace{222\dots2}^{\alpha \text{ algs}}{}_{(3)}$, então $\dfrac{A-B}{B}$ é igual a:

a) 3 b) 3^{α} c) $3^{\alpha+1}$ d) $3^{\alpha-1}$ e) 1

79) Calcule, na base 6, a soma dos 36 primeiros números nessa base, ou seja:
$1_6 + 2_6 + 3_6 + \dots$

80) Considere um sistema de numeração, que usa os algarismos indo-arábicos e o valor posicional do algarismo no numeral e que numera as ordens da esquerda para a direita.

Por exemplo: no número 3452 tem-se:
$1^{\underline{a}}$ ordem: 3
$2^{\underline{a}}$ ordem: 4
$3^{\underline{a}}$ ordem: 5
$4^{\underline{a}}$ ordem: 2

Além disso, cada 7 unidades de uma ordem forma 1 unidade de ordem imediatamente a direita.

Com base nesse sistema, coloque (E) quando a operação for efetuada erradamente e (C) quando efetuada corretamente.

Lendo o resultado final da esquerda para a direita, encontramos:

245	620	360
-461	$+555$	$\times 4$
543	416	543
( )	( )	( )

Assinale a alternativa correta:

a) (E) (E) (E)
b) (E) (C) (C)
c) (C) (E) (C)
d) (C) (C) (E)
e) (C) (C) (C)

81) Determine o número, na base 7, que dividido por $53_{(7)}$ gera quociente $36_{(7)}$ e resto $45_{(7)}$.

82) Se 432_8 é igual a 189_n, calcule n.

83) Determine x nos seguintes casos:

a) $611_{(x)} = 365_{(x+2)}$

b) $416_{(2x)} = 3 \times 330_{(x+1)}$

84) Expresse 8888_n na base $2n$.

a) 1248 b) 1334 c) 1428 d) 1532 e) 1343

85) Admita x e b inteiros positivos. Suponha que x seja representado por 324 na base b e seja representado por 155, na base $b+2$. Calcule b.

86) Na base três, a representação de x é 12112211122211112222. O primeiro dígito da representação de x na base nove é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

87) O produto gerado por $12 \times 15 \times 16$, onde cada fator está escrito na base b, é igual a 3146 (base b). Sendo $S = 12 + 15 + 16$, onde cada parcela também é expressa na base b, calcule S, na base b.

a) 43 b) 44 c) 45 d) 46 e) 47

88) O número N, quando expresso na base $b+1$, é igual ao numeral $bbbb$. Se $N = Q \times (Q-2)$, determine Q na base $b+1$.

a) 101 b) 10b c) 111 d) 1b1 e) nenhuma

89) Um número m, quando escrito na base c ($c > 11$), é igual à ab, onde a é $c-4$ e b é 9. Determine m, expressando a resposta na base $c-2$.

a) 87 b) 92 c) 105 d) 113 e) nenhuma

90) Considere que b e c sejam inteiros maiores que 1. Na base b, c^2 é igual a 10. Então b^2, quando escrito na base c é:

a) 100 b) 101 c) 1010 d) 1000 e) 10000

91) Suponha que x seja representado por um número de dois dígitos ab na base 8 e que $x = a^2 + b^2$, também. Qual é o valor de b?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

92) Um inteiro N, expresso na base b, é igual a 6789. Se N é um múltiplo de $b-1$ e, b é menor que 16, qual é o sucessor de b?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

93) Se N, escrito na base 2, é igual a 11000, qual é, na base 2, o inteiro imediatamente antes de N?

a) 100001 b) 10010 c) 10011 d) 10110 e) 10111

94) Se o inteiro n, maior que 8, é solução da equação $x^2 - ax + b = 0$, e a representação de a no sistema de numeração de base n é 18, qual é a representação de b na base n?

a) 18 b) 28 c) 80 d) 81 e) 280

95) Se $(532)_b$ é o quádruplo de $(148)_b$; $b > 1$, pode-se afirmar que:

a) $1 \leq b \leq 5$ b) $6 \leq b \leq 10$ c) $11 \leq b \leq 15$ d) $16 \leq b \leq 20$ e) $21 \leq b$

96) Sejam b, c e d, números inteiros positivos, que representam bases maiores ou iguais a 2. Determine o menor valor de d, sabendo que $xx_{(b)} \times xx_{(c)} = x^2x^2_{(d)}$, onde x seja um dígito admissível nas três bases.

97) A expressão 32, base b, representa o mesmo número que 21, base c, enquanto que a expressão 21, base b, representa o mesmo que o número 13, base c. Determine b.

98) No sistema de base 26 é usado letras do alfabeto que são números:

$\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B} = 1, \quad \mathsf{C} = 2, \quad \mathsf{D} = 3, \ldots, \mathsf{X} = 23, \quad \mathsf{Y} = 24, \quad \mathsf{Z} = 25.$

Nesse sistema, determine: NAVAL + EPCAR

a) PRXCC b) RXRCC c) RPXBC d) PCRXX e) RPXCC

99) Escreva com símbolos romanos, os seguintes números:

a) 9	g) 900
b) 11	h) 2.001
c) 40	i) 200.000
d) 44	j) 303.303
e) 46	k) 7.000.409
f) 405	l) 654.798.321

100) Escreva em algarismos arábicos os números:

a) VII	f) $\overline{\mathrm{CCIV}}\mathrm{VI}$
b) XXXIX	g) $\overline{\overline{\mathrm{D}}}\mathrm{DCXXIX}$
c) XCI	h) $\overline{\overline{\mathrm{VI}}\mathrm{XL}}\mathrm{XXXI}$
d) CXLIV	i) $\overline{\mathrm{CMIII}}\mathrm{X}$
e) CCIII	

101) Retirando-se o símbolo romano .... do número MCDXLIV, obtém-se o maior número possível de ser escrito com os algarismos restantes, na mesma ordem.

102) Retirando a letra "L" do número MMCXLVII, de quantas unidades diminui esse número?

103) Trocando-se as posições das letras "C" e "M" no número CMXLIII, ele aumenta ou diminui? De quantas dezenas?

Respostas

1)
a) 100000
b) 1110
c) 11101
d) 10010
e) 110000
f) 11000
g) 1000101
h) 1001110001
i) 100011
j) 1001110100
k) 11011000000
l) 1101
m) 11010
n) 10000001
o) 1011000000
p) 1000111
q) 100111011
r) 100110111
s) 10000000110
t) 11001001
u) 11010101
v) 1001110111
w) 110010001111

2)
a) 5
b) 9
c) 2
d) 17
e) 19
f) 34
g) 25
h) 43
i) 36
j) 167
k) 112
l) 50
m) 400
n) 994
o) 628
p) 266

3)
a) 53
b) 156
c) 76
d) 90
e) 33
f) 129

4) **a)** $111_{(6)}$
b) $314_{(6)}$
c) $5442_{(6)}$
d) $20_{(6)}$
e) $2214_{(6)}$

5) **a)** $30_{(8)}$
b) $76_{(8)}$
c) $36_{(8)}$
d) $1500_{(8)}$
e) $1550_{(8)}$

6) **a)** 14
b) 111
c) 55
d) 684
e) 1677
f) 33
g) 174
h) 261
i) 51

7) **b**
8) **d**
9) **b**
10) **b**
11) **a**
12) **b**
13) **c**
14) **b**
15) **b**
16) **b**
17) **c**
18) **d**
19) **c**
20) **c**
21) **c**
22) **b**
23) **d**
24) **c**
25) **c**
26) **c**
27) **d**
28) **a**
29) $(8A9B)_{12}$
30) **17899**
31) $(43252)_6$
32) $(15360)_7$
33) $(462)_{12}$
34) $(3245151)_7$
35) $(136127)_8$
36) $(3AB8)_{12}$
37) **81.898**
38) **6.643**
39) $(7720)_8$
40) $(7AB5A)_{12}$

41) **a)** $(1001000)_2$
b) $(110010)_2$
c) $(1001100)_2$
d) $(101000)_2$
e) $(11111110)_2$
f) $(100010100)_2$
g) $(1000011)_2$
h) $(1100011000)_2$
i) $(1010010)_2$
j) $(10001)_2$
k) $(110)_2$
l) $(100000)_2$
m) $(10100)_2$
n) $(11010)_2$
o) $(11)_2$
p) $(111)_2$
q) $(100000)_2$
r) $(1000)_2$
s) $(1001011)_2$
t) $(111101)_2$
u) $(10101)_2$
v) $(10110)_2$

42) **a)** 101111001
b) 110110101
c) 1000101110
d) 1111001100
e) 110010001101
f) 10010110
g) 10000011010
h) 100101101101
i) 100011110001
j) 100011110111
k) 1001
l) 1011
m) 1011110
n) 1100101
o) 11110
p) 101

43) $13713_{(9)}$
44) $234542_{(6)}$
45) $14445_{(6)}$
46) $6A8986_{(11)}$
47) $3875074_{(11)}$
48) $22456252_{(7)}$
49) $205530_{(9)}$
50) $42621_{(7)}$
51) $q = 8B35$; $r = 427$
52) 2747B
53) 5093
54) 1
55) 8
56) 5
57) 6
58) 20
59) 6
60) 8
61) 6
62) 11
63) 6
64) 5
65) **a)** 7
b) 11
c) 11
d) 7
66) 180
67) 3
68) 10^{k-1} e $10^k - 1$
69) 2.196
70) 1.330
71) 93
72) 112
73) 530
74) **a)** $11001_{(2)}$
b) $101010111_{(2)}$
75) 5
76) 3
77) b
78) b
79) $3030_{(6)}$
80) e
81) $3042_{(7)}$
82) 13
83) **a)** 7 **b)** 4
84) a
85) 5
86) e
87) b
88) a
89) c
90) e
91) b
92) e
93) e
94) c
95) c
96) 11
97) 5
98) c
99) **a)** IX
b) XI
c) XL
d) XIX
e) XVI
f) CDV
g) CM
h) MMI
i) $\overline{\mathrm{CC}}$
j) $\overline{\mathrm{CCCIII}}\mathrm{CCCIII}$
k) $\overline{\overline{\mathrm{VII}}\mathrm{CDIX}}$
l) $\overline{\overline{\mathrm{DCLIV}}\mathrm{DCCXCVIII}}\mathrm{CCCXXI}$

100) **a)** 7
b) 39
c) 91
d) 44
e) 203
f) 204.006
g) 500.629
h) 6.040.031
i) 903.010

101) **C**

102) 30

103) **Aumenta;** 200

Capítulo 4

Teoria dos Números Primos em $\mathbb{N}$

4.1 Introdução

4.2 Múltiplo de um Número Natural

É cada um dos produtos que se obtém, multiplicando-se o número N *por outro natural qualquer*.

Representaremos o conjunto dos múltiplos de um número natural N por:

Múlt.N; $M(N)$ ou $\dot{N}$[1]

Como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, teremos para múltiplo de N os números:

$$\{N \times 0,\ N \times 1,\ N \times 2,\ N \times 3, \ldots\},$$

isto é,

$$\dot{N} = \{0, N, 2N, 3N, \ldots\}$$

Ex.: Seja determinar os múltiplos de 3.

$3 \times 0 = 0,\ 3 \times 1 = 3,\ 3 \times 2 = 6, \ldots,$

portanto:

[1] $\dot{N}$ - Notação devida a K. F. Gauss.

$\dot{3} = \{0, 3, 6, \ldots\}$

4.3 Múltiplos Comuns

São números que pertencem simultaneamente ao conjunto dos múltiplos de dois ou mais números dados.

Representaremos o conjunto dos múltiplos comuns de dois ou mais números naturais por M_c.

Ex$_1$. Determinar os múltiplos comuns de 3 e 4.

$\dot{3} = \{\mathbf{0}, 3, 6, 9, \mathbf{12}, 15, 18, 21, \mathbf{24}, 27, 30, 33, \mathbf{36}, 39\}$

$\dot{4} = \{\mathbf{0}, 4, 8, \mathbf{12}, 16, 20, \mathbf{24}, 28, 32, \mathbf{36}, 40, 44, \ldots\}$.

Determinando a intersecção, teremos:

$M_c = \{\mathbf{0}, \mathbf{12}, \mathbf{24}, \mathbf{36}, \ldots\}$

4.4 Divisores de um Número Natural

São números que dividem exatamente um número natural dado.

Representaremos o conjunto dos divisores de um número natural N por $D_{(N)}$.

Ex.: Seja determinar todos os divisores exatos de 20.

O 1 é divisor de 20, pois, $20 : 1 = 20 \Rightarrow$ resto zero

O 2 é divisor de 20, pois, $20 : 2 = 10 \Rightarrow$ resto zero

O 4 é divisor de 20, pois, $20 : 4 = 5 \Rightarrow$ resto zero

O 5 é divisor de 20, pois, $20 : 5 = 4 \Rightarrow$ resto zero

O 10 é divisor de 20, pois, $20 : 10 = 2 \Rightarrow$ resto zero

O 20 é divisor de 20, pois, $20 : 20 = 1 \Rightarrow$ resto zero

Portanto, teremos:

$D_{(20)} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

4.5 Divisores Comuns

São os números que dividem simultaneamente dois ou mais números dados. O conjunto dos divisores comuns de dois ou mais números naturais será denotado por D_c.

Ex.: Determinar o(s) divisor(es) natural (is) exato(s) comum(ns) dos números:

a) 3 e 7 b) 5 e 8 c) 30 e 18

a) $D_{(3)} = \{1;3\}$
$D_{(7)} = \{1;7\}$
$D_c = \{1\}$

b) $D_{(5)} = \{1;5\}$
$D_{(8)} = \{1;2;4;8\}$
$D_c = \{1\}$

c) $D_{(30)} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$
$D_{(18)} = \{1,2,3,6,9,18\}$
$D_c = \{1;2;3;6\}$

4.6 Número Primo

É todo número "p", maior do que 1, que possui apenas dois divisores naturais: 1 e p.

Ex.:
O 2 é primo pois, $D_{(2)} = \{1;2\}$
O 3 é primo pois, $D_{(3)} = \{1;3\}$
O 4 não é primo pois, $D_{(4)} = \{1,2,4\}$
O 5 é primo pois, $D_{(5)} = \{1;5\}$

Observações:

1ª) *O 2 é o único número par que é primo.*
2ª) *A sucessão dos números primos P é ilimitada e não há "fórmula"que os gere.*

Como exemplo podemos citar alguns elementos.

$P = \{2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots\}$.

4.6.1 Reconhecimento de um Número Primo

Para reconhecermos se um número maior do que 2 é primo, devemos seguir os seguintes passos:

1º) *dividimos o número dado N pela sucessão de números primos;*

$$\begin{array}{l|l} N & 2 \\ \cline{2-2} r_1 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} N & 3 \\ \cline{2-2} r_2 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} N & 5 \\ \cline{2-2} r_3 & q_3 \end{array}$$

2º) *enquanto o resto for diferente de zero e o quociente maior que o divisor, nada se pode afirmar e prosseguimos a pesquisa*;

3º) *quando o quociente se tornar menor ou igual ao divisor e o resto permanecer diferente de zero, então se pode afirmar que o número dado é primo*.

Ex.: Verificar se os números 23, 53 e 187 são primos.

a)
$$\begin{array}{c|l} 23 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 11 > 2 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 23 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 7 > 3 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 23 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 4 < 5 \\ \neq 0 & \end{array}$$

Conclusão: *O número* 23 *é primo*.

b)
$$\begin{array}{c|l} 53 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 26 > 2 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 53 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 17 > 3 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 53 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 10 < 5 \\ \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} 53 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 7 = 7 \\ \neq 0 & \end{array}$$

Conclusão: *O número* 53 *é primo*.

c)
$$\begin{array}{c|l} 187 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 93 > 2 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 187 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 62 > 3 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 187 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 37 < 5 \\ \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} 187 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 26 > 7 \\ \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 187 & 11 \\ \cline{2-2} 0 & 17 > 11, \end{array} \quad \text{mas o resto é igual a } 0$$

Conclusão: *O número* 187 *não é primo*.

4.7 Princípio

"*A sucessão dos números primos é ilimitada*".

Seja p um número primo qualquer e P o produto de todos os números primos, de 2 até p.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p = P$.

Somando 1 até P, teremos o número $P + 1$, que poderá ou não ser primo.

Se $P + 1$ for primo, o princípio está demonstrado.

Se $P+1$ não for primo, terá um divisor primo maior que p, pois os números primos de 2 até p, sendo divisores de P, não poderiam dividir $P + 1$, pois P e $P + 1$ são primos entre si.

Ex.:

$2 \times 3 = 6 + 1 = 7$; 7 é primo.

$2 \times 3 \times 5 = 30 + 1 = 31$; 31 é primo.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 + 1 = 211$; 211 é primo.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2.310 + 1 = 2.311$; 2.311 é primo.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 30.030 + 1 = 30.031$; 30.031 é primo.

$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510.510 + 1 = 510.511 = \mathbf{19} \times 26.869$.

19 é um número primo maior que 17.

4.8 Crivo de Erathóstenes

É possível determinar uma seqüência de números primos, a partir de 2, menores do que um número dado. Para isso, devemos empregar um procedimento ensinado por Erasthóstenes [2], cuja regra é a seguinte:

– escrevem-se todos os números naturais, a partir de 2, até o número considerado;

– a partir de 2, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 2;

– a partir de 3, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 3;

– a partir de 5, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 5;

– a partir de 7, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 7;

Procede-se desse modo, até cancelarmos todos os múltiplos do 1º número cujo quadrado seja maior do que o último número dado.

Ex.: Seja determinar a sucessão de todos os números primos, na sucessão dos números naturais, de 2 até 100.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	94	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

[2]Erasthóstenes – Matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, poeta e atleta grego ($276 - 194$ a.c), nascido em Cirene, atual Líbia.

4.9 Tabela dos Números Primos Menores que 1.000

2	101	211	307	401	503	601	701	809	907
3	103	223	311	409	509	607	709	811	911
5	107	227	313	419	521	613	719	821	919
7	109	229	317	421	523	617	727	823	929
11	113	233	331	431	541	619	733	827	937
13	127	239	337	433	547	631	739	829	941
17	131	241	347	439	557	641	743	839	947
19	137	251	349	443	563	643	751	853	953
23	139	257	353	449	569	647	757	857	967
29	149	263	359	457	571	653	761	859	971
31	151	269	367	461	577	659	769	863	977
37	157	271	373	463	587	661	773	877	983
41	163	277	379	467	593	673	787	881	991
43	167	281	383	479	599	677	797	883	997
47	173	283	389	487		683		887	
53	179	293	397	491		691			
59	181			499					
61	191								
67	193								
71	197								
73	199								
79									
83									
89									
97									

4.10 Números Primos Entre Si

Dois ou mais números são ditos primos entre si [3] *quando o seu único divisor comum for a unidade.*

Ex$_1$. 3 e 5 *são primos entre si.*

[3] ou Primos Relativos

Verificação: $\begin{cases} D_3 = \{1,3\} \\ D_5 = \{1,5\} \end{cases} \Rightarrow D_c = \{1\}$

Ex$_2$. 4 e 9 *são primos entre si.*

Verificação: $\begin{cases} D_4 = \{1,2,4\} \\ D_9 = \{1,3,9\} \end{cases} \Rightarrow D_c = \{1\}$

Ex$_3$. 4; 8 e 15 *são primos entre si.*

Verificação: $\begin{cases} D_4 = \{1,2,4\} \\ D_8 = \{1,2,4,8\} \\ D_{15} = \{1,3,5,15\} \end{cases} \Rightarrow D_c = \{1\}$

Obs.: 6 e 8 *não são primos entre si.*

Verificação: $\begin{cases} D_6 = \{1,2,3,6\} \\ D_8 = \{1,2,4,8\} \end{cases} \Rightarrow D_c = \{1,2\}$

Vê-se, que além do 1, temos também o número 2, o que contraria a definição de números primos entre si.

4.10.1 Algumas Propriedades

1ª) *Dois números naturais sucessivos são sempre primos entre si.*

2ª) *As potências de dois ou mais números primos entre si também são números primos entre si.*

3ª) *Se dentre vários números naturais, dois deles forem primos entre si, então todos eles serão também números primos entre si.*

4ª) *Se dois números* a *e* b *forem primos entre si, a soma e o produto deles serão sempre números primos entre si.*

5ª) *Se* a *e* b *são dois números naturais quaisquer* ($\neq 0$)*, os números* b *e* $a \times b + 1$ *são sempre primos entre si.*

6ª) *Os números* a; $a+1$ *e* $2a+1$ *são sempre primos entre si, dois a dois.*

7ª) *Um número ímpar qualquer* ($\neq 1$) *e a metade de seu sucessivo são sempre primos entre si.*

8ª) *Dois números* a *e* b*, cuja soma seja um número primo* p*, são primos entre si.*

9ª) *Dois números ímpares consecutivos* a *e* b *são sempre primos entre si.*

4.11 Decomposição em Fatores Primos

Decompor um número em fatores primos significa obter uma multiplicação onde todos os fatores sejam necessariamente primos e o produto deles seja igual ao número dado.

Ex.: Seja decompor o número 360 em fatores primos.

$360 = 2 \times 180$; $180 = 2 \times 90$;
$360 = 2 \times 2 \times 90$; $90 = 2 \times 45$;
$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$; $45 = 3 \times 15$;
$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$; $15 = 3 \times 5$;
$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ou
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

4.12 Teorema Fundamental da Aritmética

"Todo número natural não primo é igual a uma multiplicação de um, e apenas um, conjunto de números primos". .

Seja N esse número dado.

Se N não é primo, terá um divisor primo a_1, ou seja, $N = N_1 \times a_1$.

Se N_1 não for primo, $N_1 = N_2 \times a_2$; $a_2 \geq a_1$, pois a_1 também é divisor de N e a_1 era o seu menor divisor.

Seguindo este raciocínio, obtém-se os números $N_3, N_4, \ldots, N_p$, em ordem decrescente, onde N_p é primo e $a_3, a_4, \ldots, a_p$, primos em ordem crescente, onde o maior é $a_p = N_p$.

Assim sendo, teremos $N = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_p$.

Esta decomposição é única!

Admitamos, por hipótese, que haja outra, ou seja $N_1 = b_1 \times b_2 \times b_3 \times b_4 \times \cdots \times b_p$.

Se b_1 divide N então b_1 divide um dos fatores de N. Como todos os fatores são primos, um deles será igual a a_1. Como este é o menor, só pode ser igual ao menor dos b; daí, $a_1 = b_1$.

De modo análogo, chegaremos à conclusão que:

$N_1 = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_p$ e $N_1 = b_1 \times b_2 \times b_3 \times b_4 \times \cdots \times b_p$.

4.13 Forma Canônica

Genericamente, para um número natural N, teremos:

Regra

1º passo: Decompõe-se N em fatores primos.

$$
N \left| \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a \\ a \\ a \\ \vdots \end{array} \right\} \alpha \text{ fatores} \\ \left. \begin{array}{l} b \\ b \\ b \\ \vdots \end{array} \right\} \beta \text{ fatores} \\ \left. \begin{array}{l} c \\ c \\ c \\ \vdots \end{array} \right\} \gamma \text{ fatores} \end{array} \right.
$$

Daí, $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots$ que é a forma canônica[4] de N.

Ex.: Decompor e por na forma canônica o número 360.

[4]Do latim canon, que significa "padrão".

360	2	$\rightarrow$	Primeiro fator primo divisor de 360
180	2		
90	2		
45	3	$\rightarrow$	Segundo fator primo divisor de 360
15	3		
5	5	$\rightarrow$	Terceiro fator primo divisor de 360
1			

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \rightarrow$ forma canônica

4.14 Condição Geral de Multiplicidade

A condição necessária e suficiente para que um número N *seja múltiplo de outro* N' *é que* N *contenha todos os fatores primos de* N' *com os expoentes maiores ou iguais.*

Demonstração:

A condição é necessária porque se N for múltiplo de N', então $N = N' \times k$, portanto N possuirá os fatores de N' com os mesmos expoentes ou maiores, se entre os fatores de k houver algum contido em N.

A condição é suficiente porque se N possuir todos os fatores primos de N' com os expoentes maiores ou iguais que os de N', poderão ser associados e, então, N será decomposto em uma multiplicação de N' por outro fator.

Ex.: Verificar se:

a) 128 é múltiplo de 16.

128	2		16	2
64	2		8	2
32	2		4	2
16	2		2	2
8	2		1	
4	2			
2	2			
1				

$128 = 2^7$ e $16 = 2^4$

Conclusão: 128 é múltiplo de 16.

b) 64.800 é múltiplo de 288

64.800	2
32.400	2
16.200	2
8.100	2
4.050	2
2.025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$64800 = 2^5 \times 3^4 \times 5^2$ e $288 = 2^5 \times 3^2$

Conclusão: 64.800 é múltiplo de 288.

4.15 Propriedades dos Quadrados e dos Cubos Perfeitos

1ª Propriedade: *A condição necessária e suficiente para que um número natural seja quadrado perfeito é que o(s) expoente(s) obtido(s) na decomposição em fatores primos do mesmo seja(m) múltiplo(s) de 2.*

Demonstração:

Seja $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots$ um número natural que foi decomposto em fatores primos.

Se N é um quadrado perfeito, então $N^2 = (a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots)^2$

Expelindo-se os parênteses, teremos:

$N^2 = a^{2\alpha} \times b^{2\beta} \times c^{2\gamma} \times \dots$ c. q. d

Exemplos:

1) Verificar se os números 129.600 e 18.000 são quadrados perfeitos.

a) 129.600

$$\begin{array}{r|l} 129.600 & 2 \\ 64.800 & 2 \\ 32.400 & 2 \\ 16.200 & 2 \\ 8.100 & 2 \\ 4.050 & 2 \\ 2.025 & 3 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$129.600 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$

Conclusão: Como todos os expoentes são múltiplos de 2, o número dado é um quadrado perfeito.

b) 18.000

$$\begin{array}{r|l} 18.000 & 2 \\ 9.000 & 2 \\ 4.500 & 2 \\ 2.250 & 2 \\ 1.125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$18.000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

Conclusão: O número dado não é um quadrado perfeito, pois o expoente do fator primo 5 é um número ímpar.

2) Determinar o *menor* número pelo qual devemos multiplicar 9.000, a fim de obtermos um *quadrado perfeito*.

Resolução:

$9.000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$

Observe que 9.000 não é quadrado perfeito e, para torná-lo, devemos multiplicar 2^3 por 2 e, de modo análogo, 5^3 por 5. Ora, multiplicar por 2 e por 5 significa multiplicá-lo por 2×5. Daí, o menor número procurado é o 10.

2ª Propriedade: *A condição necessária para que um número natural seja um cubo perfeito é que o(s) expoente (s) obtido(s) na decomposição em fatores primos do mesmo seja(m) múltiplo(s) de* 3 .

Demonstração:

Seja $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots$ um número natural decomposto em fatores primos.

Se N^3 é um cubo perfeito, então, $N^3 = (a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots)^3$.

Eliminando-se os parênteses, teremos:

$N^3 = a^{3\alpha} \times b^{3\beta} \times c^{3\gamma} \times \ldots$ c. q. d

Ex$_1$. Verificar se os números abaixo são cubos perfeitos os 216.000 e 81.000:

a) 216.000

216.000	2
108.000	2
54.000	2
27.000	2
13.500	2
6.750	2
3.375	3
1.125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$216.000 = 2^6 \times 3^3 \times 5^3$

Conclusão: Como todos os expoentes anteriores são múltiplos de 3, o número dado é um cubo perfeito.

b) 81.000

81.000	2
40.500	2
20.250	2
10.125	3
3.375	3
1.125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$$81000 = 2^3 \times 3^4 \times 5^3$$

Conclusão: Como o 4 (expoente do fator primo 3) não é múltiplo de 3, o número dado não é um cubo perfeito.

Ex$_2$. No exemplo anterior, determinar:

a) o menor número pelo qual devemos multiplicá-lo, a fim de obtermos um cubo perfeito;

b) o menor número pelo qual devemos dividi-lo, a fim de obtermos um cubo perfeito.

Resolução:

$$81.000 = 2^3 \times 3^4 \times 5^3$$

a) Devemos multiplicá-lo por 3^2, ou seja, por 9.

b) Devemos dividi-lo por 3.

Teorema:

A condição necessária para que um número seja quadrado e cubo perfeito, simultaneamente, é que o(s) expoente(s) obtido(s) na decomposição em fatores primos do mesmo seja(m) múltiplo(s) de 2 e 3 ou seja, múltiplo de 6.

Demonstração:

Seja $N^2 = a^{2\alpha} \times b^{2\beta} \times c^{2\gamma} \times \dots$ um quadrado perfeito obtido em certa decomposição. Para torná-lo um cubo perfeito, teremos que elevá-lo ao cubo, logo:

$(N^2)^3 = (a^{2\alpha} \times b^{2\beta} \times c^{2\gamma} \times \dots)^3$ ou $N^6 = a^{6\alpha} \times b^{6\beta} \times c^{6\gamma} \times \dots$ c. q. d

Ex$_1$. Verificar se o número 46.656 é um cubo perfeito.

Resolução:

46.656	2
23.328	2
11.664	2
5.832	2
2.916	2
1.458	2
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$46.656 = 2^6 \times 3^6$

Conclusão: O número dado é um quadrado e também um cubo perfeito.

Ex$_2$. Achar o menor número pelo qual devemos multiplicar $8 \times 27 \times 625$, a fim de obtermos um produto que seja, simultaneamente, quadrado e cubo perfeitos?

Resolução:

$8 \times 27 \times 625 = 2^3 \times 3^3 \times 5^4$

Para obtermos o 6 em cada expoente, devemos multiplicar o segundo membro por $2^3 \times 3^3 \times 5^2$, ou seja, $8 \times 27 \times 25$, cujo produto é 5.400.

4.16 Determinação dos Divisores de um Número Natural

4.16.1 1º modo: Por decomposição em fatores primos

1º passo: Decompõe-se N em fatores primos.

$$\begin{array}{c|l} N & \left.\begin{array}{l} a \\ a \\ a \\ \vdots \end{array}\right\} \alpha \text{ fatores} \\ & \left.\begin{array}{l} b \\ b \\ b \\ \vdots \end{array}\right\} \beta \text{ fatores} \\ & \left.\begin{array}{l} c \\ c \\ c \\ \vdots \end{array}\right\} \gamma \text{ fatores} \end{array}$$

2º passo: Coloca-se uma barra vertical à direita do(s) fator(es) obtido(s) na decomposição e o 1 à direita e um pouco acima dessa barra, pois o 1 é divisor de qualquer número.

$$\begin{array}{c|c|l} & & 1 \\ N & a & \\ & a & \\ & a & \\ & \vdots & \\ & b & \\ & b & \\ & b & \\ & \vdots & \\ & c & \\ & c & \\ & c & \\ & \vdots & \end{array}$$

3º passo: Multiplica-se o primeiro fator primo a por 1 e, sucessivamente, o(s) fator(es) primo(s) seguinte(s) pelo(s) produto(s) obtido(s) anteriormente, tendo o cuidado de não obter produtos (divisores) anteriormente repetido(s).

$$
\begin{array}{r|c|l}
 & & 1 \\
N & a & a \times 1 = a \\
 & a & a \times a = a^2 \\
 & a & a \times a^2 = a^3 \\
 & \vdots & \\
 & b & b \times 1 = b, b \times a = b', b \times a^2 = b'' \\
 & b & b \times b = b^2, b \times b' = ?, b \times b'' = ?, b \times b''' = ? \\
 & b & b \times b^2 = b^3, \ldots \\
 & \vdots & \\
 & c & c \times 1, c \times a, c \times a^2, c \times a^3, \ldots, c \times b, c \times b', \ldots \\
 & c & \\
 & c & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Ex$_1$. Determinar todos os divisores de 72.

$$
\begin{array}{r|c|l}
 & & 1 \\
72 & 2 & 2 \times 1 = 2 \\
36 & 2 & 2 \times 2 = 4 \\
18 & 2 & 2 \times 4 = 8 \\
9 & 3 & 3 \times 1 = 3,\ 3 \times 2 = 6,\ 3 \times 4 = 12,\ 3 \times 8 = 24 \\
3 & 3 & 3 \times 3 = 9,\ 3 \times 6 = 18,\ 3 \times 12 = 36,\ 3 \times 24 = 72 \\
1 & & \text{Assim, temos: } D_{(72)} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}
\end{array}
$$

Ex$_2$. Calcular todos os divisores de a^α, supondo a um número primo e $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{array}{l|c|l}
 & & 1 \\
a^\alpha & a & a \\
a^{\alpha-1} & a & a^2 \\
a^{\alpha-2} & a & a^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & a^{\alpha-1} \\
a & a & a^\alpha \\
1 & &
\end{array}
$$

Ex$_3$. Determinar o número de divisores naturais de a^α.

$$D(a^\alpha) = \{1, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{\alpha-1}, a^\alpha\} \Rightarrow n.d(a^\alpha) = \alpha + 1$$

4.16.2 2º modo: Através das potências dos fatores primos

a) Decompõe-se o número dado N em fatores primos, pondo-o na forma canônica, ou seja:

$$a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots$$

b) Determina-se os divisores de $a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots$, ou seja:

$$D(a^\alpha) = \{a^0, a^1, a^2, \dots a^\alpha\}$$

$$D(b^\beta) = \{b^0, b^1, b^1, \dots b^\beta\}$$

$$D(c^\gamma) = \{c^0, c^1, c^2, \dots c^\gamma\}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

c) Multiplicam-se:

1º) todas as potências de a^α por todas as de b^β;

$$a^0 \times b^0, a^0 \times b^1, a^0 \times b^2, \dots a^0 \times b^\beta, a^1 \times b^0, a^1 \times b^1, a^1 \times b^2, \dots$$
$$a^1 \times b^\beta, a^2 \times b^0, a^2 \times b^1, a^2 \times b^2, \dots a^\alpha \times b^\beta.$$

2º) todos os produtos obtidos anteriormente por todas as potências de c^γ e, assim, sucessivamente, até obtermos o último (maior) divisor.

Ex.: Determinar todos os divisores de 360.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1;$$

$$D(2^3) = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\} = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$D(3^2) = \{3^0, 3^1, 3^2\} = \{1, 3, 9\}$$

$$D(5^1) = \{5^0, 5^1\} = \{1; 5\}$$

$1 \times \mathbf{1} = 1; 1 \times 3 = \mathbf{3}; 1 \times 9 = \mathbf{9}; 2 \times 1 = \mathbf{2}; 2 \times 3 = \mathbf{6}; 2 \times 9 = \mathbf{18}; 4 \times 1 = \mathbf{4};$
$4 \times 3 = \mathbf{12}; 4 \times 9 = \mathbf{36}; 8 \times \mathbf{1} = 8; 8 \times 3 = \mathbf{24}; 8 \times 9 = \mathbf{72}.$

$\mathbf{1} \times 1 = \mathbf{1}; \mathbf{3} \times 1 = \mathbf{3}; \mathbf{9} \times 1 = \mathbf{9}; \mathbf{2} \times 1 = \mathbf{2}, \mathbf{6} \times 1 = \mathbf{6}; \mathbf{18} \times 1 = \mathbf{18}; \mathbf{4} \times 1 = \mathbf{4};$

$\mathbf{12}\times 1 = \mathbf{12}$; $\mathbf{36}\times 1 = \mathbf{36}$; $\mathbf{8}\times 1 = \mathbf{8}$; $\mathbf{24}\times 1 = \mathbf{24}$; $\mathbf{72}\times 1 = \mathbf{72}$; $\mathbf{1}\times 5 = \mathbf{5}$; $\mathbf{3}\times 5 = \mathbf{15}$; $\mathbf{9}\times 5 = \mathbf{45}$; $\mathbf{2}\times 5 = \mathbf{10}$; $\mathbf{6}\times 5 = \mathbf{30}$; $\mathbf{18}\times 5 = \mathbf{90}$; $\mathbf{4}\times 5 = \mathbf{20}$; $\mathbf{12}\times 5 = \mathbf{60}$; $\mathbf{36}\times 5 = \mathbf{180}$; $\mathbf{8}\times 5 = \mathbf{40}$; $\mathbf{24}\times 5 = \mathbf{120}$; $\mathbf{72}\times 5 = \mathbf{360}$.

Em ordem crescente, teremos:

$$D(360) = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360}\}$$

4.17 Quantidade de Divisores de um Número Natural

Teorema:

A quantidade de divisores de um número natural N *é dada pelo produto dos sucessivos de todos os expoentes de seus fatores primos.*

Demonstração:

Sabemos que, se $N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \ldots$, então:

$D(a^{\alpha}) = \{a^0, a^1, a^2, \ldots a^{\alpha}\}$, ou seja, $(\alpha + 1)$ divisores;

$D(b^{\beta}) = \{b^0, b^1, b^2, \ldots b^{\beta}\}$, ou seja, $(\beta + 1)$ divisores;

$D(c^{\gamma}) = \{c^0, c^1, c^2, \ldots c^{\gamma}\}$, ou seja, $(\gamma + 1)$ divisores.

Multiplicando-se agora os $\alpha + 1$ divisores da $1^{\underline{a}}$ linha pelos $\beta + 1$ divisores da segunda e, em seguida, os $[(\alpha+1)\times(\beta+1)]$ divisores anteriores pelos $(\gamma+1)$ divisores da $3^{\underline{a}}$ e, assim, sucessivamente, obteremos a quantidade, $Q_{D(N)}$, de divisores de N, ou seja:

$$Q_{D(N)} = (\alpha + 1) \times (\beta + 1) \times (\gamma + 1) \times \ldots \quad \text{c . q. d}$$

Ex$_1$. Determinar a quantidade de divisores de 360.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

$Q_{D(360)} = (3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$

Obs.: A quantidade de divisores de um número natural N é um número par, exceto quando o(s) expoente(s) do(s) fator(es) obtido(s) na decomposição em fatores primos de N for(em) número(os) par(es).

4.17.1 Determinação da Quantidade de Divisores Ímpares e da Quantidade de Divisores Pares, de um Número Natural

Seja $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times d^\delta \times \ldots$ a decomposição de um número em fatores primos, onde o fator a seja igual a 2. A partir desses dados, podemos calcular esses divisores. Vejamos:

a) Quantidade de Divisores Naturais Ímpares - Q_{Di}

De acordo com o que foi visto em 2.6.6 ($2^{\underline{a}}$), sabemos que todas as potências de números ímpares são números ímpares, portanto, a quantidade de divisores ímpares de $b^\beta, c^\gamma, d^\delta, \ldots$ será, $\beta+1$, $\gamma+1$, $\delta+1, \ldots$ respectivamente.

Multiplicando-se entre si $\beta+1$, $\gamma+1$, $\delta+1, \ldots$ teremos:

$Q_{Di(N)} = (\beta+1) \times (\gamma+1) \times (\delta+1) \times \ldots$

Conclusão: *Para determinarmos a quantidade de divisores ímpares de um número* N*, basta somarmos* 1 *ao(s) expoente(s) de cada fator primo ímpar e calcularmos o produto deles.*

b) Quantidade de Divisores Naturais Pares - Q_{Dp}

Nesse cálculo, basta determinarmos a diferença entre a $Q_{D(N)}$, quantidade de divisores de N, e a quantidade de divisores ímpares, $Q_{Di(N)}$, de N, ou seja:

$Q_{Dp(N)} = Q_{D(N)} - Q_{Di(N)}$

$Q_{Dp(N)} = (\alpha+1) \times (\beta+1) \times (\gamma+1) \times \cdots - [(\beta+1) \times (\gamma+1) \times (\delta+1) \times \ldots]$

$Q_{Dp(N)} = (\beta+1) \times (\gamma+1) \times (\delta+1) \times \cdots \times [(\alpha+1) - 1]$

$Q_{Dp(N)} = \alpha \times (\beta+1) \times (\gamma+1) \times (\delta+1) \times \ldots$

Conclusão: *Para determinarmos a quantidade de divisores pares, basta multiplicarmos o expoente do fator primo par pelo número de divisores ímpares.*

Ex.: Sendo $N = 360$, determinar:

a) a quantidade de divisores ímpares $Q_{Di(360)}$

b) a quantidade de divisores pares $Q_{Dp(360)}$

Resolução:

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

a) $Q_{Di(360)} = (2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 = 6$

b) $Q_{Dp(360)} = 3 \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$

4.18 Produto dos Divisores de um Número Natural

Teorema:

O produto dos divisores de um número natural N *é dado pela raiz quadrada do número* N*, elevado ao número de divisores de* N.

Demonstração:

Seja $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots$ a decomposição de um número natural N em fatores primos.

Analisemos inicialmente a multiplicação envolvendo os divisores de a^α.

$P_{D(a^\alpha)} = 1 \times a^1 \times a^2 \times \cdots \times a^{\alpha-2} \times a^{\alpha-1} \times a^\alpha \ldots$(I) ou ainda

$P_{D(a^\alpha)} = a^\alpha \times a^{\alpha-1} \times a^{\alpha-2} \times \cdots \times a^2 \times a^1 \times 1 \ldots$(II)

Multiplicando (I) por (II), teremos:

$[P_{D(a^\alpha)} \times P_{D(a^\alpha)}] =$
$(1 \times a^\alpha) \times (a^1 \times a^{\alpha-1}) \times (a^2 \times a^{\alpha-2}) \times \cdots \times (a^{\alpha-1} \times a^1) \times (a^\alpha \times 1)$

$$[P_{D(a^\alpha)}]^2 = \underbrace{a^\alpha \times a^\alpha \times \cdots \times a^\alpha \times a^\alpha}_{(a+1)\text{ fatores}}$$

$[P_{D(a^\alpha)}]^2 = (a^\alpha)^{\alpha+1}$ ou

extraindo-se a raiz quadrada dos dois membros, teremos:

$P_{D(a^\alpha)} = \sqrt{(a^\alpha)^{\alpha+1}}$ ou ainda,

$P_{D(a^\alpha)} = \left(\sqrt{a^\alpha}\right)^{\alpha+1}$

Sabemos que:

$D(a^{\alpha}) = \{1, a, a^2, \ldots a^{\alpha}\}$....................$(\alpha + 1)$ divisores . . . (I)

$D(b^{\beta}) = \{1, b, b^2, \ldots b^{\beta}\}$.....................$(\beta + 1)$ divisores . . . (II)

$D(c^{\gamma}) = \{1, c, c^2, \ldots c^{\gamma}\}$......................$(\gamma + 1)$ divisores . . . (III)

Multiplicando-se inicialmente todos os divisores de a^{α} por todos os de b^{β}, teremos:

$(1 \times 1), (1 \times b), (1 \times b^2), \ldots (1 \times b^{\beta}); (a \times 1), (a \times b), (a \times b^2), \ldots (a \times b^{\beta});$
$(a^2 \times 1), (a^2 \times b), (a^2 \times b^2), \ldots (a^2 \times b^{\beta}); \ldots (a^{\alpha} \times 1), (a^{\alpha} \times b), (a^{\alpha} \times b^2), \ldots$
$(a^{\alpha} \times b^{\beta})$ ou ainda,

$(1 \times b \times b^2 \times \cdots \times b^{\beta}) \times (1 \times a \times a^2 \times \cdots \times a^{\alpha}) \times (1 \times b \times b^2 \times \cdots \times b^{\beta}) \times \cdots \times$
$(1 \times a \times a^2 \times \cdots \times a^{\alpha}) \times (1 \times b \times b^2 \times \cdots \times b^{\beta}) \times (1 \times a \times a^2 \times \cdots \times a^{\alpha}).$

Obs.: A multiplicação $(1 \times b \times b^2 \times \cdots \times b^{\alpha})$ se repetiu anteriormente como fator $\alpha + 1$ vezes e a outra, ou seja, $(1 \times a \times a^2 \times \cdots \times a^{\alpha})$, $\beta + 1$ vezes.

Como $1 \times b^1 \times b^2 \times \cdots \times b^{\beta} = \left[\sqrt{b^{\beta}}\right]^{\beta+1}$ e $1 \times a^1 \times a^2 \times \cdots \times a^{\alpha} = \left[\sqrt{a^{\alpha}}\right]^{\alpha+1}$ podemos escrever:

$$P_{D(a^{\alpha} \times b^{\beta})} = \underbrace{\left[\sqrt{b^{\beta}}\right]^{\beta+1} \times \left[\sqrt{b^{\beta}}\right]^{\beta+1} \times \cdots \times \left[\sqrt{b^{\beta}}\right]^{\beta+1}}_{(\alpha+1)\text{ fatores}} \times$$

$$\underbrace{\left[\sqrt{a^{\alpha}}\right]^{\alpha+1} \times \left[\sqrt{a^{\alpha}}\right]^{\alpha+1} \times \cdots \times \left[\sqrt{a^{\alpha}}\right]^{\alpha+1}}_{(\beta+1)\text{ fatores}}$$

$$P_{D(a^{\alpha} \times b^{\beta})} = \left[\left(\sqrt{b^{\beta}}\right)^{\beta+1}\right]^{\alpha+1} \times \left[\left(\sqrt{a^{\alpha}}\right)^{\alpha+1}\right]^{\beta+1} \quad \text{ou}$$

$$P_{D(a^{\alpha} \times b^{\beta})} = \left[\left(\sqrt{b^{\beta}}\right)^{(\alpha+1)\times(\beta+1)}\right] \times \left[\left(\sqrt{a^{\alpha}}\right)^{(\alpha+1)\times(\beta+1)}\right] \quad \text{ou ainda}$$

$$P_{D(a^{\alpha} \times b^{\beta})} = \left(\sqrt{a^{\alpha} \times b^{\beta}}\right)^{(\alpha+1)\times(\beta+1)}$$

Estendendo esse raciocínio para $a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \ldots$, inferiremos que:

$$P_{D(a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots)} = \left(\sqrt{a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots}\right)^{(\alpha+1)\times(\beta+1)\times(\gamma+1)\times\ldots}$$

Substituindo $(\alpha+1)\times(\beta+1)\times(\gamma+1)\times\ldots$ por $Q_{D(N)}$ teremos:

$$\mathbf{P_{D(N)}} = \left(\sqrt{\mathbf{N}}\right)^{\mathbf{Q_{D(N)}}} \quad \ldots \quad \text{c. q. d}$$

Ex₁. Determinar o produto de todos os divisores de 8.

$8 = 2^3 \Rightarrow Q_{D(8)} = 3 + 1 = 4$

$P_{D(8)} = (\sqrt{8})^4 = 8^2 = 64$

Ex₂. Determinar o produto de todos os divisores de 72.

$72 = 2^3 \times 3^2 \Rightarrow Q_{D(72)} = (3+1)\times(2+1) = 12$

$P_{D(72)} = (\sqrt{72})^{12} = 72^6 = 141.314.069.504$

4.19 Soma dos Divisores de um Número Natural

Seja $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \ldots$ a decomposição de um número natural N em fatores primos, e $S_{D(a^\alpha)} = 1 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{\alpha-1} + a^\alpha$, a soma de todos os divisores de a^α.

Multiplicando-se por a os dois membros da igualdade anterior, teremos:

$a \times S_{D(a^\alpha)} = a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^\alpha + a^{\alpha+1}$

Somando-se 1 aos dois membros, teremos:

$a \times S_{D(a^\alpha)} + 1 = 1 + a^1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^\alpha + a^{\alpha+1}$ ou

$a \times S_{D(a^\alpha)} = S_{D(a^\alpha)} + a^{\alpha+1} - 1$

$a \times S_{D(a^\alpha)} - S_{D(a^\alpha)} = a^{\alpha+1} - 1$, então,

$S_{D(a^\alpha)} \times (a-1) = a^{\alpha+1} - 1$, donde:

$$S_{D(a^\alpha)} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}$$

Multiplicando-se a soma de todos os divisores de a^α por todos os de b^β, em seguida, o produto obtido por todos os divisores de c^γ, e assim sucessivamente, teremos:

$$[(1+a^1+a^2+\cdots+a^\alpha)\times(1+b^1+b^2+\cdots+b^\beta)]\times(1+c^1+c^2+\cdots+c^\gamma)\times\ldots$$

Como,

$$1+a^1+a^2+\cdots+a^\alpha=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\rightarrow 1+b^1+b^2+\cdots+b^\beta=\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1},$$

$$1+c^1+c^2+\cdots+c^\gamma=\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1},\ldots$$

conclui-se que:

$$\mathbf{S_{D(N)}}=\frac{\mathbf{a^{\alpha+1}-1}}{\mathbf{a-1}}\times\frac{\mathbf{b^{\beta+1}-1}}{\mathbf{b-1}}\times\frac{\mathbf{c^{\gamma+1}-1}}{\mathbf{c-1}}\times\ldots \quad \text{c.q.d.}$$

Obs.: Se, $N=a\times b\times c\times\ldots$ então,

$$S_{D(N)}=\frac{a^{1+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{1+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{1+1}-1}{c-1}\times\ldots$$

$$S_{D(N)}=\frac{a^2-1}{a-1}\times\frac{b^2-1}{b-1}\times\frac{c^2-1}{c-1}\times\ldots$$

$$S_{D(N)}=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}\times\frac{(b+1)(b-1)}{b-1}\times\frac{(c+1)(c-1)}{c-1}\times\ldots$$

Simplificando convenientemente, teremos:

$$S_{D(N)}=(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\ldots$$

Exemplos:

1) Determinar a soma dos divisores de 27.

$27=3^3$ daí,

$$S_{D(27)}=\frac{3^{3+1}-1}{3-1}=\frac{3^4-1}{2}=\frac{80}{2}=40$$

2) Determinar a soma dos divisores de 360.

$360=2^3\times 3^2\times 5^1$

$$S_{D(360)}=\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\times\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\times\frac{5^{1+1}-1}{5-1}=\frac{2^4-1}{1}\times\frac{3^3-1}{2}\times\frac{5^2-1}{4}$$

$$S_{D(360)}=\tfrac{15}{1}\times\tfrac{26}{2}\times\tfrac{24}{4}=1.170$$

3) Determinar a soma dos divisores de 30.

$30=2\times 3\times 5$

$$S_{D(30)}=(2+1)\times(3+1)\times(5+1)=3\times 4\times 6=72$$

4.20 Soma dos Divisores Ímpares e Soma dos Divisores Pares de um Número Natural

1º) Soma dos Divisores Ímpares

Seja N um número decomponível em fatores primos da forma $a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \ldots$, onde apenas o fator primo a seja igual 2.

Sabendo-se que somente o produto da(s) potência(s) de dois números ímpares é um número ímpar, então, podemos afirmar que:

$$\mathbf{S_{Di(N)} = \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \ldots}$$

2º) Soma dos Divisores Pares

Excluindo da soma dos divisores de N a soma dos divisores ímpares, teremos, é claro, a soma dos divisores pares, portanto, se:

$S_{Dp(N)} = S_{D(N)} - D_{Di(N)}$, então,

$$S_{Dp(N)} = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \cdots - \left[\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \ldots\right]$$

Colocando-se $\dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \ldots$ em evidência, teremos:

$$S_{Dp(N)} = \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \cdots \times \left[\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} - 1\right] \quad \text{ou}$$

$$S_{Dp(N)} = \frac{a^{\alpha+1}-a}{a-1} \times \left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \ldots\right) \quad \text{ou ainda}$$

$$\mathbf{S_{Dp(N)} = \frac{a(a^{\alpha}-1)(b^{\beta+1}-1)(c^{\gamma+1}-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)} \times \ldots}$$

4.21 Quantidade de Números Primos com um Número Natural N e Menores do que N

Teorema:

A quantidade $\varphi(N)$[5] *de números primos com um número natural* N *e menores do que* N *é igual ao produto gerado por:*

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} \times b^{\beta-1} \times c^{\gamma-1} \times \cdots \times (a-1) \times (b-1) \times (c-1) \times \ldots$$

onde $a, b, c, \ldots$ *são fatores primos de* N.

Demonstração:

Seja $N = a^{\alpha-1} \times b^{\beta-1} \times c^{\gamma-1} \times \ldots$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ são expoentes dos fatores primos $a, b, c, \ldots$

O conjunto dos números primos entre si com N, menores que N, não poderá conter os múltiplos de $a, b, c, \ldots$

Na sucessão dos números naturais, temos:

1º) Múlts. $a = \left\{a \times 1, a \times 2, a \times 3, \ldots a \times \frac{N}{a}\right\}$ ou seja, $\frac{N}{a}$ números;

2º) Múlts. $b = \left\{b \times 1, b \times 2, b \times 3, \ldots b \times \frac{N}{b}\right\}$ ou seja, $\frac{N}{b}$ números;

3º) Múlts. $c = \left\{c \times 1, c \times 2, c \times 3, \ldots c \times \frac{N}{c}\right\}$ ou seja, $\frac{N}{c}$ números.

Suprimindo-se de N os $\frac{N}{c}$ múltiplos de a, teremos: $N - \frac{N}{a}$ ou

$\varphi(N) = N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right)$ primos com a, menores que N, não divisíveis por N

Dentre os múltiplos de b, temos também múltiplos de a, por exemplo, $b \times \frac{N}{b}$, e esses já foram eliminados nos múltiplos de a, logo, a quantidade de números naturais primos com b contidos na sucessão $1, 2, 3, \frac{N}{b} \ldots$, será $\frac{N}{b} \times \left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Retirando-se os múltiplos de b de $N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right)$, teremos:

$\varphi(N) = N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) - \frac{N}{b} \times \left(1 - \frac{1}{a}\right)$ ou

[5] φ... Letra grega que Euler($1.707 - 1.783$) utilizou para homenagear Fídias (498 a.c–432 a.c), escultor grego que utilizava o segmento áureo com muita freqüência em suas obras.

$\varphi(N) = N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right)$, ou seja, primos menores que N não divisíveis por a ou por b.

Dentre os múltiplos de c, temos números que são também múltiplos de a ou b, por exemplo, $c \times \frac{N}{c}$, e esses também já foram elididos.

A quantidade de números múltiplos de b que ainda sobraram estão contidos na sucessão $1, 2, 3, \frac{N}{c} \ldots$, ou seja,

$\frac{N}{c} \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Retirando-se os múltiplos de c de $N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right)$, teremos:

$N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right) - \frac{N}{c} \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right)$ ou

$N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right) \times \left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Para $N = a \times b \times c \times \cdots \Rightarrow \varphi(N) = N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right) \times \left(1 - \frac{1}{c}\right) \times \ldots$

Substituindo N por $a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \ldots$, teremos:

$\varphi(N) = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right) \times \left(1 - \frac{1}{c}\right) \times \ldots$ ou

$\varphi(N) = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \cdots \times \left(\frac{a-1}{a}\right) \times \left(\frac{b-1}{b}\right) \times \left(\frac{c-1}{c}\right) \times \ldots$ ou

$$\boldsymbol{\varphi(N) = a^{\alpha-1} \times b^{\beta-1} \times c^{\gamma-1} \times \cdots \times (a-1) \times (b-1) \times (c-1) \times \ldots}$$

Observações:

1ª) Se N for um número primo a, teremos:

$\varphi(N) = a^{1-1} \times (a-1)$ ou seja:

$\varphi(N) = a - 1$

2ª) Se $N = a \times b \times c \times \ldots$, onde $a, b, c, \ldots$ forem primos, teremos:

$\varphi(N) = a^{1-1} \times b^{1-1} \times c^{1-1} \times (a-1) \times (b-1) \times (c-1)$, ou seja:

$\varphi(N) = (a-1) \times (b-1) \times (c-1) \times \ldots$

3ª) Se $N = a^{\alpha}$, então,

$\varphi(N) = a^{\alpha-1} \times (a-1)$

4.22 Soma dos números primos com N e menores que N

Teorema:

A soma de todos os números primos com N *menores que* N *é igual ao semi-produto de* N *por* $\varphi(N)$.

Representaremos a soma de todos os números primos com N e menores que N por ΣP.

Demonstração:

Sejam $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, em ordem crescente, todos os números primos entre si com N menores que N.

Como o menor primo com N é o 1 e, o maior é $N-1$, então o conjunto, P, de todos os números primos com N e menores que N é dado por:

$P = \{1, p_1, p_2, \ldots, N-1\} \ldots$ (I)

Sabemos que se N e p forem primos entre si, com $N > p$, então N e $N-p$ também serão primos entre si. Portanto, os elementos em (I) podem ser expressos por:

$P = \{N-(N-1), \ldots, N-p_3, N-p_2, N-1\} \ldots$ (II)

A partir de (I) e (II), podemos escrever a seguinte igualdade:

$$1+p_2+p_3+\cdots+N-1 = (N-(N-1))+\cdots+(N-p_3)+(N-p_2)+(N-1)$$

Observando que no 2º membro existem $\varphi(N)$ parcelas iguais a N, teremos:

$$\underbrace{1+p_2+p_3+\cdots+N-1}_{\Sigma P} = \underbrace{(N+N+N+\cdots+N)}_{N\times\varphi(N)} - \underbrace{(N-1)+\cdots+p_3+p_2+1}_{\Sigma P}$$

$$2\times\Sigma P = N\times\varphi(N)$$

$$\Sigma P = \frac{N\times\varphi(N)}{2} \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

4.22.1 Casos Particulares

1º) N é um número primo.

$$\Sigma P = \frac{N\times\varphi(N)}{2}$$

Como $\varphi(N) = N - 1$, então $\Sigma P = \dfrac{N \times (N-1)}{2}$

2º) $N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \dots$

$\Sigma P = \dfrac{N \times \varphi(N)}{2}$

$$\Sigma P = \frac{a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \cdots \times a^{\alpha-1} \times b^{\beta-1} \times c^{\gamma-1} \times \cdots \times (a-1) \times (b-1) \times (c-1) \times \dots}{2}$$

$$\Sigma P = \frac{a^{2\alpha-1} \times b^{2\beta-1} \times c^{2\gamma-1} \times \cdots \times (a-1) \times (b-1) \times (c-1) \times \dots}{2}$$

Obs.: Se $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 1$

$$\Sigma P = \frac{a \times b \times c \times \cdots \times (a-1) \times (b-1) \times (c-1) \times \dots}{2}$$

3º) $N = a^{\alpha}$

$$\Sigma P = \frac{a^{\alpha} \times a^{\alpha-1} \times (a-1)}{2} \therefore \Sigma P = \frac{a^{2\alpha-1} \times (a-1)}{2}$$

4.23 Teorema

A soma dos expoentes dos fatores primos de N é igual à soma dos expoentes dos fatores primos do produto P dos divisores de N.

Seja $N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \dots$ a forma canônica de um número natural N.

$$P_{D(N)} = \left(\sqrt{N}\right)^{n \cdot d(N)} = N^{\frac{1}{2} n \cdot d(N)} = (a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \dots)^{\frac{1}{2} n \cdot d(N)}$$

$$P_{d(N)} = a^{\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot n \cdot d(N)} \times b^{\frac{1}{2} \cdot \beta \cdot n \cdot d(N)} \times c^{\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot n \cdot d(N)} \times \dots$$

$$\sum_{\mathbf{efp}} = \mathbf{\tfrac{1}{2}}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)(\alpha + \mathbf{1}) \cdot (\beta + \mathbf{1})(\gamma + \mathbf{1}) \times \dots$$

4.24 Tópicos Complementares

4.24.1 Divisores Próprios

É o conjunto dos divisores de um número dado, com exceção dele mesmo.

Ex.: Os divisores próprios [6] de 12 são, respectivamente $1, 2, 3, 4$ e 6.

[6] ou Partes Alíquotas

4.24.2 Número Abundante

É todo número menor que a soma de seus divisores próprios.

Ex.: De acordo com essa definição, 12 é um número abundante, ou seja, $12 < 1 + 3 + 4 + 6$.

4.24.3 Número Defectivo

É todo número maior que a soma de seus divisores próprios.

Ex.: De acordo com a definição, 10 é um número defectivo, ou seja, $10 > 1 + 2 + 5$.

4.24.4 Números Amigos

Dois números são ditos amigos se cada um deles for igual a soma de seus divisores próprios.

Ex.: 220 e 284 são números amigos.

$Dp(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$

$Dp(284) = \{1, 2, , 4, 71, 142\}$

$\Sigma Dp(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

$\Sigma Dp(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

4.24.5 Números Primos Gêmeos

São números primos ímpares cuja diferença é igual a 2.

Exs.: 3 e 5; 5 e 7; 11 e 13, ...

4.24.6 Números Primos de Mersenne

Um número é dito Primo de Mersenne[7] *quando for um número primo gerado por* $2^p - 1$, *supondo* p *um número primo.*

Exs.:
$p = 2 \to 2^2 - 1 = 3$;

[7] Marin Mersenne (1588 – 1648) – Teólogo, filósofo e matemático.

$p = 3 \to 2^3 - 1 = 7;$

$p = 5 \to 2^5 - 1 = 31;$

$p = 7 \to 2^7 - 1 = 127;$

$p = 31 \to 2^{31} - 1 = 2.147.438.647;$

$p = 127 \to 2^{127} - 1 = 170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727$

Obs.: 11 é primo mas $2^{11} - 1 = 2.047$ não é primo.

4.24.7 Lista dos 43 Primeiros Números Primos de Mersenne

Ordem	p	$2^p - 1$	Número de dígitos	Calculado por	Ano
1º	2	3*	1	?	?
2º	3	7**	1	?	?
3º	5	31***	2	?	?
4º	7	127****	3	?	?
5º	13	*****	4	?	?
6º	17	******	6	Pietro Cataldi	1.588
7º	19	*******	6	Pietro Cataldi	1.588
8º	31		10	Euller	1750
9º	61		19	Pervouchine	1.833
10º	89		27	Powers	1.911
11º	107		33	Powers	1.914
12º	127		39	Lucas	1.876
13º	521		157	Robinson	1.952
14º	607		183	Robinson	1.952
15º	1.279		386	Lehmer	1.952
16º	2.203		664	Lehmer	1.952
17º	2.281		687	Lehmer	1.952
18º	3.217		969	Riesel	1.957
19º	4.253		1.281	Hurwitz e Selfridge	1.961
20º	4.423		1.332	Hurwitz e Selfridge	1.961
21º	9.689		2.917	Gillies	1.963
22º	9.941		2.993	Gillies	1.963
23º	11.213		3.376	Gillies	1.963
24º	19.937		6.002	Tuckerman	1.971
25º	21.701		6.533	Noll e Nickel	1.978
26º	23.209		6.987	Noll	1.979
27º	44.497		13.395	Slowinski e Nelson	1.982
28º	86.243		25.962	Slowinski	1982
29º	110.503		33.265	Colquit e Welsh Jr	1.988
30º	132.049		39.751	Slowinski e Gage	1.983

31º	216.091	65.050	Slowinski e Gage	1.985
32º	756.839	22.783	Slowinski e Gage	1.992
33º	859.433	258.716	Slowinski	1.994
34º	1.257.787	378.632	Slowinski	1.996
35º	1.398.269	420.921	Armengaud e Woltman	1.996
36º	2.976.221	895.932	Spence e Woltman	1.997
37º	3.021.377	909.526	Clarkson, Woltman e Kurowski	1.998
38º	6.972.593	2.098.960	Hajratwala, Woltman e Kurowski	1.999
39º	13.466.917	4.053.946	Michael Cameron	2.001
40º	20.996.001	6.320.430	Michael Shafer's	2.003
41º	24.036.583	7.235.733	Josh Findley	2.004
42º	25.964.951	7.816.230	Martin Nowak	2.005
43º	30.402.457	9.152.052	Curtis Cooper e Steeven Boone	2.005

4.24.8 Número Perfeito

É todo número igual à soma de seus divisores próprios.

Ex.: O 6 é um número perfeito[8], pois, $1+2+3=6$.

Ex.: 28 é um número perfeito, pois, $1+2+4+7+14=28$.

Ex.: 496 é um número perfeito, pois, $1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$.

4.24.9 Teorema

Se p *for um número primo e* 2^p-1 *for primo de Mersenne, então* $2^{p-1}\times(2^p-1)$ *é um número perfeito par*.

Demonstração: Como p e 2^p-1, é por definição um número primo, a expressão geral dos números perfeitos pares é dada por (I), onde $a, b, c, \dots$ pertence ao conjunto dos números pares maiores que 2.

De acordo com a definição de números perfeitos, podemos escrever:

$$2^n\times a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\cdots=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+a+a^2+\cdots+a^n)(1+b+b^2+\cdots+b^n)(1+c+c^2+\cdots+c^n)\times\cdots-2^n\times a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\dots$$

$$2^{n+1}\times a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\cdots=(2^{n+1}-1)(1+a+a^2+\cdots+a^\alpha)(1+b+b^2+\cdots+b^\alpha)(1+c+c^2+\cdots+c^\alpha)\times\dots$$

$$(1+a+a^2+\cdots+a^\alpha)(1+b+b^2+\cdots+b^\alpha)(1+c+c^2+\cdots+c^\alpha)\times\cdots=\frac{2^{n+1}\times a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\dots}{2^{n+1}-1}$$

[8] Questão em aberto: Existem números perfeitos ímpares? Ninguém ainda os encontrou.

$(1+a+a^2+\cdots+a^\alpha)(1+b+b^2+\cdots+b^\alpha)(1+c+c^2+\cdots+c^\alpha)\times\cdots=$
$a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\cdots+\dfrac{a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\ldots}{2^{n+1}-1}\ldots$ (II)

Se o 1º membro da igualdade anterior é um número natural, será necessário que $\dfrac{a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\ldots}{2^{n+1}-1}$ gere também um número natural e mais, como o termo do segundo membro, ou seja, $a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\ldots$ faz parte também do 1º membro, que aparecerá ao multiplicarmos os últimos termos dos polinômios dentro dos parênteses, será necessário que $\dfrac{a^\alpha\times b^\beta\times c^\gamma\times\ldots}{2^{n+1}-1}$ contenha todos os outros termos desenvolvidos no primeiro membro. Como na expressão (I) o menor valor de n é igual a 1, o denominador $2^{n+1}-1$ será maior ou igual a 3 e, por conseqüência, igual ao número de termos do desenvolvimento do 1º membro é, no máximo, igual a 2, é necessário que se tenha $(\alpha+1)\times(\beta+1)\times(\gamma+1)\times\cdots=2$. Esta igualdade só poderá existir, se um dos expoentes, α, por exemplo, for igual a 1. Para que isso ocorra é necessário que β, $\gamma,\ldots$ sejam todos iguais a zero. Do exposto, a igualdade II ficará:

$1+a=a+\dfrac{a}{2^{n+1}-1}\therefore a=2^{n+1}-1.$

Ora, se a é um número primo, então $2^{n+1}-1$ também será um número primo.

Vê-se pois que os números procurados são da forma $2^n\times(2^{n+1}-1)\ldots$(III)

Finalmente, fazendo em III, $n+1=p$, teremos $2^{p-1}\times(2^p-1)\ldots$ c.q.d.

Ex$_1$.: $p=2\Rightarrow 2^{2-1}\times(2^2-1)=2^1\times3=6$

Ex$_2$. $p=3\Rightarrow 2^{3-1}\times(2^3-1)=2^2\times7=28$

Ex$_3$. $p=5\Rightarrow 2^{5-1}\times(2^5-1)=2^4\times31=496$

Ex$_4$. $p=7\Rightarrow 2^{7-1}\times(2^7-1)=2^6\times127=8.128$

Ex$_5$. $p=13\Rightarrow 2^{13-1}\times(2^{13}-1)=33.550.336$

Ex$_6$. $p=17\Rightarrow 2^{17-1}\times(2^{17}-1)=8.589.869.056$

4.24.10 Propriedades dos Números Perfeitos

1ª) Cada Número Perfeito é igual à soma da sucessão dos números naturais, a partir de 1, onde a última parcela é o número primo de Mersenne que aparece como fator na fórmula que o gera.

Exemplos:

1) $6 = 1 + 2 + 3$, onde o 3 é o 1º primo de Mersenne.

2) $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ onde o 7 é o 2º primo de Mersenne.

3) $496 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 29 + 30 + 31$ onde o 31 é o 3º primo de Mersenne).

Obs.: Os números perfeitos têm uma propriedade interessante descoberta pelos Pythágoras.

2ª) Os Números Perfeitos, com exclusão do 6, são iguais à soma do cubos perfeitos de todos os números ímpares consecutivos, a partir de 1.

Exemplos:

1) $28 = 1^3 + 3^3$

2) $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$

3) $8.128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$

4.25 Criptografia

4.25.1 Introdução

Criptografia (kriptós = escondido, oculto; grápho = grafia): é a arte ou ciência de escrever em cifra ou em códigos, de forma a permitir que somente o destinatário a decifre e a compreenda. Há vários usos para a criptografia em nosso dia-a-dia: proteger documentos secretos, transmitir informações confidenciais pela Internet ou por uma rede local, etc.

Olhe à sua volta e perceba os diversos códigos que existem. Alguns muito claros outros nem tanto, mas cada um reserva um objetivo que justifica a sua criação. Os códigos, em geral, surgem da tentativa de comunicação entre o emissor e o receptor da mensagem.

Durante milhares de anos, reis, rainhas e generais dependeram de comunicações eficientes para governar suas nações e comandar seus exércitos. Para tal desenvolviam códigos e cifras técnicas para esconder ou mascarar o seu conteúdo, de modo que apenas o destinatário o leia. Por trás desse jogo, ocorreram guerras seculares entre os criadores de códigos e os decifradores, onde os codificadores tentar criar códigos cada vez mais eficientes e os decifradores inventam métodos para quebrá-los. A história é marcada por códigos que decidiram o resultado de batalhas, como na 2ª Guerra Mundial, com os alemães

utilizando a máquina ENIGMA, na guerra entre a Pérsia e Grécia (narrada por Heródoto), provocando a morte de reis e rainhas (Maria, rainha da Escócia, 1586). Para quebrar um código eficiente é preciso deter conhecimento em diversas áreas, como tecnologia, matemática, religião, teoria quântica e outras, ou seja ser multidisciplinar.

Na tentativa de se desenvolver códigos eficientes o homem fez várias tentativas como por exemplo a esteganografia, que consistia em ocultar a mensagem. Uma maneira muito usada era a de esconder uma mensagem dentro de um ovo cozido fazendo uma tinta com uma onça de alume e um quart ilha de vinagre então escrevendo na casca do ovo. A solução penetra na casca porosa e deixa a mensagem sobre a clara endurecida do ovo. É claro que tal procedimento era vulnerável, pois bastava o acesso à mensagem para se conhecer o seu conteúdo. Portanto houve a evolução da criptografia (KRIPTOS - OCULTO), onde o seu objetivo não é ocultar a existência da mensagem, mas esconder o seu significado. A vantagem da criptografia é que se o inimigo descobrir a mensagem, o mesmo ainda terá que decodificá-la.

O método mais conhecido de criptografia é o RSA, inventado por R.L.Rivest, A.Shamir e L. Adleman, que trabalhavam no M.I.T em 1978. Este método faz parte de muitos outros códigos de chave pública (os códigos modernos são todos de chave pública, criados para fins comerciais e não de espionagem). O fato de que a chave é pública não significa que o método é fraco, uma vez que nesses tipos de códigos saber codificar não implica em saber decodificar.

O Algoritmo RSA é fundamentado nos seguintes princípios:

1º) Selecione dois números primos (p e q), preferencialmente grandes;

2º) Calcule n e z, sabendo que $n = p \times q$ e $z = (p-1) \times (q-1)$;

3º) Escolha d, supondo d e z primos entre si;

4º) Determine e tal que, $e \times d \equiv 1 (\text{mod. } z)$

I) Criptografando uma mensagem M.

Faça $C \equiv M^d (\text{mod. } n)$

II) Descriptografando a mensagem M.

Faça $M \equiv C^d (\text{mod. } n)$

Conclusão: Para criptografarmos é necessário que saibamos os números e e n, e para descriptografarmos é necessário sabermos d e n.

Obs.:

1ª) e e n fazem parte da "chave pública";
2ª) d e n fazem parte da "chave privada".

A grande dificuldade para obtermos d, a partir de e e n, está na fatoração de números grandes. Supondo o tempo médio por instrução de 1 microssegundo, um computador levaria 4 bilhões de anos para fatorar um número de 200 algarismos; 1025 anos para fatorar um número de 500 algarismos. Mesmo levando 1 nanosegundo (realidade atual), levaria muito tempo para fatorar.

Ex:. Seja criptografar a letra S (cod 19).

Resolução:

1º) Admitamos dois primos pequenos: $p = 3$ e $q = 11$;
2º) $n = 3 \times 11 = 33$;
3º) $z = (3 - 1) \times (11 - 1) = 20$;
4º) Seja $d = 7$, um dos números primos entre si com 20;
5º) Como $7 \times e \equiv 1(\text{mod. } 20)$
6º) Criptografando: $C \equiv 19^3(\text{mod. } 33)$
7º) Descriptografando: $M \equiv 28^7(\text{mod. } 33) \equiv 19(\text{mod. } 33)$

Neste exemplo foi fácil fatorar $n = 33$ e obter p, q e z. Conhecendo-se z, obtemos d usando o algoritmo de Euclides.

4.26 Exercícios Resolvidos

1) Sendo $N = \dfrac{2^x \times 3 \times 5^2}{2}$,

a) determinar x de modo que N possua 30 divisores.

A expressão acima pode ser escrita da forma:

$N = 2^{x-1} \times 3^1 \times 5^2$

De acordo com os dados, temos:

$Q_{D(N)} = 30$, daí,

$(x - 1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 30$

$6x = 30 \therefore x = 5$

b) determinar N

Se $x = 5$, então, $N = 2^{5-1} \times 3^1 \times 5^2$ ou $N = 2^4 \times 3^1 \times 5^2 \Rightarrow N = 16 \times 3 \times 25$

$N = 1.200$

c) determinar a quantidade de divisores pares de N.

$Q_{Dp(N)} = 4 \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 \therefore Q_{Dp(N)} = 24$

d) determinar a quantidade de divisores ímpares ($Q_{Di(N)}$) de N.

$Q_{Di(N)} = (1 + 1) \times (2 + 1) = 2 \times 3 \therefore Q_{Di(N)} = 6$

e) determinar a quantidade de divisores não primos de N.

Na decomposição de N, ou seja, $N = 2^4 \times 3^1 \times 5^2$, vê-se que existem 3 fatores primos na base, são eles: $2, 3$ e 5. Subtraindo do total de divisores (30) esses três fatores, temos que a quantidade de divisores não primos de N é $30 - 3 = 27$.

f) determinar a quantidade de divisores múltiplos de 2.

$N = 2^4 \times 3^1 \times 5^2$

$Q_{D(\dot{2})} = 4 + 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 1 \times 2 \therefore Q_{D(\dot{2})} = 24$

Obs.: Esse resultado também pode ser obtido do seguinte modo:

$$\frac{2^4 \times 3^1 \times 5^2}{2} = 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \Rightarrow Q_{D(\dot{2})} = (3+1) \times (1+1) \times (2+1) \therefore Q_{D(\dot{2})} = 24$$

g) determinar a quantidade de divisores múltiplos de 3.

1º modo:

$Q_{D(\dot{3})} = 1 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 4 \times 2 \therefore Q_{D(\dot{3})} = 15$

2º modo:

$$Q_{D(\dot{3})} = \frac{2^4 \times 3^1 \times 5^2}{3} = 2^4 \times 5^2$$

$Q_{D(\dot{3})} = (4 + 1) \times (2 + 1) = 15$

h) determinar a quantidade de divisores múltiplos de 10.

$Q_{D(\dot{1}0)} = \frac{2^4 \times 3^1 \times 5^2}{10} = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

$Q_{D(\dot{1}0)} = (3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) \therefore Q_{D(\dot{1}0)} = 16$

2) Determinar o número de divisores de $N = 12^5 \times 45^7$.

$12^5 \times 45^7 = (2^2 \times 3^1)^5 \times (3^2 \times 5^1)^7 = 2^{10} \times 3^5 \times 3^{14} \times 5^7 = 2^{10} \times 3^{19} \times 5^7$

$Q_{D(N)} = (10+1) \times (19+1) \times (7+1) = 11 \times 20 \times 8$

$Q_{D(N)} = 1.760$

3) Determinar todos os divisores "inteiros"de 12.

Em ordem crescente temos, mentalmente:

$\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +6, +12\}$

Nótula: Observando esse exemplo, pode-se concluir que, para determinarmos o número de divisores inteiros, basta multiplicarmos o número de divisores por 2.

4) Determinar o número de divisores inteiros de 120.

Como $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ então, o número de divisores inteiros de 120 é igual a $2 \times (3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 32$

5) Determinar o *menor* número natural com 10 divisores.

Dois são os fatores no sistema decimal que, multiplicados, geram o produto igual a 10.

São eles:
1×10 e 2×5

$$1^{\underline{o}}\ )\quad 1 \times 10 = (v+1)(w+1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = v+1 \therefore v = 0 \\ 10 = w+1 \therefore w = 9 \end{cases}$$

$$2^{\underline{o}}\ )\quad 2 \times 5 = (x+1)(y+1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = x+1 \therefore x = 1 \\ 5 = y+1 \therefore y = 4 \end{cases}$$

Como estamos a determinar o menor número, esses pares de valores deverão ser substituídos nos expoentes dos dois menores números primos, ou seja, o 2 e o 3. Assim sendo, teremos:

$N_1 = 2^9 \times 3^0 \Rightarrow N_1 = 512 \times 1 \therefore N_1 = 512$

$N_2 = 2^4 \times 3^1 \Rightarrow N_1 = 16 \times 3 \therefore N_2 = 48$

Conclusão: O menor número é o 48.

6) Calcular o número de primos entre si com:

a) 23, menores que 23;
b) 30, menores que 30;
c) 81, menores que 81;
d) 360, menores que 360;

a) $N = 23$
$\varphi(23) = 23 - 1$
$\varphi(23) = 22$

b) $N = 30$
$30 = 2 \times 3 \times 5$
$\varphi(30) = (2 - 1) \times (3 - 1) \times (5 - 1)$
$\varphi(30) = 8$

c) $N = 81$
$N = 3^4$
$\varphi(81) = 3^{4-1} \times (3 - 1) = 3^3 \times 2$
$\varphi(81) = 54$

d) $N = 360$
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$\varphi(360) = 2^{3-1} \times 3^{2-1} \times 5^{1-1} \times (2 - 1) \times (3 - 1) \times (5 - 1)$
$\varphi(360) = 96$

7) Determinar o número de vezes que o fator primo 3 aparece na decomposição, em fatores primos, do produto dos trezentos primeiros números naturais, a partir de 1.

Resolução:

Seja $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 298 \times 299 \times 300$, a multiplicação que gera tal produto. Como nos múltiplos de 3 o fator (3), é claro, aparece em sua decomposição, apenas irão nos interessar os fatores que contenham esses múltiplos, ou seja:

$$\underbrace{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 297 \times 300}_{\text{100 fatores}}$$

Decompondo-se, convenientemente, os fatores anteriormente "subchaveados", teremos:

$$\underbrace{3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 3 \times 99 \times 3 \times 100}_{\text{200 fatores}}$$

Vê-se que de 3×1 até 3×100 o fator 3 aparece 100 vezes, logo a expressão anterior pode, também, ser escrita da forma:

$$3^{100} \times \underbrace{1 \times 2 \times 3 \cdots \times 100}_{\text{100 fatores}}$$

Daqui por diante, raciocinaremos de modo análogo ao que já foi feito anteriormente. Assim sendo, a expressão anterior ficará:

$$\underbrace{3^{100} \times 3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 99}_{\text{33 fatores}} \text{ ou } 3^{100} \times \underbrace{3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3 \times 33}_{\text{66 fatores}}$$

$$= 3^{100} \times 3^{33} \times \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 33}_{\text{33 fatores}} \text{ ou } 3^{100} \times 3^{33} \times \underbrace{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 33}_{\text{11 fatores}}$$

$$= 3^{100} \times 3^{33} \times \underbrace{3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3 \times 11}_{\text{22 fatores}}$$

$$= 3^{100} \times 3^{33} \times 3^{11} \times \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 11}_{\text{11 fatores}}$$

$$= 3^{100} \times 3^{33} \times 3^{11} \times \underbrace{3 \times 6 \times 9}_{\text{3 fatores}} = 3^{100} \times 3^{33} \times 3^{11} \times \underbrace{3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3}_{\text{6 fatores}}$$

$$= 3^{100} \times 3^{33} \times 3^{11} \times 3^{3} \times \underbrace{1 \times 2 \times 3}_{\text{3 fatores}} = 3^{100} \times 3^{33} \times 3^{11} \times 3^{3} \times 3^{1}$$

Conservando-se a base 3 e somando-se os expoentes, teremos:

$3^{100+33+11+3+1} = 3^{148}$.

Conclusão: O fator 3 aparece 148 vezes.

Obs.: O expoente 148 poderá ser obtido somando-se apenas todos os quocientes obtidos nas divisões sucessivas do número 100 (último fator) por 3, ou seja:

$$\begin{array}{llllll}
300 & \underline{|3} & & & & \\
0 & 100 & \underline{|3} & & & \\
 & 1 & 33 & \underline{|3} & & \\
 & & 0 & 11 & \underline{|3} & \\
 & & & 2 & 3 & \underline{|3} \\
 & & & & 0 & 1
\end{array}$$

ou simplesmente . . .

$300 \div 3 = 100 \div 3 = 33 \div 3 = 11 \div 3 = 3 \div 3 = 1$

Conclusão: O fator 3 aparece $100 + 33 + 11 + 3 + 1$, ou seja, 148 vezes.

8) Determinar o número de zeros em que termina o produto de todos os números naturais, de 1 até 100.

Resolução:

Sabemos que, na base 10, os dois menores números primos que geram produtos terminados em zero(s) são, respectivamente, o 2 e o 5. Portanto, teremos que verificar qual é o número de vezes que cada um desses fatores aparece. As potências dos outros fatores primos menores que 100 não irão influenciar na quantidade de zeros, logo:

a) o fator "2" aparece:

$100 \div 2 = 50 \div 2 = 25 \div 2 = 12 \div 2 = 6 \div 2 = 3 \div 2 = 1 \Rightarrow 50+25+12+6+3+1 =$ 97 vezes

b) o fator "5" aparece:

$100 \div 5 = 20 \div 5 = 4 \Rightarrow 20 + 4 = 24$ vezes

Conclusão: O produto termina em 24 zeros.

Obs.: Nesse exemplo, como o fator 5 aparece menos vezes, bastava calcularmos esse número de vezes.

9) Determinar o número de zeros em que termina o produto gerado por $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 555$, quando o mesmo for escrito escrito no sistema de base 6.

1ª Resolução

Na base 6, os dois menores fatores que geram produtos terminados em zero são, respectivamente, o 2 e o 3 ($2_{(6)} \times 3_{(6)} = 10_{(6)}$). Como o fator 3 aparece menos vezes, teremos:

$$\begin{array}{ccccccc}
555_{(6)} & \underline{|3} & & & & & \mathbf{12} \\
25_{(6)} & 155_{(6)} & \underline{|3} & & & & 155_{(6)} \\
25_{(6)} & 25_{(6)} & 35_{(6)} & \underline{|3} & & & 35_{(6)} \\
2_{(6)} & 2_{(6)} & 5_{(6)} & 11_{(6)} & \underline{|3} & & 11_{(6)} \\
 & & 2_{(6)} & 1_{(6)} & 2_{(6)} & + & \underline{2_{(6)}} \\
 & & & & & & 251_{(6)}
\end{array}$$

$251_{(6)} = 2 \times 6^2 + 5 \times 6^1 + 1 \times 6^0 = 72 + 30 + 1 = 103$

2ª Resolução

Tem-se que $555_6 = 215_{10}$ e como 3_6 é o mesmo que 3_{10}, teremos:

$$\begin{array}{lllll} 215 & \underline{|3} & & & \\ \ \ 2 & 71 & \underline{|3} & & \\ & \ \ 2 & 23 & \underline{|3} & \\ & & \ \ 2 & 7 & \underline{|3} \\ & & & 1 & 2 \end{array}$$

Logo, $71 + 23 + 7 + 2 = 103$

Resp.: 103 zeros.

10) Determinar o número que admite 6 divisores e cuja soma dos mesmos seja igual a 104.

Resolução:

$Q_{D(N)} = 6$

$$6 = 2 \times 3 = (x+1)(y+1) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$N = a^1 \times b^2 \ldots (I)$

$D(N) = \{1, a, b, ab, ab^2, b^2\}$

Adicionando-se esses elementos, teremos:

$$\underbrace{1 + a} + \underbrace{b + ab} + \underbrace{ab^2 + b^2} = 104$$

Agrupando e fatorando, teremos:

$1 \times (1 + a) + b \times (1 + a) + b^2 \times (1 + a) = 104$, portanto,

$(1 + a) \times (1 + b + b^2) = 8 \times 13 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 1 + a = 8 \Rightarrow a = 7 \\ 1 + b + b^2 = 13 \Rightarrow b^2 + b - 12 = 0 \text{ ou } (b-3) \times (b+4) \begin{cases} b = 3 \\ b = -4 \text{ (não serve)} \end{cases} \end{cases}$$

Substituindo $a = 7$ e $b = 3$ em (I), teremos $N = 7 \times 3^2 \Rightarrow N = 63$.

Resp.: 63.

11) Um número N é da forma $2^x \times 3^y$. Dividindo-o por 6 e por 9, o número de divisores diminui de 8 e 10, respectivamente. Determinar N.

Resolução:

$Q_{D(N)} = (x+1)(y+1)$

$$\frac{N}{6} = \frac{2^x \times 3^y}{2 \times 3} = 2^{x-1} \times 3^{y-1} \Rightarrow n.d\left(\frac{N}{6}\right) = (x-1+1)(y-1+1) = xy$$

$$\frac{N}{9} = \frac{2^x \times 3^y}{3^2} = 2^x \times 3^{y-2} \Rightarrow n.d\left(\frac{N}{9}\right) = (x+1)(y-2+1) = (x+1)(y-1)$$

De acordo com o enunciado, podemos escrever que:

$$\begin{cases} xy = (x+1)(y+1) - 8 \\ (x+1)(y-1) = (x+1)(y+1) - 10 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obteremos: $x = 4$ e $y = 3$.
Substituindo x e y em N, teremos:

$N = 2^4 \times 3^3 = 16 \times 27$
$N = 432.$

12) Determinar o conjunto de todos os números primos entre si com 20, menores que 20.

$P(20) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

13) Determinar a soma de todos os números primos entre si com 20, menores que 20.

Sabemos que $\Sigma N = \dfrac{N \times \varphi(N)}{2}$

$$\Sigma 20 = \frac{20 \times \varphi(20)}{2}$$

$\varphi(20) = 8$

$\Sigma 20 = 10 \times 8 = 80$

4.27 Exercícios Propostos

1) Quantos divisores têm os números:

a) 540?
b) 729?
c) 900?
d) 3.250?

2) Calcule o menor número natural de:

a) 15 divisores;
b) 21 divisores;
c) 8 divisores;
d) 14 divisores;
e) 25 divisores;

3) Calcule o número de divisores dos seguintes números:

a) $N = 2^4 \times 3^5 \times 5^9$
b) $N = 2^5 \times 15^2$
c) $N = 2^{15} \times 3^9 \times 11^4$
d) $N = 4^2 \times 12^3$

4) O número $N = 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + \cdots + 2^{15}$ é formado por 15 parcelas, todas iguais. Determine a quantidade de divisores positivos de N.

5) Se $A = 2^2 + 2^2$, $B = 3^3 + 3^3 + 3^3$, $C = 4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$, $D = 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6$ e $N = A \times B \times C \times D$, calcule o número de divisores positivos de N.

6) Calcule o número de divisores positivos de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 18^3 + 19^3 + 20^3$.

7) Sendo $\frac{N}{7^A}$ uma divisão que gera quociente exato, e N o produto dos 60 primeiros números naturais, a partir de 1, qual é o maior valor que pode assumir o expoente A?

8) Determine o menor valor de N na expressão $\frac{N \times 6^k}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}$, sabendo que:

a) esse quociente é um número natural;
b) k é um número natural maior que 9;
c) é um número natural não múltiplo de 2 ou 3.

9) Quantas vezes o fator primo 11 aparece na decomposição do produto gerado por $100 \times 101 \times \cdots \times 1.000$?

10) Considere o produto de todos os múltiplos positivos de 6, que são menores que 1.000. Determine o número de zeros em que termina esse produto.

11) Calcule o valor de x, de modo que o número $2^x \times 3^4$ admita 20 divisores.

12) Calcule o valor de x, sabendo que $N = 2^x \times 5^2 \times 7^5$ possui 18 divisores.

13) Determine o valor de N, de modo que:

a) $N = 2^x \times 3$ tenha 20 divisores;
b) $N = 45 \times 2^x$ tenha 18 divisores;
c) $N = 3 \times 20^x$ tenha 56 edivisores;
d) $N = 4^x \times 15$ tenha 28 divisores.
e) $N = 9 \times 10^x$ tem 27 divisores;
f) $N = 8 \times 3^n \times 5^{n+1}$ tem 48 divisores.

14) Determine o número de divisores pares do número $N = 2^x \times 5 \times 7^x$, sabendo que o mesmo possui 12 divisores ímpares.

15) Determine a soma de todos os divisores de $7 \times p$, supondo p um número primo.

16) Qual é o número de divisores de um número P, sendo P igual ao produto dos k números primos distintos?

17) Sendo $N = 2^4 \times 3^5 \times 5^6$, determine o número de divisores que são:

a) pares;
b) ímpares;
c) não primos;
d) múltiplos de 3;
e) múltiplos de 10.

18) Sendo $n \in \mathbb{N}$ um número primo diferente de dois e de três, quantos divisores têm o número $6n$?

19) Seja $m \times n \times p^2$ a decomposição de certo número P em fatores primos. Qual é o número de divisores não primos de P?

20) O produto gerado por $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 8 \times 9 \times 10$ (base 10), quando expresso na base 12, têm exatamente k zeros. O valor de k é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

21) Qual é o número de zeros do produto $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 216$ (base 10), ao ser expresso na base 28?

22) Qual é o número de zeros do produto $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 147 \times 148$ (base 10), quando expresso na base 12?

23) Um número é uma potência de 2. Dividindo-o por 16, o número de divisores fica sendo 5. Determine esse número.

24) Um número natural N é múltiplo de 83 e N^2 tem 63 divisores. Calcule N, sabendo que N é o maior número possível que cumpre essas condições.

25) Um número é uma potência de 3. Dividindo-o por 81, o número de divisores fica sendo a metade do número de divisores primitivo. Qual é o número dado?

26) Um número é da forma $2^x \times 7$. Multiplicando-o por 14, o número de divisores aumenta de 7. Determine N.

27) Um número N é da forma $2^n \times 3^n \times 5$. Multiplicando-o por 70, o número de divisores aumenta de 88. Determine esse número.

28) Um número admite como fatores primos o 3 e o 7. Multiplicando-o por 63, o número de divisores aumenta de 10; se o multiplicarmos por 49, o número de divisores aumenta de 4. Determine esse número.

29) Um número admite os fatores primos 2 e 3. Multiplicando-o por 4, o número de divisores aumenta de 10; dividindo-o por 27, o número de divisores diminui de 18. Determine esse número.

30) Seja $N = 3^x \times 5^y$. Se dividirmos N por 15 e por 27, o número de divisores diminui de 6 e 9, respectivamente. Determine N.

31) Seja $N = 3^x \times 5^y \times 7^z$. Determine N, tal que $5N$ e $27N$ tenham 8 e 18 divisores, respectivamente, a mais que N.

32) Um número ao ser decomposto em fatores primos fica da forma $a^x \times b^y$. Calcule x e y, sabendo que $\frac{N}{a}$ e $\frac{N}{b}$ têm m e p divisores a menos que N, respectivamente.

33) Quando se divide $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$ por a, o número de divisores diminui de m unidades; quando se divide por b, diminui de n e, dividindo-se por c, diminui de p. Determine os expoentes α, β e γ.

34) Um número natural N, ao ser decomposto em fatores primos, fica da forma $2^a \times 3^b \times 5^c$. Dividindo-o por $2, 3$ e 5, o número de divisores diminui de $24, 18$ e 12, respectivamente. Determine o número N.

35) Um número N ao ser decomposto em fatores primos fica da forma $a^x \times b^y \times c^z$. Os quocientes de N por a, por b e por c, têm, respectivamente, $63, 45$ e 35 divisores a menos que N. Calcule $x + y + z$.

36) Ache os números N da forma $2^x \times 3^y$, de modo que o número de divisores de N^2 seja igual ao triplo do número de divisores de N.

37) Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 140, para que o produto tenha 36 divisores?

38) Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar o número 2×15^2, para que o produto tenha 40 divisores?

39) Qual é o número pelo qual se deve dividir 450, para que o quociente gerado tenha 8 divisores?

40) Sendo $N = a^x \times b^y \times c^z \times \ldots$, onde $a, b, c, \ldots$, são números primos, qual é a variação dos divisores de N, quando multiplicarmos N por $\dfrac{b}{a}$?

41) Determine um número natural N, sabendo que é um cubo perfeito, que admite 16 divisores e que, dividido por 43, gere um quociente primo e resto igual a 1.

42) Determine um número N, sabendo que é um quadrado perfeito, que tem 9 divisores e que, dividido por 11, gera um quociente primo e resto igual a 9.

43) Quais são os números primos obtidos por: $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} + 9$?

44) Ache um número primo maior que 3 tal que, dividindo por 8, o seu quadrado diminuído de 1, gere para quociente um número primo.

45) Suponha N um cubo perfeito gerado por $5p + 1$. Sabendo que p é um número primo, qual é a soma dos algarismos de p?

46) Sabe-se que o número $2^{13} - 1$ é primo. Sendo $n = 2^{17} - 16$, qual é o número de divisores naturais positivos de n?

47) Seja $N = 2^5 \times p \times q$, onde p e q são números primos. Determine N, tal que a soma de todos os divisores positivos de N seja igual ao triplo de N.

48) Seja $N = 2^n \times p$, onde n é um número natural qualquer e p é um número primo. Se o número N é igual à soma de todos os seus divisores próprios, então p é igual a:

a) $2^{n-1} - 1$ b) 2^{n-1} c) $2^{n+1} - 1$ d) $2^{n+2} - 1$ e) $2^n - 1$

49) Determine a quantidade, o conjunto e a soma de todos os números primos entre si com N, menores que N, supondo:

a) $N = 47$;
b) $N = 42$;
c) $N = 72$;

50) O quociente da soma de todos os números primos entre si com um número natural N, menor que N, por N, é igual a k. Quantos são esses números?

51) Seja P o produto de todos os k fatores primos e P_d igual ao produto de todos os divisores exatos de P. Calcule o valor de x, sabendo que P_d é igual à P^x.

52) Sendo $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma \times \dots$, onde $a, b, c, \dots$, são todos os fatores primos a partir de 2, qual é o quociente da soma de todos os divisores pares, pela soma de todos os divisores ímpares?

53) Ache o número cujo produto dos seus divisores é igual a $3^{30} \times 5^{40}$.

54) Calcule a soma dos expoentes de todos os fatores primos dos divisores de 360.

55) Sendo $N = 2^{95} \times 3^{19}$, determine o número de divisores de N^2, menores que N, não divisores de N.

56) Ache um número primo p, tal que $p \times 2^6$ seja um número perfeito.

57) Calcule x e y, de modo que $2^x \times 3^y$ seja um número perfeito.

58) Quantos são os divisores exatos de 10^{99}, não múltiplos de 10^{88}?

59) Sendo $N = 2^n \times 3 \times p$, n e p números naturais maiores ou iguais a 3, determine os possíveis valores de N, supondo N igual à metade da soma de suas partes alíquotas.

60) Sendo P o produto de todos os k fatores primos, qual é o quociente da soma de todos os divisores pares, pela soma de todos os divisores ímpares de P?

a) 2 b) k c) $2k$ d) 2^k e) k^2

61) Qual é a soma de todos os divisores exatos do número $N = 19^{88} - 1$ que são da forma $2^a \times 3^b$, supondo a e b maiores que zero?

62) Seja $N = 10^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Qual é a soma de todos os primos com N, menores que N?

a) N^k b) N^{k+1} c) $\frac{N^2}{5}$ d) $\frac{N^2}{2}$ e) $\frac{N^k}{2}$

63) Seja $N = abc \ldots z$ o menor número natural tal que, diminuindo 1 do algarismo a e aumentando 1 no algarismo z, obtemos o produto de $(a+2)$ por N', onde $N' = bcd \ldots z$. Calcule N.

64) Calcule a soma dos inversos de todos os divisores de 360. (Harvard)

65) Sendo $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{23} < d_{24} = N$, todos os divisores positivos de N, calcule d_{23} sendo que $d_5 + d_{20} = 77$ e $d_{20} - d_5 = 67$.

66) Quais são os números que têm 16 divisores exatos, onde $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = n$, sabendo que $d_6 = 18$ e $d_9 - d_8 = 17$?

67) Se p é um número primo, demonstre que, para qualquer natural a, $a^p - a$ é sempre divisível por p.

68) Se p e q são números primos, determine x tal que:

a) $x^2 + p \cdot q$ seja um quadrado perfeito;
b) $x \cdot (x + 2 \cdot p \cdot q)$ seja um quadrado perfeito.

69) Sabe-se que $2^{2^r} + 1$ é um número primo para $r = 0, 1, 2, 3$ ou 4, mas não é para 5. Quantos fatores primos tem o número $2^{32} - 1$?

70) No vestiário de uma escola com n alunos, numerados de 1 a n, há n armários enfileirados em um corredor, também numerados de 1 a n. Um dia, os alunos resolvem fazer a seguinte brincadeira:

O primeiro aluno abre todos os armários. Em seguida, o aluno número 2 fecha todos os armários de número par. O aluno número 3 inverte as posições das portas dos armários de número múltiplo de 3. O aluno número 4 inverte as posições das portas dos armários de número múltiplo de 4, e assim sucessivamente. Se $n = 2007$, quantos armários ficarão fechados?

Respostas

1) **a)** 24
b) 7
c) 27
d) 16

2) **a)** 144
b) 576
c) 24
d) 192
e) 1.296

3) **a)** 300
b) 54
c) 800
d) 440

4) 64
5) 252
6) 81
7) 9
8) 35
9) 81
10) 40
11) 3
12) Zero
13) **a)** 1.536
b) 180
c) 24.000
d) 960
e) 900
f) 9.000
14) 60
15) $8(p+1)$
16) 2^k
17) **a)** 168
b) 42
c) 207
d) 175
e) 144
18) 8
19) 9
20) **d**
21) 34
22) 71
23) 256
24) 1.992
25) 2.187
26) 56
27) 1.080
28) 147
29) **2.592**
30) 675
31) 4.725
32) $x = p-1$, $y = m-1$
33) $\alpha = \sqrt{\frac{np}{m}} - 1$, $\beta = \sqrt{\frac{mp}{n}} - 1$, $\gamma = \sqrt{\frac{mn}{p}} - 1$
34) 337.500
35) 10
36) 144 **ou** 324
37) 9
38) 45
39) 15
40) **Varia de** $(z+1)\cdot(y-x+1)$
41) 216
42) 196
43) 11 **e** 13
44) 5
45) 9
46) 10
47) 672
48) **c**
49) **a)** 46
b) 12
c) 24
50) $2k$
51) 2^{k-1}
52) $2\times(2^\alpha-1)$
53) $3^3\times 5^4$
54) 72
55) 1.805
56) 127
57) $x=1$, $y=1$
58) 9.856
59) 120 **e** 672
60) **a**
61) 744
62) **c**
63) 67.143
64) 3, 25
65) 180
66) 1.998 **e** 3.834
67) **Subjetiva**
68) **a)** $x = \frac{p-q}{2}$
b) $x = \frac{(p-q)^2}{2}$
69) 5
70) 1.963

Capítulo 5

Divisibilidade

5.1 Introdução

Sejam A e B dois números naturais. Diz-se que A divide B, se existir um número natural K tal que $B = A \times K$.

Exs.: 4 divide 20 pois, $20 = 4 \times 5$

7 divide 35 pois, $35 = 7 \times 5$

5.1.1 Terminologias

A divide B, A é divisor de B, B é divisível por A, B é múltiplo de A.

5.1.2 Teorema

Se um número B *dividir outro* A*, então dividirá todos os múltiplos de* A.

Hip: $\dfrac{A}{B}(\dot{A} = A_1, A_2, A_3, \ldots)$

Tese: $\dfrac{A_1}{B}, \dfrac{A_2}{B}, \dfrac{A_3}{B}, \ldots$

Demonstração:

1º) Se B divide A, então, $A = \dot{B}$

2º) Seja $K \times A$ um múltiplo de A, logo, $K \times A = K \times (\dot{B})$, então, $K \times A = \dot{B} \ldots$
c.q.d

5.1.3 Corolário

A soma ou diferença dos múltiplos de um número são múltiplos desse número.

De acordo com esse corolário, podemos escrever que:

$\mathrm{mult}.A + \mathrm{mult}.B + \mathrm{mult}.C + \cdots = \mathrm{mult}.(A + B + C + \dots)$ e,
$\mathrm{mult}.A - \mathrm{mult}.B - \mathrm{mult}.C - \cdots = \mathrm{mult}.(A - B - C - \dots)$

5.2 Conguência

5.2.1 Números Congruentes

Dois números se dizem congruentes ou côngruos quando, ao serem divididos pelo mesmo divisor d *(também chamado de módulo), gerarem o mesmo resto.*

Supondo A e B números dados ...

$$\begin{array}{r|l} A & d \\ \hline r & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} B & d \\ \hline r & q_2 \end{array}$$

Para indicar a congruência[1] dos números A e B, usa-se a seguinte notação:

$A \equiv B \ (\mathrm{mod.}\ d)$ ou $A \equiv B(d)$

Leia-se: A congruente com B, módulo d.

Obs.: A notação $A \equiv B\,(\mathrm{mod.}\,d)$ é devida a Leibiniz.

Ex.: $14 \equiv 23(\mathrm{mod.}\ 3)$

Observe que $14 \div 3 \Rightarrow$ resto 2 e $23 \div 3 \Rightarrow$ resto 2.

5.2.2 Princípios

1º) *Todo número é congruente consigo mesmo em relação a qualquer módulo.*

2º) Todo múltiplo de um número A é congruente com zero, *módulo* d.

$\dot{A} \equiv 0(\mathrm{mod.}\ d)$

3º) *Todo número* A *é congruente com o resto da divisão de módulo* d.

$A \equiv r(\mathrm{mod.}\ d)$

[1] As congruências foram introduzidas formalmente por K. F. Gauss ($1.777 - 1.855$) em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* - 1.801

5.2.3 Propriedades

1ª) *A condição necessária e suficiente para que dois números* A *e* B *sejam congruentes em relação a um mesmo módulo* (d) *é que sua diferença seja múltipla do módulo.*

$A = d \times q + r \therefore A = \dot{d} + r \ldots (I)$
$B = d \times q' + r \therefore B = \dot{d} + r \ldots (II)$
$A - B = d \times (q - q') + r - r \Rightarrow A - B = \dot{d} \ldots (III)$

Substituindo (II) em (III), teremos: $A = \dot{d} + r + \dot{d} \therefore A = \dot{d} + r$

Portanto $\ldots A \equiv B(\text{mod. } d) \ldots$ c.q.d.

2ª) *Podemos somar (ou subtrair), membro a membro, duas congruências de mesmo módulo.*

Se $A \equiv a(\text{mod. } d) \Rightarrow A = \dot{d} + a \ldots (I)$

Se $B \equiv b(\text{mod. } d) \Rightarrow B = \dot{d} + b \ldots (II)$

$(I) + (II)$

$A + B = \dot{d} + a + \dot{d} + b$
$A + B = \dot{d} + a + b$
$A + B \equiv (a + b)(\text{mod. } d)$

O mesmo raciocínio se aplica à subtração.

3ª) *Dois números côngruos com um terceiro de mesmo módulo são côngruos entre si.*

Se $A \equiv B(\text{mod. } d)$ e se $B \equiv C(\text{mod. } d)$, então $A \equiv C(\text{mod. } d)$
$A - B = \dot{d}$ e $B - C = \dot{d}$

Somando-se membro a membro, teremos:

$(A - B) + (B - C) = \dot{d} + \dot{d}$ ou $A - C = \dot{d} \Rightarrow A \equiv C(\text{mod. } d) \ldots$ c.q.d.

4ª) *Podemos somar ou subtrair o mesmo número* k *aos dois membros de uma congruência.*

Hip: $A \equiv B(\text{mod. } d) \ldots (I)$

Tese: $A + k \equiv [B + k](\text{mod. } d)$

De (I) podemos afirmar que $A - B = \dot{d}$

$A + k - (B + k) = A - B = \dot{d}$ ou
$A + k = B + k + \dot{d} \therefore A + k \equiv [B + k](\text{mod. } k) \ldots$ c.q.d.

Aplicar o mesmo raciocínio para a subtração.

5.2.4 Corolário

Podemos transpor os termos de uma congruência de um membro a outro desde que troquemos os seus sinais.

5ª) *Podemos multiplicar os dois membros de uma congruência por um mesmo número.*

Se $A \equiv B(\text{mod. } d)$ então $A \times k = B \times k\,(\text{mod. } d)$

Com efeito, se $A - B = \dot{d}$, deduz-se que $(A - B) \times k = \dot{d}$

$A \times k - B \times k = \dot{d}$ ou $A \times k = B \times k + \dot{d} \therefore A \times k = B \times k\,(\text{mod. } d)$

6ª) *Podemos multiplicar, membro a membro, duas congruências de mesmo módulo.*

Se $A \equiv a(\text{mod. } d)$ e $B \equiv b(\text{mod. } d)$, então $A \times B \equiv a \times b(\text{mod. } d)$

Com efeito, já que $A = \dot{d} + a$ e $B = \dot{d} + b$, então

$A \times B = \dot{d} + a \times b \therefore A \times B = a \times b\,(\text{mod. } d) \ldots$ c.q.d.

5.2.5 Corolário

Podemos elevar os dois membros de uma congruência ao mesmo expoente.

Se $A \equiv B\,(\text{mod. } d)$, $A \equiv B\,(\text{mod. } d), \ldots A \equiv B\,(\text{mod. } d)$, então . . .

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{m \text{ fatores}} \equiv [\underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{m \text{ fatores}}](\text{mod. } d) \therefore A^m \equiv B^m(\text{mod. } d) \ldots$$

c.q.d.

deduz-se que $A^m \equiv B^m(\text{mod. } d)$

7ª) *Podemos suprimir um fator comum aos dois membros e ao módulo da congruência.*

Se $k \times A = k \times B\,(\text{mod. } k \times d)$, então $A \equiv B\,(\text{mod. } d)$

Com efeito, $k \times A - k \times B \equiv \dot{d}$

$k \times A - k \times B \equiv k \times d \times q$

Sendo q um número natural, então, $A - B = d \times q \Rightarrow A = B + \dot{d} \therefore$ $A \equiv B\,(\text{mod. } d) \ldots$ c.q.d

$8^{\underline{a}}$) *Se* $P(x)$ *é um polinômio algébrico e se* $a \equiv b(\text{mod. } d)$, *então* $P(a) \equiv P(b)(\text{mod. } d)$

Seja $P(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Kx + L$

Se $a \equiv b(\text{mod. } d)$, deduz-se que:

$A \times a^n \equiv A \times b^n(\text{mod. } d)$
$B \times a^{n-1} \equiv B \times b^{n-1}(\text{mod. } d)$
$\vdots$
$k \times a \equiv k \times b(\text{mod. } d)$
$L \equiv L(\text{mod. } d)$

Somando membro a membro, teremos:

$P(a) \equiv P(b)(\text{mod. } d) \ldots$ c.q.d.

$9^{\underline{a}}$) *Se dois números* A *e* B *forem congruentes em relação a vários módulos, então serão congruentes ao m.m.c deles.*

$10^{\underline{a}}$) *Em toda congruência, o m.d.c de um membro e o módulo é igual ao do outro membro e o módulo.*

5.3 Teorema Fundamental da Divisibilidade

Se um número d *divide uma de duas parcelas* A *e* B *de uma adição, a soma* S *e a outra parcela serão congruentes em relação a esse divisor.*

Hip. $A + B = S$ e $d|A$

Tese: $S \equiv B\,(\text{mod. } d)$

Demonstração:

$1^{\underline{o}}$) Se d é divisor de A, então, $A = \dot{d}$;

$2^{\underline{o}}$) $\dfrac{B}{d} = q_1 + r \rightarrow B = d \times q_1 + r \therefore B = \dot{d} + r \ldots$ (I)

$3^{\underline{o}}$) Se $A + B = S \rightarrow \dot{d} + \dot{d} + r = S \rightarrow S = \dot{d} + r \ldots$ (II)

De (I) e (II), podemos escrever que:

$S \equiv B\,(\text{mod. } d) \ldots$ c.q.d.

5.3.1 Teorema

Se vários números $A, B, C, \ldots$ *forem divididos por um mesmo divisor* d*, a soma* S *desses números e a soma dos restos* $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots$*, ou seja,* S_r*, obtidos dessas divisões por esse divisor, serão congruentes em relação ao mesmo divisor.*

Hip.: $\dfrac{A}{d}, \dfrac{B}{d}, \dfrac{C}{d} \ldots$

Tese: $S \equiv S_r \,(\text{mod. } d)$

Demonstração:

$$\frac{A}{d} = q_1 + r_1 \rightarrow A = d \times q_1 + r_1 \therefore A = \dot{d} + r_1;$$

$$\frac{B}{d} = q_2 + r_2 \rightarrow B = d \times q_2 + r_2 \therefore B = \dot{d} + r_2;$$

$$\frac{C}{d} = q_3 + r_3 \rightarrow C = d \times q_3 + r_3 \therefore C = \dot{d} + r_3$$

$$\vdots$$

Somando-se as igualdades anteriores, membro a membro, teremos:

$A + B + C + \cdots = (\dot{d} + r_1) + (\dot{d} + r_2) + (\dot{d} + r_3) + \ldots$ ou

$A + B + C + \cdots = \underbrace{\dot{d} + \dot{d} + \dot{d} + \ldots}_{\dot{d}} + \underbrace{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots}_{S_r}$ ou ainda,

$S = \dot{d} + S_r$

Dividindo-se os dois membros por d e aplicando o Teorema Fundamental da Divisibilidade (T.F.D), podemos escrever que:

$S \equiv S_r \,(\text{mod. } d)$ . . . c. q. d.

5.3.2 Teorema

Dividindo-se vários números $A, B, C, \ldots$ *pelo mesmo divisor* d*, o produto* P *desses números e o produto dos restos* P_r *dessas divisões por esse divisor, serão congruentes em relação ao mesmo divisor.*

Hip.: $\dfrac{A}{d}, \dfrac{B}{d}, \dfrac{C}{d} \ldots$

Tese: $P \equiv P_r \,(\text{mod. } d)$

Demonstração:

Tomemos, inicialmente, os números A e B, e para divisor o número d.

$$\begin{array}{l|l} A & d \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \quad \ldots \quad (I) \qquad\qquad \begin{array}{l|l} B & d \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \quad \ldots \quad (II)$$

De (I) e (II), podemos escrever que:

1º) $A = d \times q_1 + r_1$ ou $A = \dot{d} + r_1 \ldots (III)$

2º) $B = d \times q_2 + r_2$ ou $B = \dot{d} + r_2 \ldots (IV)$

Multiplicando-se (III) por (IV), membro a membro, teremos:

$A \times B = (\dot{d} + r_1) \times (\dot{d} + r_2)$ ou

$A \times B = \dot{d} \times \dot{d} + r_1 \times \dot{d} + r_2 \times \dot{d} + r_1 \times r_2$

$A \times B = \dot{d} + r_1 \times r_2$

Se tomarmos três fatores e fizermos um desenvolvimento análogo ao anterior, concluiremos que:

$A \times B \times C = \dot{d} + r_1 \times r_2 \times r_3$

Para n fatores, isto é, $A \times B \times C \times \ldots$, teremos,

$$\underbrace{A \times B \times C \times \ldots}_{P} = \dot{d} + \underbrace{r_1 \times r_2 \times r_3 \times \ldots}_{P_r}$$

Dividindo-se os dois membros por d e aplicando o T.F.D, teremos:

$P \equiv P_r \, (\text{mod. } d) \ldots$ c. q. d.

5.3.3 Teorema

Dividindo-se n números iguais $A, A, A, \ldots$ pelo mesmo divisor d, a potência gerada por A^n e a gerada por r^n, onde r seja o resto da divisão do fator A por d, serão congruentes em relação a esse divisor.

$A^n \equiv r^n \, (\text{mod. } d)$

Obs.: A demonstração deste teorema é análoga ao do anterior.

5.4 Critérios de Divisibilidade

São regras que nos permitem, sem efetuar a divisão, saber se um dado número é, ou não, divisível por outro.

Veremos também que, a partir da determinação dos restos, poderemos verificar tais critérios.

5.4.1 Principais Critérios

a) Divisibilidade por 10^p; 2^p ou 5^p

a.1) Teorema.

Um número será divisível por 10^p, 2^p ou 5^p, quando os p últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 10^p, 2^p ou 5^p.

Demonstração:

Seja $N = abc\ldots stu$ um número composto por m algarismos.

Analisemos agora N com $1, 2, 3, \ldots p$ algarismos, em uma adição da forma:

$N = 10^{m-1} \times a + (bc\ldots stu)$

1º) N com um algarismo, isto é, $N = a \Rightarrow N = 10^{1-1} \times a$
2º) N com dois algarismos, isto é, $N = ab \Rightarrow N = 10^{2-1} \times a + b$ ou
$N = \dot{10} \times a + b$
3º) N com três algarismos, isto é, $N = abc \Rightarrow N = 10^{3-1} \times a + bc$ ou
$N = \dot{10} \times a + bc$
$\vdots$

Para $N = \underbrace{abc\ldots stu}_{m \text{ algs}} \Rightarrow N = [\dot{10}]^{m-1} \times a + \underbrace{bc\ldots stu}_{m-1 \text{ algs}} \ldots$ (I)

Como $10 = 2 \times 5 \Rightarrow 10 = \dot{2}$ e $10 = \dot{5}$, deduz-se que

$[\dot{10}]^{m-1} = [\dot{2}]^{m-1}$ e $[\dot{10}]^{m-1} = [\dot{5}]^{m-1}$, então, podemos escrever que:

$N = [\dot{2}]^{m-1} \times a + \underbrace{bc\ldots stu}_{m-1 \text{ algs}} \ldots$ (II) ou

$N = [\dot{5}]^{m-1} \times a + \underbrace{bc\ldots stu}_{m-1 \text{ algs}} \ldots$ (III).

Aplicando o T.F.D, teremos:

$N \equiv bcd \ldots stu \,(\text{mod. } 2^p; 5^p; 10^p)$

a.2) Corolário.

O resto da divisão de um número por 2^p*,* 5^p *ou* 10^p *é o mesmo que o resto da divisão do último algarismo da direita ou dos* p *últimos da direita por* 2^p*,* 5^p *ou* 10^p.

A partir desse corolário, pode-se concluir que:

Um número será divisível por 2^1 ou por 5^1, isto é, por 2 ou por 5, quando o último algarismo da direita for um número divisível por 2 ou por 5;

Um número será divisível por 2^2 ou por 5^2, isto é, por 4 ou por 25, quando os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 4 ou por 25;

Um número será divisível por 2^3 ou por 5^3, isto é, por 8 ou por 125, quando os três últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 8 ou por 125,... e assim por diante;

Um número será divisível por 10^1, 10^2, 10^3, ..., quando terminar em um zero, dois zeros, três zeros,...

$\mathbf{Ex}_1$. Verificar se o número 1.758.960.148 é divisível por 2, por 4 e por 8. Caso não seja, determinar o respectivo resto.

1º) por 2

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

2º) por 4

$$\begin{array}{r|l} 48 & 4 \\ \hline 0 & 12 \end{array}$$

3º) por 8

$$\begin{array}{r|l} 148 & 8 \\ \hline 4 & 18 \end{array}$$

Conclusão: O número dado é divisível por 2, é divisível por 4, mas não é divisível por 8 e, nessa divisão, o resto é igual a 4.

$\mathbf{Ex}_2$.: Verificar se o número 1.234.563.150 é divisível por 5, por 25 e por 125. Caso não seja, determinar o respectivo resto.

1º) Por 5

$$\begin{array}{r|l} 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

2º) Por 25

$$\begin{array}{r|l} 50 & 25 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

3º) Por 125

$$\begin{array}{r|l} 150 & 125 \\ \hline 25 & 1 \end{array}$$

Conclusão: O número dado é divisível por 5, é divisível por 25, mas não é divisível por 125, divisão pela qual o resto é, como vimos, igual a 25.

Ex3.: Verificar se o número 458.791.200 é divisível por 10, por 100 e por 1.000. Caso não seja, determinar o respectivo resto.

1º) Por 10

O número dado é divisível por 10, pois o último algarismo da direita é o zero.

2º) Por 100

O número dado é divisível por 100, pois os dois últimos algarismos da direita são iguais à zero.

3º) Por 1.000

$$\begin{array}{r|l} 1.200 & 1.000 \\ \hline 200 & 1 \end{array}$$

Conclusão: O número dado não é divisível por 1.000, e o resto é igual a 200.

b) Divisibilidade por 9 ou por 3

b.1) Teorema

Um número será divisível por 9 ou por 3, quando a soma de seus algarismos for um número divisível por 9 ou por 3.

Demonstração:

1ª) Sabemos que:

$$10^1 = 10 = 9 + 1 \Rightarrow 10^1 = \dot{9} + 1$$
$$10^2 = 100 = 99 + 1 \Rightarrow 10^2 = \dot{9} + 1$$
$$10^3 = 1.000 = 999 + 1 \Rightarrow 10^3 = \dot{9} + 1$$
$$\vdots$$
$$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zeros}} \Rightarrow 10^n = \dot{9} + 1$$

Vemos que qualquer potência de 10 é igual a um múltiplo de 9 mais 1.

2º) Seja $N = abc\ldots stu$, um número com n algarismos.

Explicitando-o sob forma polinômica, teremos:

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \cdots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0$$
ou
$$N = a \times (\dot{9}+1) + b \times (\dot{9}+1) + c \times (\dot{9}+1) + \cdots + s \times (\dot{9}+1) + t \times (\dot{9}+1) + u$$

3º) Desenvolvendo e ordenando convenientemente, teremos:

$$N = \underbrace{a \times \dot{9} + b \times \dot{9} + c \times \dot{9} + \cdots + s \times \dot{9} + t \times \dot{9}}_{\text{múlts. de 9}} + \underbrace{a + b + c + \cdots + s + t + u}_{\text{S algs}}$$

$$N = \ldots\dot{9} + (a + b + c + \cdots + s + t + u)$$

Dividindo os dois membros por 9 e aplicando o T.F.D, teremos:

$$N \equiv [a + b + c + \cdots + s + t + u](\text{mod. } 9)$$

Obs.: Como todo múltiplo de 9 também é múltiplo de 3, poderemos escrever:

$$N \equiv [a + b + c + \cdots + s + t + u](\text{mod. } 9; 3)$$

b.1.1) Corolário

O resto da divisão de um número por 9 ou por 3 é o mesmo que o resto da soma dos algarismos desse número por 9 ou por 3.

Ex.: Verificar se o número 12.003.100.512 é divisível por 3 e, em seguida, por 9.

$$S_{\text{algs}} = 1 + 2 + 0 + 0 + 3 + 1 + 0 + 0 + 5 + 1 + 2 = 15$$

1º) Por 3

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

2º) Por 9

$$\begin{array}{r|l} 15 & 9 \\ \hline 6 & 1 \end{array}$$

Conclusão: O número dado é divisível por 3, mas não é divisível por 9.

c) Divisibilidade por 6

c.1) Teorema

Um número será divisível por 6 *quando a soma do algarismo das unidades com o quádruplo da soma dos algarismos anteriores, for um número divisível por* 6.

Demonstração:

1º) Sabemos que:

$$\begin{aligned} &10^1 = 10 = 6 + 4 \Rightarrow 10^1 = \dot{6} + 4 \\ &10^2 = 100 = 96 + 4 \Rightarrow 10^2 = \dot{6} + 4 \\ &10^3 = 1.000 = 996 + 4 \Rightarrow 10^3 = \dot{6} + 4 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zero(s)}} \Rightarrow 10^n = \dot{6} + 4 \end{aligned}$$

Vemos que qualquer potência de 10 pode ser expressa como múltiplo de 6 mais 4.

2º) Seja $N = abc\ldots stu$ um número com n algarismos. Explicitando-o sob forma polinômica, teremos:

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \cdots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0.$$

ou

$$N = a \times (\dot{6}+4) + b \times (\dot{6}+4) + c \times (\dot{6}+4) + \cdots + s \times (\dot{6}+4) + t \times (\dot{6}+4) + u$$

3º) Desenvolvendo e ordenando a expressão anterior, teremos:

$$\begin{aligned} &N = a\times\dot{6}+b\times\dot{6}+c\times\dot{6}+\cdots+s\times\dot{6}+t\times\dot{6}+(4a+4b+4c+\cdots+4s+4t)+u \\ &N = \dot{6} + 4 \times (a + b + c + \cdots + s + t) + u \end{aligned}$$

Dividindo-se os dois membros por 6 e, aplicando o teorema fundamental da divisibilidade, teremos:

$N \equiv [u + 4 \times (a + b + c + \cdots + s + t](\text{mod. } 6)$

c.1.2) Corolário

O resto da divisão de um número por 6 é igual ao resto da soma do algarismo das unidades com o quádruplo da soma dos algarismos anteriores por 6.

Ex.: Verificar se os números 42.003.144.132 e 230.124.658.973 são divisíveis por 6. Caso não sejam, determinar os respectivos restos.

a) 42.003.144.132

Vê-se inicialmente que o número dado é divisível por 2, resta saber se ele é divisível por 3.

Somemos os algarismos:

$4 + 2 + 0 + 0 + 3 + 1 + 4 + 4 + 1 + 3 + 2 = 24$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 6 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

Conclusão: O número dado é divisível por 6

b) 230.124.658.973

1º) Como o algarismo das unidades é o 3 (número ímpar), o número dado não é divisível por 6.

2º) Cálculo do resto por 6.

$$\frac{R}{6} = \frac{3 + 4 \times (2 + 3 + 0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 5 + 8 + 9 + 7)}{6} = \frac{3 + 4 \times 47}{6} = \frac{191}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 191 & 6 \\ \hline 5 & 31 \end{array}$$

Conclusão: O número dado não é divisível por 6, e o resto é igual a 5.

5.5 Teorema

Se um número for divisível por vários outros primos entre si, dois a dois, então será divisível pelo produto deles.

Demonstração:

Seja N um número dado e $a, b, c, \ldots$ vários números primos entre si, dois a dois.

Hip.: $\dfrac{N}{a}, \dfrac{N}{b}, \dfrac{N}{c} \dots$

Tese: $\dfrac{N}{a \times b \times c \dots}$

Se $\dfrac{N}{a} = q_1 \Rightarrow N = a \times q_1$

Se $\dfrac{N}{b} = q_2 \Rightarrow N = b \times q_2$

Se $\dfrac{N}{c} = q_3 \Rightarrow N = c \times q_3$

$\vdots \qquad \vdots$

Quer-se demonstrar que $N = (a \times b \times c \times \dots) \times q$

Como $N = a \times q_1$ implica que $a \times q_1$ será divisível por b e, sendo b primo com a, então b dividirá q_1, logo,

$q_1 = b \times q'$, ou ainda, $N = a \times b \times q'$

Como $a \times b \times q'$ é divisível por c, e c é primo com a e b, então, N será primo com $a \times b$, portanto, c irá dividir q', logo,

$q' = c \times q''$, portanto, $N = a \times b \times c \times q''$ ou $N = (a \times b \times c) \times q''$.

Seguindo esse raciocínio, teremos que $N = (a \times b \times c \times \dots) \times q$ ... c.q.d.

Obs.: Esse teorema, assim como a condição geral de multiplicidade, permite-nos justificar certos critérios de divisibilidade já estudados e enunciar outros.

Exemplos:

I) Divisibilidade de um número N por 6

$$\frac{N}{6} = \frac{N}{2 \times 3}$$

Conclusão: Um número será divisível por 6 quando o for por 2 e 3, simultaneamente.

II) Divisibilidade por 45

$$\frac{N}{45} = \frac{N}{3^2 \times 5} = \frac{N}{5 \times 9}$$

Conclusão: Um número será divisível por 45 quando o for por 5 e 9, simultaneamente.

III) Divisibilidade por 360

$$\frac{N}{360} = \frac{N}{2^3 \times 3^2 \times 5^1} = \frac{N}{5 \times 8 \times 9}$$

Conclusão: Um número será divisível por 360 quando o for por $5, 8$ e 9, simultaneamente.

d) Divisibilidade por 11

d.1) Teorema

Um número será divisível por 11 *quando a diferença, não negativa, entre a soma dos algarismos de ordem ímpar* (S_{oi})*, e a soma dos algarismos de ordem par* (S_{op}) *for um número divisível por* 11.

Demonstração:

$1^{\underline{o}}$) Sabemos que:

$$10 = 11 - 1 \Rightarrow 10 = \dot{11} - 1$$
$$10^2 = (\dot{11} + 1)^2 \Rightarrow 10^2 = \dot{11} + 1$$
$$10^3 = (\dot{11} - 1)^3 \Rightarrow 10^3 = \dot{11} - 1$$
$$10^4 = (\dot{11} + 1)^4 \Rightarrow 10^4 = \dot{11} + 1$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$10^{2n} = \dot{11} + 1$$
$$10^{2n+1} = \dot{11} - 1$$

$2^{\underline{o}}$) Para efeito de demonstração, seja $N = abc \dots stu$, um número com uma quantidade n ímpar de algarismos.

Explicitando-o sob forma polinomial, teremos:

$$N = a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \cdots + s \times 10^2 + t \times 10^1 + u \times 10^0$$
$$N = a \times (\dot{11} + 1) + b \times (\dot{11} - 1) + c \times (\dot{11} + 1) + \cdots + s \times (\dot{11} + 1) + t \times (\dot{11} - 1) + u \times (\dot{11} + 1)$$
$$N = a \times \dot{11} + a + b \times \dot{11} - b + c \times \dot{11} + c + \cdots + s \times \dot{11} + s + t \times \dot{11} - t + u \times \dot{11} + u$$
$$N = \dot{11} \times (a + b + c + \cdots + s + u) + a - b + c - \cdots + s - t + u$$
$$N = \dot{11} + (a + c + \cdots + s + u) - (\underbrace{b + d + \cdots + t}_{S} op)$$
$$N = \dot{11} + [S_{oi} - S_{op}](\text{mod. } 11)$$

Dividindo-se os dois membros por 11 e aplicando a seguir o T.F.D, podemos afirmar que:

$$N \equiv [S_{oi} - S_{op}](\text{mod.} 11)$$

d.2) Corolário

O resto da divisão de um número por 11 *é o mesmo que o resto da diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar* $[S_{0i}]$ *e a soma dos algarismos de ordem par* $[S_{0p}]$*, por 11.*

Obs.: Quando $[S_{0i} - S_{0p}]$ for menor que zero, devemos aplicar a seguinte regra:

Soma-se ao minuendo $[S_{0i}]$ o menor múltiplo de 11, de modo que essa diferença fique não negativa (≥ 0).

Obs.: A diferença não negativa será o resto da divisão por 11.

Ex1.: Verificar se cada um dos números 74.918.185.936, 6.432.178 e 84.937.052 é divisível por 11. Caso não seja, determinar o resto.

Resolução:

a) 74.918.185.936

$S_{oi} = 6 + 9 + 8 + 8 + 9 + 7 = 47$
$S_{op} = 3 + 5 + 1 + 1 + 4 = 14$
$S_{oi} - S_{op} = 47 - 14 = 33 \div 11 \Rightarrow$ resto zero.

Conclusão: O número 74.918.185.936 é divisível por 11.

b) 6.432.178

$S_{oi} = 8 + 1 + 3 + 6 = 18$
$S_{op} = 7 + 2 + 4 = 13$
$S_{oi} - S_{0p} = 18 - 13 = 5 \Rightarrow 5 \div 11.$

Como o dividendo 5 é menor que o divisor 11, o resto é igual ao próprio divisor, ou seja, 5.

Conclusão: O número dado não é múltiplo de 11 e, o resto é 5.

c) 84.937.052

$S_{oi} = 2 + 0 + 3 + 4 = 9$
$S_{op} = 5 + 7 + 9 + 8 = 29$
$S_{oi} = 9 - 29 < 0$

Somando-se 22 (múltiplo de 11) ao minuendo, teremos:

$9 - 29 < 0 \rightarrow 9 + 22 = 31 - 29 = 2$

$2 \div 11 \Rightarrow$ resto 2

Conclusão: O número 84.937.052 não é divisível por 11 e o resto é 2.

e) Divisibilidade por 7

Nesta análise, temos três casos a considerar:

1º caso: O número possui dois algarismos;
2º caso: O número possui três algarismos;
3º caso: O número possui mais de três algarismos.

Obs.: Nos dois primeiros casos, aconselha-se fazer a divisão.

e.1) Teorema (3º caso)

Um número será divisível por 7 quando a diferença, não negativa, entre a soma dos números das classes ímpares S_{ci} *e a soma dos números das classes pares* S_{cp} *for um número divisível por 7.*

Demonstração:

1º) Sabemos que:

$$\begin{aligned}
10^3 &= \dot{7} - 1 \\
10^6 &= \dot{7} + 1 \\
10^9 &= \dot{7} - 1 \\
10^{12} &= \dot{7} + 1 \\
&\vdots \\
10^{3n} &= \dot{7} - 1 \\
10^{6n} &= \dot{7} + 1
\end{aligned}$$

2º) Para efeito de demonstração, seja $N = abc \ldots stu$, um número com uma quantidade n par de classes completa.

Dividindo N de três em três classes, teremos:

$N = abc \bullet def \bullet \cdots \bullet pqr \bullet stu$

Explicitando-o sob forma polinomial, teremos:

$N = (abc) \times 10^{6n} + (def) \times 10^{3n} + \cdots + (pqr) \times 10^6 + (stu) \times 10^3$
ou
$N = (abc) \times [\dot{7} + 1] + (def) \times [\dot{7} - 1] + \cdots + (pqr) \times [\dot{7} + 1] + (stu) \times [\dot{7} - 1]$

Ordenando esses termos, convenientemente, teremos:

$N = (abc) \times \dot{7} + (abc) \times \dot{1} + (def) \times \dot{7} - (def) \times 1 + \cdots + (pqr) \times \dot{7} + (pqr) \times 1 + (stu) \times \dot{7} - (stu) \times 1$

$N = (abc) \times \dot{7} + (def) \times \dot{7} + \cdots + (pqr) \times \dot{7} + (stu) \times \dot{7} +$
$\{[(abc) + (pqr) + \ldots] - [(def) + (stu) + \ldots]\}$

Como $[(abc) + \cdots + (pqr)] = S_{ci}$, e $[(def) + \cdots + (stu)] = S_{cp}$, podemos escrever que:

$N = \dot{7} + [S_{ci} - S_{cp}]$

Dividindo-se os dois membros por 7 e aplicando o teorema fundamental da divisibilidade, concluiremos que:

$N \equiv [S_{ci} - S_{cp}](\text{mod. } 7)$

e.2) Corolário

O resto da divisão de um número por 7 é o mesmo que o da diferença entre a soma dos números das classes ímpares e a soma dos números das classes pares.

Obs.: Se $[S_{ci} - S_{cp}]$ for menor que zero, devemos aplicar, analogamente ao que foi visto na divisibilidade por 11, a seguinte regra:

Soma-se ao minuendo S_{ci} o menor múltiplo de 7, de modo que essa diferença se torne não negativa (≥ 0).

Ex.: Verificar se os números 1.683.931.720.888, 12.358.107.941.284 e 23.705.123.848100 são divisíveis por 7. Caso não sejam, determinar o respectivo resto.

a) 1.638.931.720.888

$S_{ci} = 888 + 931 + 1 = 1.820$
$S_{cp} = 720 + 638 = 1.358$
$S_{ci} - S_{cp} = 1.820 - 1.358 = 462 > 0$

$$\begin{array}{r|l} 462 & 7 \\ \hline 0 & 66 \end{array}$$

Conclusão: O número dado é divisível por 7.

b) 12.358.107.941.284

$S_{ci} = 284 + 107 + 12 = 403$
$S_{cp} = 941 + 358 = 1.299$
$S_{ci} - S_{cp} = 403 - 1.299 < 0 \ldots \quad$ (I)
$1.299 - 403 = 896$

Resta-nos saber se essa diferença é divisível por 7, daí,...

$$\begin{array}{r|l} 896 & 7 \\ \hline 0 & 128 \end{array}$$

Como 896 é divisível por 7, devemos somá-lo ao minuendo (403) na expressão (I), portanto ...

$$(403 + 896) - 1.299 = 1.299 - 1.299 = 0 = \dot{7}$$

Conclusão: O número dado é divisível por 7.

c) 23.705.123.848.100

$S_{ci} = 100 + 123 + 23 = 246$
$S_{cp} = 848 + 705 = 1.553$
$S_{ci} - S_{cp} = 246 - 1553 < 0 \ldots$ (I)
$1.553 - 246 = 1.307$

$$\begin{array}{r|l} 1.307 & 7 \\ \hline 5 & 186 \end{array}$$

$7 - 5 = 2 \ldots$ (II)
$1.307 + 2 = 1.309 = \dot{7}$

Somando-se, em (I), 1.309 ao minuendo (246), teremos:

$$(246 + 1.309) - 1.553 = 1.555 - 1.553 = 2$$

Conclusão: O número dado não é divisível por 7 e o resto é igual a 2.

Obs.: Esse critério também pode ser aplicado aos de 11 ou 13.

$10^0 = \dot{7} + 1$
$10^1 = \dot{7} + 3$
$10^2 = \dot{7} + 2$
$10^3 = \dot{7} - 1$
$10^4 = \dot{7} - 3$
$10^5 = \dot{7} - 2$
$10^6 = \dot{7} + 1$
$10^7 = \dot{7} + 3$

Esse desenvolvimento poderia ser aplicado para outros critérios e, tal qual no de 7, iria nos levar, na maioria das vezes, a regras extremamente complicadas.

Exercício

Escolha (se quiser) um número natural qualquer maior que 11 e deduza o critério de divisibilidade para ele.

5.6 Gaussiano

Denomina-se gaussiano g *de um número* A *de módulo* m *ao menor expoente do número* A *congruente com* 1*, módulo* m*.*

Notação: $A^g \equiv 1 (\text{mod. } m)$

Ex$_1$.: Determinar o gaussiano do número 3 de módulo 5.

$\varphi(5) = 4$ e $D(4) = \{1, 2, 4\}$

$3^1 \equiv 3\,(\text{mod. } 5)$
$3^2 \equiv 4\,(\text{mod. } 5)$
$3^4 \equiv 1\,(\text{mod. } 5)$

Conclusão: $g = 4$

Ex$_2$.: Determinar o gaussiano do número 2 de módulo 11.

$\varphi(11) = 10$ e $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$

$2^1 \equiv 2\,(\text{mod. } 11)$
$2^2 \equiv 4\,(\text{mod. } 11)$
$2^5 \equiv 10\,(\text{mod. } 11)$
$2^{10} \equiv 1\,(\text{mod. } 11)$

Conclusão: $g = 10$

Ex$_3$.: Determinar o gaussiano do número 3 de módulo 11.

$\varphi(11) = 10$ e $D(4) = \{1, 2, 5, 10\}$

$3^1 \equiv 3\,(\text{mod. } 11)$
$3^2 \equiv 9\,(\text{mod. } 11)$
$3^5 \equiv 1\,(\text{mod. } 11)$

Conclusão: $g = 5$

5.7 Tópicos Complementares

5.7.1 Divisibilidade por 3^m

Um número será divisível por 3^m quando, decomposto em classes de 3^{m-2} algarismos, a partir da direita, a soma de todos os números formados por essas classes for múltiplo de 3^m.

Obs.: Se $m = 2$, recairemos no critério de divisibilidade por 9.

5.7.2 Divisibilidade por 11^m

Um número será divisível por 11^m quando, decomposto em classes de $2 \times 11^{m-1}$ algarismos, a partir da direita, a soma dos valores absolutos for múltiplo de 11^m.

Obs.: Se $m = 1$, teremos um outro critério de divisibilidade por 11, a partir do seguinte teorema:

Um número será divisível por 11 quando a soma de todas as classes de dois algarismos, a partir da direita, for um número divisível por 11.

Demonstração:

Seja $N = \ldots uvwxyz$ um número dado.

$N = \cdots + uv \times 10^4 + wx \times 10^2 + yz \times 10^0$
$10^2 = 100 = 99 + 1 = \dot{11} + 1$
$10^4 = 10.000 = 9.999 + 1 = \dot{11} + 1$
$10^{2n} = \dot{11} + 1$, portanto ...
$N = \cdots + uv \times (\dot{11} + 1) + wx \times (\dot{11} + 1) + yz$
$N = \cdots + uv \times \dot{11} + uv + wx \times \dot{11} + yz$
$N = (\cdots + uv + wx) \times \dot{11} + \cdots + uv + wx + yz$
$N = \cdots + uv + wx + yz$

Dividindo-se os dois membros por 11 e aplicando o T.F.D, conclui-se que:

$N \equiv$ "$\cdots + uv + wx + yz$"$\pmod{11} \ldots$ c.q.d.

Corolário

O resto da divisão de um número por 11 é o mesmo que o da soma de todas as classes de "duas em duas" ordens , a partir da direita, dividida por 11.

Ex$_1$.: Verificar se cada um dos números 74.918.185.936, 6.432.178 e 84.937.052 é divisível por 11. Caso não seja, determinar o resto.

a) 74.918.185.936

Separando de duas em duas ordens da direita para a esquerda tem-se 7.49.18.18.59.36 cuja soma é igual a
$36+59+18+18+49+7 = 187$ e que dividida por 11 deixa resto igual a 0.

Obs.: $187(87+1 = 88 \div 11 \Rightarrow$ resto 0)

b) 6.432.178

Analogamente, tem-se 6.43.21.78 cuja soma é $78+21+43+6 = 148$, que dividida por 11 deixa resto 5.

Obs.: $148\,(48+1 = 49 \div 11 \Rightarrow \mathtt{resto5})$

c) 84.937.052

Da mesma forma, 84.93.70.52 cuja soma $52+70+93+84 = 299$, que dividida por 11 deixa resto 2.

Obs.: $299\,(99+2 = 101)\,, 101\,(01+1 = 2 \div 11 \Rightarrow \mathtt{resto2})$

Obs.: O critério de divisibilidade por 7 também pode ser aplicado aos de 33 ou 99.

5.7.3 Regra dos Noves-Fora

A regra dos noves-fora [2], abreviadamente (**n.f**) nos permite verificar se o resultado de uma operação fundamental, está ou não correto, aplicando o critério de divisibilidade por 9.

Se por exemplo, estivermos diante de uma adição, devemos provar que *"a soma dos $9's$ fora das parcelas é igual aos $9's$ fora da soma das mesmas"*. Este raciocínio é análogo para qualquer operação.

Ex1.: Verificar, através da regra dos $9's$ fora o algoritmo: $578+435 = 1013$

1º) $578 \to 5+7 = 12, \text{n.f}3; 3+8 = 11\text{n.f}2$

2º) $435 \to 4+3+5 = 12, \text{n.f}3$

3º) $1.013 \to 1+0+1+3 = 5, \text{n.f}5$

$$\underbrace{578}_{n.f.2} + \underbrace{435}_{n.f.3} = \underbrace{1.013}_{n.f.5}$$

[2] Podemos aplicar também a regra dos $6's$, $7's$, $11's$ ou $13's$ fora.

Observe que a soma dos $9's$ fora no 1º membro, ou seja $2 + 3 = 5$, n.f 5 é igual aos $9's$ fora da soma (5), no 2º membro.

Conclusão: A soma está correta.

Ex2.: Determinar, através da regra dos $9's$ fora, o algorismo y no seguinte algoritmo: $2.465 \times 3.214 = 792y510$

$\underbrace{2.465}_{n.f.8} \times \underbrace{3214}_{n.f.1} = \underbrace{792y510}_{n.f.6+y}$

$8 \times 1 = 6 + y \therefore y = 2$

5.8 Indução

É uma importante ferramenta utilizada em matemática, que tem por objetivo fazer generalizações. Há dois tipos de indução: a *indução empírica* e a *indução matemática*.

5.8.1 Indução Empírica

Se em uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$ chegarmos a uma generalização baseada apenas na observação de certa reguralidade de um número finito de termos, diremos que a mesma trata-se de uma *indução empírica* .

Ex.: $2, 4, 6, 8, \dots$

Observe que:

Se $a_1 = 1 \times 2$
$a_4 = 2 \times 2$
$a_3 = 3 \times 2$
$\dots \quad \dots$

então, $a_n = n \times a_1 \rightarrow$ *indução empírica*

Em Matemática, a indução empírica é inaceitável, haja vista que existem fórmulas que se verificam para um número limitado de termos.

Ex.: A afirmação de que a expressão $n^2 - n + 40$ gera sempre um número primo, qualquer que seja n, é falsa. Ela, se verifica para $n = 1, 2, 3, \dots, 40$, mas não é válida para $n = 41$.

5.8.2 Indução Matemática

É um processo que permite demonstrar uma indução supostamente empírica, através de poucos termos de uma seqüência.

5.8.3 Princípio da Indução Matemática

Uma proposição P_n *é válida para todo* n *se, e só se:*
1º - *for válida para* $n = 1$*;*
2º - *admitida como válida para* $n = k$*;*
3º - *for provada para* $n = k + 1$.

Ex_1.: Provar que, se $a_1 = 1 \times a_1$, $a_2 = 2 \times a_1, a_3 = 3 \times a_1, \ldots$ então, $a_n = n \times a_1$.

Demonstração:
1º) Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1 \times a_1 \therefore a_1 = a_1 \ldots$ (I)
2º) Para $n = k \Rightarrow a_k = k \times a_1 \ldots$ (II)
3º) Para $n = k + 1 \Rightarrow a_{k+1} = (k + 1) \times a_1 \ldots$ (III)
Somando membro a membro, (II) e (I), teremos $a_k + a_1 = k \times a_1 + a_1$ ... (IV)
Como $a_k + a_1$ é o sucessor de a_k, então, em (IV), virá $a_k + 1 = (k+1) \times a_k$.
Substituindo em (III), $k + 1$ por n, teremos: $a_n = n \times a_1$ ... c.q.d

Ex_2.: Quantos fatores (n) existem na sucessão $4 \times 8 \times 12 \times \cdots \times 200$?

Resolução:
Se $a_n = n \times a_1$, então $n = \dfrac{a_n}{a_1} \to n = \dfrac{200}{4} = 50$.

Ex_3.: Quantos são os múltiplos de 7 na sucessão dos números naturais entre 1 e 1.000?

Resolução:
Como 1.000 dividido por 7 possui quociente 142 e resto 6, então, $a_n = 1.000 - 6 = 994$ e $a_1 = 7 \therefore n = \dfrac{994}{7} = 142$.

5.9 Exercícios Resolvidos

1) Achar o menor algarismo pelo qual devemos substituir a letra y no número $7483y$, de modo que o número assim formado seja divisível por 11.

Resolução:

$(y + 8 + 7) - (4 + 3) = \text{mult.}11 = \{0, 11, 22, \ldots\}$

$(y + 15) - 7 = 11 \therefore y = 3$

2) Determinar o resto da divisão de 3^{998} por 4.

Resolução:

$\varphi(4) = \varphi(2^2) = 2^{2-1} \times (2-1) = 2$ e $D(2) = \{1, 2\}$

$3^1 \equiv 3 \, (\text{mod. } 4)$
$3^2 \equiv 1 \, (\text{mod. } 4)$
$\vdots$
$(3^2)^{499} \equiv 1^{499} \, (\text{mod. } 4)$
$3^{998} \equiv 1 \, (\text{mod. } 4)$

Resp.: 1

3) Calcular o resto da divisão de 3^{98} por 5.

Resolução:

$\varphi(5) = 4$ e $D(4) = \{1, 2, 4\}$

$3^1 \equiv 3 \, (\text{mod. } 5)$
$3^2 \equiv 4 \, (\text{mod. } 5)$
$3^4 \equiv 1 \, (\text{mod. } 5)$
$(3^4)^{24} \equiv 1^{24} \, (\text{mod. } 5)$
$3^{96} \equiv 1 \, (\text{mod. } 5)$
$3^{96} \times 3^2 \equiv 1 \times 3^2 \, (\text{mod. } 5)$
$3^{98} \equiv 3^2 \, (\text{mod. } 5) \equiv 4 \, (\text{mod. } 5)$

Conclusão: $3^{98} \div 5 \Rightarrow$ resto 4.

Obs.: Seja qual for o critério, devemos sempre determinar o gaussiano, e, tal procedimento facilitará a obtenção do resto desejado. Veja o exemplo seguinte.

4) Encontrar o resto da divisão de 156^{98} por 11.

Resolução:

1º passo: $156 \div 11 \Rightarrow$ resto 2, pois, $(6+1)-(5)=2$

2º passo: $156^{98} \equiv 2^{98}\,(\text{mod. } 11)$ ... (Teorema 7.3.3)

3º passo: Cálculo do g

Como vimos no exemplo 2, em 5.6, $g = 10$, portanto,

$$2^{10} \equiv 1\,(\text{mod. } 11)$$
$$(2^{10})^9 \equiv 1^9\,(\text{mod. } 11)$$
$$2^{90} \equiv 1\,(\text{mod. } 11)$$
$$2^{90} \times 2^8 \equiv 1 \times 2^8\,(\text{mod. } 11)$$
$$2^{98} \equiv 2^8\,(\text{mod. } 11) \equiv 3\,(\text{mod. } 11)$$

Conclusão: $156^{98} \div 11$, implica resto 3.

5) Determinar o menor número natural que devemos somar e também, o menor que devemos subtrair, para que o 1.234 seja divisível por 5 e 9, simultaneamente.

Resolução:

Sabe-se que para um número atender às condições anteriores é necessário que seja divisível por 5×9, isto é, 45. Logo,

$$\begin{array}{r|l} 1.234 & 45 \\ \hline 19 & 27 \end{array}$$

a) Sabemos que o menor número que se pode somar é igual ao divisor menos o resto, logo, $45 - 19 = 26$.

b) Sabemos que o menor que se deve subtrair é o próprio resto, logo, $r = 19$.

6) Calcular o resto da divisão por 11 da expressão $1.211^{20} + 9.119^{32} \times 343^{26}$.

Resolução:

1º) $1.211^{20} \div 11 \Leftrightarrow [(1+2)-(1+1)]^{20} = (3-2)^{20} = 1^{20} = 1 \div 11 \Rightarrow$ resto 1

2º) $9.119^{32} \div 11 \Leftrightarrow [(9+1)-(1+9)]^{32} = (10-10)^{32} = 0^{32} = 0 \div 11 \Rightarrow$ resto 0.

Como esse resto foi zero e existe, a seguir, o outro fator (343^{26}), não será necessário determinar o resto de 343^{26} por 11, pois o produto será 0. Daí a expressão inicial ficará:

$1 + 0 \times 343^{26} \Leftrightarrow 1 + 0 = 1$, logo, $1 \div 11 \Rightarrow$ resto 1.

7) Calcular o resto de $25^{31^{47}}$ por 11.

1ª Resolução:

$25 \equiv 3(\mathrm{mod.}\ 11) \Rightarrow 25^{31^{47}} \equiv 3^{31^{47}}\ (\mathrm{mod.}\ 11)$

$\varphi(11) = 10 \to D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$

$3^1 \equiv 3\,(\mathrm{mod.}\ 11)$, $3^2 \equiv 9\,(\mathrm{mod.}\ 11)$, $3^5 \equiv 1\,(\mathrm{mod.}\ 11)$

$3^{31^{47}} \equiv (3^{31})^{31^{46}}$

$(3^5)^6 \equiv 1^6\,(\mathrm{mod.}\ 11) \Rightarrow 3^{30} \times 3^1 \equiv 1 \times 3^1\,(\mathrm{mod.} 11) \therefore 3^{31} \equiv 3\,(\mathrm{mod.}\ 11)$

Portanto $25^{31^{47}} \equiv 3^{31^{47}} \equiv 3^{31^{46}} \equiv \cdots \equiv 3^1\,(\mathrm{mod.}\ 11)$

Resp.: 3

2ª Resolução:
1º) $25 \equiv 3(11) \Rightarrow 25^{31^{47}} \equiv 3^{31^{47}}\,(11)$

2º) $3^5 \equiv 1\,(11)$; e $31^{47} = 5 \times q + r$

3º) $3^{5\times q} \equiv 1^q\,(11) \Rightarrow 3^{5\times q+1} \equiv 1^q \times 3^1\,(11)$

4º) $25^{31^{47}} \equiv 3^{31^{47}}(11) \equiv 3^{5\times q+1}\,(11) \equiv 3\,(11)$

Resp.:3

8) Determinar o dígito da ordem das dezenas na expansão gerada por 2^{100}.

Resolução:

$2^{10} \equiv 24\,(\mathrm{mod.}\ 100)$
$2^{20} \equiv 24^2\,(\mathrm{mod.}\ 100) \equiv 76\,(\mathrm{mod.}\ 100)$
$2^{40} \equiv 76^2\,(\mathrm{mod.}\ 100) \equiv 76\,(\mathrm{mod.}\ 100)$
$2^{50} \equiv 24\,(\mathrm{mod.}\ 100) \equiv 1.824\,(\mathrm{mod.}\ 100) \equiv 24\,(\mathrm{mod.}\ 100)$
$2^{100} \equiv 24^2\,(\mathrm{mod.}\ 100) \equiv 76\,(\mathrm{mod.}\ 100)$

Conclusão: O dígito das dezenas é o 7.

9) Determinar o dígito da ordem das centenas na expansão gerada por 7^{100}.

Resolução:

$7^4 \equiv 401\,(\text{mod. } 100)$
$7^8 \equiv 801\,(\text{mod. } 100)$
$7^{10} \equiv 249\,(\text{mod. } 100)$
$7^{20} \equiv 001\,(\text{mod. } 100)$
$7^{100} \equiv (001)^5\,(\text{mod. } 100) \equiv 001\,(\text{mod. } 100)$

Conclusão: O dígito das centenas é o 0.

10) Demonstrar que o produto de três números naturais sucessivos é um múltiplo de 6.

Resolução:

Sejam n, $n+1$ e $n+2$ três números sucessivos.
Multiplicando-os, teremos: $n \times (n+1) \times (n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$
Por indução, teremos:

1º) $n = 1 \Rightarrow 1^3 + 3 \times 1^2 + 2 \times 1 = 6 = \dot{6}$

2º) $n = k \Rightarrow k^3 + 3 \times k^2 + 2 \times k$

3º) $n = k+1$
$(k+1)^3 + 3 \times (k+1)^2 + 2 \times (k+1) = (\dot{k}+1) + 3 \times (\dot{k}+1) + 2 \times (\dot{k}+1) =$
$\dot{k} + 1 + 3\dot{k} + 3 + 2\dot{k} + 2 = 6\dot{k} + 6 = \dot{6}$

11) Demonstrar que o produto de quatro números naturais sucessivos é um múltiplo de 12.

Resolução:

Sejam n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$ quatro números naturais sucessivos.
Multiplicando-os entre si, teremos: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$
Para $n = 1 \Rightarrow 1^4 + 6 \times 1^3 + 11 \times 1^2 + 6 \times 1 = 24 = \dot{12}$
Para $n = k \Rightarrow k^4 + 6 \times k^3 + 11 \times k^2 + 6 \times k = 24k = \dot{12}$
Para $n = k+1 \Rightarrow (k+1)^4 + 6 \times (k+1)^3 + 11 \times (k+1)^2 + 6 \times (k+1)$
$= \dot{k} + 1 + 6 \times \dot{k} + 6 + 11 \times \dot{k} + 11 + 6 \times \dot{k} + 6$
$= 24 \times \dot{k} + 24 = \dot{24} = \dot{12} \ldots$ c.q.d.

12) Demonstrar que o produto de cinco números naturais sucessivos é um múltiplo de 60.

Resolução:

Sejam n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ e $n+4$ cinco números naturais sucessivos.
Multiplicando-os entre si, teremos: $n^5 + 10n^4 + 35n3 + 50n^2 + 24n$
Para $n = 1 \Rightarrow 1^5 + 10 \times 1^4 + 35 \times 1^3 + 50 \times 1^2 + 24 \times 1 = 120 = \dot{60}$
Para $n = k \Rightarrow k^5 + 10 \times k^4 + 35 \times k^3 + 50 \times k^2 + 24 \times k = \dot{60}$
Para $n = k{+}1 \Rightarrow (k{+}1)^5{+}10{\times}(k{+}1)^4{+}35{\times}(k{+}1)^3{+}50{\times}(k{+}1)^2{+}24{\times}(k{+}1)$
$= \dot{60} + 1 + 10 \times \dot{60} + 10 + 35 \times \dot{60} + 35 + 50 \times \dot{60} + 50 + 24 \times \dot{60} + 24$
$= 120 \times \dot{60} + 120 = \dot{60}$ ... c.q.d.

13) Demonstrar que 9^{n-1} é múltiplo de 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

1º modo

$9 = 8 + 1 \Rightarrow 9 = \dot{8} + 1$
$9^n - 1 = (\dot{8} + 1)^n - 1 = (\dot{8} + 1) - 1 = \dot{8}$ ... c.q.d

2º modo

$9^n - 1 = 3^{2n} - 1$
Para $n = 1 \Rightarrow 3^2 - 1 = 8 = \text{mult}.8$
Para $n = k \Rightarrow 3^{2k} - 1 = \text{mult}.8$
Para $n = k + 1 \Rightarrow 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k} \times 3^2 - 1$
$= 3^{2k} \times 9 - 1 + 9 - 9$
$= 9 \times (3^{2k} - 1) + 8$
$= 9 \times (3^{2k} - 1) + \dot{8} = \text{mult}.8$... c. q. d.

14) Demonstrar que $3 \times 9^n + 13$ é múltiplo de 8.

Resolução:

Para $n = 1 \Rightarrow 3 \times 9^1 + 13 = 40 = \dot{8}$
Para $n = k \Rightarrow 3 \times 9^k + 13$
Para $n = k + 1 \Rightarrow 3 \times 9^{k+1} + 13$
$= 3 \times (9^k \times 9) + 13$
$= 27 \times 9^k + 13$
$= 9 \times (3 \times 9^k + 13) - 104 = \text{mult}.8$... c. q. d.

15) Demonstrar que $3^{4n+1} + 10 \times 3^{2n} - 13$ é múltiplo de 64.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
&3^{4n+1} + 10 \times 3^{2n} - 13 = 3^{4n} \times 3 + 10 \times (3^2)^n - 13 \\
&= 3 \times (3^4)^n + 10 \times 9^n - 13 \\
&= 3 \times 9^{2n} - 3 \times 9^n + 13 \times 9^n - 13 \\
&= 3 \times 9^n \times (9^n - 1) + 13 \times (9^n - 1) \\
&(9^n - 1) \times (3 \times 9^n + 13) = \mathrm{mult}.64 \ldots \text{c.q.d.}
\end{aligned}
$$

16) Demonstrar que se n é um número natural, a expressão $2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1$ é múltiplo de 11.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
&2^{2n-1} \times 3^{n+2} + 1 = 2^n \times 2^{n-1} \times 3^n \times 3^2 + 1 = 9 \times 6^n \times 2^{n-1} + 1 \\
&= 9 \times 6^{n-1} \times 6 \times 2^{n-1} + 1 = 54 \times 12^{n-1} + 1 = 54 \times (\dot{11} + 1) + 1 \\
&= \dot{11} + 54 + 1 = \dot{11} \\
&= \dot{11} + 55 = \dot{11} \ldots \text{c.q.d.}
\end{aligned}
$$

17) Demonstrar que $5^{2n} - 1$ é múltiplo de 24.

Resolução:

Supondo $n = 1 \Rightarrow 5^2 - 1 = 24 = \dot{24}$
Admitindo $n = k \Rightarrow 5^{2k} - 1 = \dot{24}$
Supondo $n = k + 1 \Rightarrow 5^{2(k+1)} - 1$

$$
\begin{aligned}
&= 5^{2k+2} - 1 \\
&= 5^{2k} \times 5^2 - 1 \\
&= 5^{2k} \times 25 - (25 - 24) \\
&= 25 \times (5^{2k} - 1) + 24 = \dot{24} \ldots\ldots \text{c.q.d.}
\end{aligned}
$$

18) Provar que $\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}\alpha\text{" } 1's}$ é igual a $\dfrac{10^\alpha - 1}{9}$.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
&9 = 9 \times 1 = 10^1 - 1 \therefore 1 = \frac{10^1 - 1}{9} \\
&99 = 9 \times 11 = 10^2 - 1 \therefore 11 = \frac{10^2 - 1}{9} \\
&999 = 9 \times 111 = 10^3 - 1 \therefore 111 = \frac{10^3 - 1}{9} \\
&9.999 = 9 \times 1111 = 10^4 - 1 \therefore 1111 = \frac{10^4 - 1}{9}
\end{aligned}
$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Observando a lei podemos escrever:

$$\underbrace{999\ldots999}_{\text{“}\alpha\text{" } 9's} = 9 \times \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}\alpha\text{" } 1's} = 10^\alpha - 1 \therefore \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}\alpha\text{" } 1's} = \frac{10^\alpha - 1}{9}$$

19) Provar que $\dfrac{10^\alpha - 1}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}\alpha\text{" } 1's}$

Resolução:

Por indução teremos:

1º) Para $\alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{10^1 - 1}{9} = 1$ algarismo

2º) Supondo $\alpha = k \Rightarrow \dfrac{10^k - 1}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}\alpha\text{" } 1's}$

3º) Provando para $\alpha = k + 1$

$$\frac{10^{k+1} - 1}{9} = \frac{9 \times 10^k + 10^k - 1}{9} = 10^k + \frac{10^k - 1}{9} =$$

$$= \underbrace{1000\ldots000}_{\text{“}k\text{" } 0's} + \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}k\text{" } 1's} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}k+1\text{" } 1's}.$$

5.10 Exercícios Propostos

1) Substitua as letras y ou z de modo que o número:

a) $5.2y4$ seja divisível por 3.
b) $4y5$ seja divisível por 3.
c) $1.2y8$ seja divisível por 3.
d) $45y$ seja divisível por 2e 9, simultaneamente.
e) $1.24y$ seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.
f) $20.28y$ seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.
g) $4y8$ seja divisível por 11.
h) $53.9y7$ seja divisível por 11.
i) $25.01y$ seja divisível por 11.
j) $y1.809$ seja divisível por 11.
k) $71.8y9$ seja divisível por 11.
l) $4.y58$ seja divisível por 9.
m) $3.0y5$ seja divisível por 3 e 9, simultaneamente.
n) $35.6y4$ seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.

o) 7.38y seja divisível por 2 e 9, simultaneamente.
p) 538.43y seja divisível por 2 e 3, simultaneamente.
q) 8y.35z seja divisível por 9 e 10, simultaneamente.
r) 3.y7z seja divisível por 3, 5, 9 e 10, simultaneamente.
s) 38.y2z seja divisível por 2, 5 e 9, simultaneamente.
t) 71.y3z seja divisível por 2, 5 e 9, simultaneamente.
u) 3.47y seja divisível por 2 e 3, simultaneamente.
v) 7.52y seja divisível por 2 e 3, simultaneamente.
w) 5.y8z seja divisível por 5 e 11, simultaneamente.

2) Determine o algarismo devem ser escritos em lugar de y e de z no número y.84z, que é menor que 3.000, para que ele seja ao mesmo tempo divisível por 5 e 9.

3) Determine o menor número a ser somado a 4.574, para que se obtenha um número ao mesmo tempo divisível por 9 e 2.

4) Determine o menor número a ser somado a 7.315, para que se obtenha um número divisível por 3.

5) Determine o valor de k para o qual o número 1k31k4 é divisível por 12 mas não é por 9.

6) Substitua as letras y e z no número 4y5z, de modo que, dividido por 5 e por 9, deixe resto 2.

7) Escreva o maior número de quatro algarismos divisível, ao mesmo tempo, por 5 e 93.

8) Se um número for divisível por 5 e por 3, então podemos afirmar que ele é divisível por:

a) $5 + 3$ b) $5 - 3$ c) 5×3 d) $5 \div 3$

9) Para que o número 5.a3b seja divisível, ao mesmo tempo, por 2; 3; 5 e 9, o valor absoluto representado pela letra a deve ser:

a) 4 b) 0 c) 7 d) 1

10) Para que o número 2.y78 seja divisível por 9, o valor da letra y deverá ser:

a) 1 b) 0 c) 3 d) 3

11) Substituindo y e z no número $57.y3z$, respectivamente, por algarismos que tornem esse número divisível por $2, 5$ e 6, ao mesmo tempo, encontramos:

a) 7 e 5 b) 3 e 0 c) 7 e 0 d) 7 e 9

12) O número $37.44y$ será divisível por 15 se y for o algarismo:

a) 7 b) 5 c) 3 d) 1 e) 0

13) O número $43.y72$ será divisível por 6 se y for o algarismo:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

14) É divisível por $2, 3$ e 5, simultaneamente, o número:

a) 235 b) 520 c) 230 d) 510 e) 532

15) Se o número $7y4$ é divisível por 18, então o algarismo y:

a) não existe b) vale 4 c) vale 7 d) vale 9 e) vale 0

16) Se $3.ybz$ é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e 5, então z é igual a:
a) -2 b) -1 c) 2 d) 1 e) 0

17) Que valor deve ser atribuído ao algarismo representado pela letra y para que o número $7.38y$ seja divisível, simultaneamente, por 2 e 9?

18) Substitua as letras a e b por algarismos, em $1a.16b$, de modo que o número resultante seja múltiplo comum de $5, 2$ e 9.

19) Calcule o menor número que deve ser somado a 34.829, para que se obtenha um número divisível por 3.

20) Dado $3.y7z$, substitua as letras por algarismos, de modo que se obtenha um número divisível por $2, 3, 5, 9$ e 10.

21) Dado $3.y7z$, substitua as letras por algarismos, de modo que se obtenha um número divisível, ao mesmo tempo, por 2 e 3.

22) Dado o número $3.y8z$, substitua as letras por algarismos, de modo que se obtenha um número divisível por 9 e por 10.

23) Qual é o menor número a ser subtraído de 51.389, para se obter um múltiplo de 3? E qual é o menor número que se deve somar?

24) Escreva o maior número de quatro algarismos diferentes, divisível por 5 e por 9.

25) No número $3y5.z4w$, determine $y + z + w$, de modo que se obtenha um número, ao mesmo tempo divisível por 5 e por 9.

26) Qual é o menor número que se deve somar a 7.315 para que se obtenha um número divisível por 3?

27) Substitua as letras a e b por algarismos no número $2a3b$, de modo que se obtenha um número divisível por 9 e que, dividido por 10, dê o resto 2.

28) Qual é o número de três algarismos divisível por 2, por 5 e por 9, cujo algarismo das centenas é 8?

29) Escreva o menor número de quatro algarismos que seja ao mesmo tempo divisível por 2, 5 e 9.

30) Qual deve ser o valor do algarismo y em $1.y24$ para que sejam iguais os restos das divisões desse número por 9 e por 10?

31) Qual o número, ao mesmo tempo, divisível por 2, 3 e 5?

a) 453 b) 738 c) 930 d) 1.035

32) O número $123.4y6$ é divisível por 7. Determine o valor absoluto do algarismo y.

33) Determine o algarismo b, para que o número $538.43b$ seja divisível por 2 e por 3.

34) Dos números $2.160, 4.305, 8.202, 5.130$ e 8.210, diga aqueles que são divisíveis, ao mesmo tempo, por 2, 3 e 5.

35) Determine o valor do algarismo a para que o número $7.52a$ seja divisível por 2 e por 3.

36) Escreva o menor número de quatro algarismos diferentes divisível, ao mesmo tempo, por 5 e por 9.

37) Calcule y e z, de modo que o número $3y4.5z8$ seja divisível por 99.

38) Calcule o número de quatro algarismos que satisfaça, ao mesmo tempo, às seguintes condições:

a) seja divisível por 4, por 5 e por 9;
b) o valor absoluto do algarismo dos milhares exceda o valor absoluto do das unidades de três;
c) o valor absoluto do algarismo das centenas seja o dobro do valor absoluto do algarismo das dezenas.

39) Certo número é composto de três unidades de oitava ordem, duas de sétima, uma de quinta, cinco de quarta e duas de terceira. Escreva o algarismo das unidades de primeira ordem, de modo que o número seja ao mesmo tempo divisível por 5 e por 9.

40) Substitua em $38.a2b$ as letras a e b por algarismos, de maneira que o número resultante seja, ao mesmo tempo, divisível por 2, 5 e 9.

41) Que algarismo deve ser escrito no lugar da letra a, para que o número $356a4$ seja, simultaneamente, divisível por 4 por 9?

42) Escreva um número de cinco algarismos divisível, ao mesmo tempo, por 5, 9 e 10.

43) O número $71.a3b$ é divisível, ao mesmo tempo, por 2, por 5 e por 9. Determine os valores absolutos dos algarismos a e b.

44) Determine x e y de modo que o número $N = 28x.75y$ seja divisível por 33.

45) Dê exemplos de um número de cinco algarismos, ao mesmo tempo divisível por $2, 3, 5$ e 9.

46) Calcule o menor número que deve ser somado a 3.854, para que se obtenha um múltiplo de 9, e o menor número que se deve diminuir, para obter-se um múltiplo de 3.

47) O algarismo das unidades de um número, que somente Jeann conhece, é o 9, e a soma dos valores absolutos dos algarismos do mesmo número é 67. Determine os restos das divisões desse número, que você não conhece, por 2, por 3, por 5 e por 10.

48) Escreva o menor número de seis (6) algarismos, ao mesmo tempo, divisível por $2, 3, 5$ e 9.

49) Que algarismo deve substituir a letra m, para que o número $5.8m6$ seja divisível, simultaneamente, por 3 e por 4?

50) Escreva o menor número possível com os algarismos $5, 7, 8$ e 3. Quantas dezenas têm o número escrito?

51) Substitua as letras A e B, de modo que o número $5A.38B$ seja divisível, ao mesmo tempo, por $5, 9$ e 10.

52) O número $71.a3b$ é divisível, ao mesmo tempo, por 2, por 5 e por 9. Quais os valores absolutos dos algarismos a e b?

53) Determine o menor número a ser subtraído de 4.574 para que se obtenha um número, ao mesmo tempo, divisível por 9 e por 2.

54) Determine um número de três algarismos que, diminuído de três unidades, seja divisível por 5 e por 14, e ainda, que a soma de seus algarismos seja igual a 14.

55) Qual é menor número de três algarismos que, dividido por 5 e por 9, deixa resto 4?

56) Dado o número 70.703, substitua os zeros por algarismos significativos iguais, de maneira que o novo número assim formado, dividido por 5 ou por 9, gere o mesmo resto.

57) Dê o menor número de quatro algarismos divisível por $2, 5$ e 9, sabendo que o algarismo das centenas é também divisível por 5 e igual a oito vezes o valor absoluto do algarismo das dezenas.

58) À direita do número 472, escreva dois algarismos, de modo a formar um número de cinco algarismos divisível por 3 e por 10. Apresente todas as soluções.

59) Qual é o menor número de três algarismos divisível, ao mesmo tempo, por 5 e por 9?

60) Um número dividido por 2 deixa resto 1 e, dividido por 3, deixa resto 2. Determine o resto da divisão desse número por 6.

61) Um número dividido por 5 gera resto 3 e, dividido por 9, gera resto 4. Determine o resto da divisão desse número por 45.

62) Determine os restos das divisões por $2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25$ e 125 do número $8.493.571.607$.

63) Determine, sem efetuar a divisão, o resto da divisõe por 6 do número $4.015.268$.

64) Na multiplicação 8.473×587, inverteu-se o multiplicador e obteve-se 8.473×785. Determine o resto da diferença desses dois produtos por 11.

65) Determine o resto da divisão por 4 da soma: $489.357.162 + 730.945 + 93.543 + 59.428$.

66) Determine os restos da divisão por $3, 5$ e 8 da soma: $7.438.918 + 89.437.217 + 83.941$.

67) Determine os restos das divisões por $2, 6$ e 11 da soma: $32.107 + 40.353 + 51.249$.

68) Determine os restos das divisões por $3, 5$ e 8 do produto: $9.428 \times 2.167 \times 8.359$.

69) Determine os restos das divisões por $4, 9$ e 11 do produto: $9.517 \times 804.152 \times 37.286$.

70) Determine:
 a) o gaussiano do número 3 de módulo 9;

b) o gaussiano do número 7 de módulo 11.

71) Qual é o resto da potência 743^{48} por 6?

72) Qual é o resto da divisão de $2.304^{227} + 2^{227}$ por 16?

73) Calcule o dígito da ordem das dezenas das expansões de:

a) 3^{50} b) 7^{100} c) 11^{2004}

74) Calcule o dígito da ordem das centenas da expansão de 7^{707}.

75) Determine o resto da divisão por 9 do número 684.381^{249}.

76) Determine o resto da divisão por 4 do número $8.935.013^{437}$.

77) Determine o resto da divisão por 11 do número 5.317^{253}.

78) Determine os restos das divisões por 9 da soma 173^{6n+1}, 173^{6n+2}, 173^{6n+3}, 173^{6n+4}, 173^{6n+5}.

79) Determine o resto da divisão por 8 da soma: $738.947^{74} + 905.637^{39}$.

80) Determine o resto da divisão por 25 da soma: $492.830^{41} + 8.379.476^{93} + 54.652^{137}$.

81) Determine o resto da divisão por 11 do produto gerado por $3.941^{39} \times 85.172^{483}$.

82) Determine o resto da divisão por 5 do produto gerado por:
$83.942^{359} \times 7.859^{207} \times 948^{179} \times 7.496^{723}$.

83) Calcule o resto da divisão por 9 e 11 da seguinte expressão:
$8.291^3 + 7.283 \times 9.372^2 + 8.193^4$.

84) Calcule o resto da divisão por 8 e 11 da seguinte expressão:
$548 \times \{[912^2 \times (248 + 5.829)]^3 \times 4.291\}^2 + 7.631^2$.

85) Determine a de maneira que o número $73.5a8$ seja divisível por 3 e 4.

86) Determine a e b de maneira que o número $27.4ab$ seja divisível por 8 e 9.

87) Calcule o valor do algarismo a para que o número $7a4$ se torne divisível por 3 e por 4.

88) Sendo y um algarismo, determine o resto da divisão de $25 \times 38.y54$ por 4.

89) Determine os números de três algarismos divisíveis por 4 e 9 e no qual o algarismo das dezenas seja 3.

90) Determine um número de dois algarismos que, dividido por 9, gera resto 3 e, dividido por 11, gera resto 4.

91) Determine todos os números de três algarismos divisíveis por 2 e 11 e no qual o algarismo das dezenas seja 2.

92) Dado o número 705.902, determine os grupos de algarismos pelos quais se devem substitua os dois zeros, para que o número obtido seja divisível por 4 e 9.

93) O número A, dividido por 11, deixa resto 2 e B, dividido pelo mesmo divisor, deixa resto 3. Calcule o menor número a ser subtraído de $A^3 + B^2$, para que se obtenha um múltiplo de 11.

94) Um número dividido por 7, gera resto 2 e dividido por 2, resto 1. Determine o resto da divisão desse número por 14.

95) Calcule os possíveis valores dos algarismos x, y e z, de modo que o número $9x.8yz$ seja divisível por 180.

96) Determine o menor número de três algarismos, múltiplo de 9 e de 5, de modo que o resto de sua divisão por 11 seja 4.

97) Um número A, dividido por 11, deixa resto 5. Calcule o menor número natural que se deve somar a $A^3 - 3$, para obter-se um múltiplo de 11.

98) Um número A, dividido por 9, deixa resto 4. Calcule o menor número a ser somado a $A^2 + 3$, para que se obtenha um múltiplo de 9.

99) Dividindo-se o número N por 11, obtém-se resto 4. Determine é o menor número a ser subtraído de para que se obtenha um múltiplo de 11.

99) Um número A, dividido por 9, gera resto 4, e o número B, dividido por 9, gera resto 2. Determine o menor número a ser somado à $A^2 + B^2 + 3$, para que se obtenha um múltiplo de 9.

100) Determine o algarismo m tal que, $\underbrace{88\ldots8}_{\text{50 algs}}\, m\, \underbrace{9\ldots99}_{\text{50 algs}}$ seja divisível por 7.

101) De quanto aumenta o número 542 quando intercalarmos n zeros entre 5 e 4?

102) Se $n = 10^7 - 10$, então n não é múltiplo de:

a) 9 b) 10 c) 12 d) 15 e) 18

103) Determine o resto da divisão por 11 do número $abcdef$, sabendo que:

$a = x + 4$, $b = x - 1$, $c = x + 3$, $d = x + 6$, $e = x + 4$, $f = x + 1$

104) Quais são os números naturais de quatro algarismos iguais ao cubo da soma de seus algarismos?

105) Sabe-se que o produto gerado por $12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 + 14$, é divisível por 13. Qual é o resto da divisão do número $13 \times 12 \times 11 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ por 169?

a) 143 b) 149 c) 153 d) 156 e) 162

106) Os números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se os algarismos de M são os mesmos algarismos de N, na ordem inversa, então $M + N$ é necessariamente múltiplo de:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

107) Seja $N = xyzzyx$ um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então, $N_1 + N_2$ é igual a:

a) $1.008.800$ b) $1.156.650$ c) $1.106.650$ d) $1.157.000$ e) $1.209.000$

108) Se a e b não forem múltiplos de 13, e $2a + b$ divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:

a) $91a+b$ b) $92a+b$ c) $93a+b$ d) $94a+b$ e) $95a+b$

109) Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde * indica o último algarismo, forma-se um número de 1.002 algarismos, ou seja,

$$123456789101112131415161718192021\ldots*$$

O resto da divisão do número formado por 16 é igual a:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

110) Se n for um número natural, demonstre que:

a) 2^{4n-1} é divisível por 3 e 5;
b) $3^{2n+2}-2^{n+1}$ é divisível por 7;
c) $10^{n+3}\times 4^{n+2}+5$ é divisível por 9;
d) $3^{n+1}-5^{2n+1}+7^{4n+3}$ é divisível por 11;
e) $2^{12n+9}-5^{4n+1}$ é divisível por 13;
f) $3^{4n+4}-4^{3n+3}$ é divisível por 17;
g) $3^{3n+2}+2^{n+4}$ é divisível por 25;
i) $7^{2n}-3^{2n}$ é divisível por 10;
j) $3^{2n+1}+40n-3$ é divisível por 64;
k) 2^{2n-1} é múltiplo de 3.

111) Um número natural N deixa: resto 2 quando dividido por 3; resto 3 quando dividido por 7 e resto 19 quando dividido por 41. Qual é o resto da divisão do número $k=(N+1)\times(N+4)\times(N+22)$ por 861?

112) Determine o resto da divisão do número $50494847\ldots04030201$ por 11.

113) Os primeiros 44 inteiros positivos são escritos do seguinte modo:

$$N = 123456789101112...424344$$

Qual é o resto da divisão de N por 45?

114) Se $2.346.576.789\times 654.323.456 = 1.535.420.23\mathbf{a}.347862.784$, ache **a**.

115) Se $123.456.789\times 987.654.321 = 121.932.6\mathbf{a}1.112.635.2\mathbf{b}$, calcule $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

116) Se $3^{50} = 717.897.987.691.\mathbf{a}52.588.770.249$, calcule o valor de **a**.

117) Se $2^{80} = \mathbf{a}2.089.258.196.146.289.174.706.17\mathbf{b}$, calcule $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

118) Se $7^{30} = \mathbf{a}25.393.340.290.692.258.087.863.249$, calcule o valor de **a**.

119) Prove que:

"*Se* $A \equiv B\,(\text{mod. } d)$ *então* $A \times k \equiv B \times k\,(\text{mod. } d \times k)$"

120) Ache o resto da divisão de $35^{36^{37}}$ por 11.

Respostas

1)	**a)** 1; 4 **e** 7	**2)**	$y = 1$; $z = 5$
	b) 0; 3; 6 **ou** 9	**3)**	16
	c) 1; 4 **e** 7	**4)**	2
	d) 0	**5)**	6
	e) 2	**6)**	$y = 0$ **e** $z = 2$
	f) 6	**7)**	**9.990**
	g) 1	**8)**	**c**
	h) 7	**9)**	**d**
	i) 4	**10)**	**a**
	j) 6	**11)**	**b**
	k) 1	**12)**	**e**
	l) 1	**13)**	**c**
	m) 1	**14)**	**d**
	n) 0 **ou** 9	**15)**	**c**
	o) 0 **ou** 9	**16)**	**e**
	p) 4	**17)**	0
	q) $y = 2$ **e** $z = 0$	**18)**	$a = 1$ **e** $b = 0$
	r) $y = 8$ **e** $z = 0$	**19)**	1
	s) $y = 5$ **e** $z = 0$	**20)**	$y = 8$ **e** $z = 0$
	t) $y = 7$ **e** $z = 0$	**21)**	$y = 2$; $z = 0$
	u) 4		$y = 0$; $z = 2$
	v) 4		$y = 1$; $z = 4$
	w) $y = 8$ **e** $z = 5$		$y = 2$; $z = 6$
22)	$y = 7$ **e** $z = 0$		$y = 0$; $z = 8$
23)	2 **e** 1	**24)**	9.810
25)	6 **ou** 15	**26)**	2
27)	$a = 1$ **e** $b = 2$	**28)**	810
29)	1.080	**30)**	6
31)	**c**	**32)**	6
33)	4	**34)**	2.160 **e** 5.130
35)	4	**36)**	1.035
37)	$y = 6$ **e** $z = 1$	**38)**	3.420
39)	5	**40)**	$a = 5$ **e** $b = 0$
41)	0	**42)**	10.080
43)	$a = 7$ **e** $b = 0$	**44)**	$y = 2$; $z = 0$
45)	**Subjetiva**		$y = 0$; $z = 2$
46)	7 **e** 2		$y = 1$; $z = 4$
47)	1; 1; 4 **e** 9	**48)**	100.080
49)	5	**50)**	3.578; $35 dezenas$
51)	$a = 2$ **e** $b = 0$	**52)**	$a = 7; b = 0$
53)	2	**54)**	563
55)	139	**56)**	2
57)	9.000	**58)**	47.205; 47.220; 47.250; 47.265; 47.280 **e** 47.295
59)	135	**60)**	5
61)	13	**62)**	1; 2; 3; 2; 7 **e** 5
63)	1	**64)**	0
65)	2	**66)**	1; 1 **e** 0
67)	1; 1 **e** 1	**68)**	2; 4 **e** 4
69)	0; 1 **e** 2	**70)**	**a)** 6; **b)** 7
71)	1	**72)**	0
73)	**a)** 0; **b)** 4; **c)** 4	**74)**	5
75)	0	**76)**	1

77) 9
78) 8
79) 1
80) 23
81) 7
82) 4
83) 8 e 8
84) 1
85) 4
86) $a = 3$ e $b = 2$
87) 2
88) 2
89) 432 e 936
90) 48
91) 220; 924; 726 e 528
92) 3 e 1; 1 e 3; 8 e 5; 6 e 7; 4 e 9
93) 6
94) 9
95) $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$
$x = 8$, $y = 2$ e $z = 0$
$x = 6$, $y = 4$ e $z = 0$
$x = 4$, $y = 6$ e $z = 0$
$x = 2$, $y = 8$ e $z = 0$
96) 180
97) 10
98) 1
99) 5
100) 5
101) $500 \times 999\ldots9$ ("n" noves) unidades
102) c
103) 6
104) 4.913 e 5.832
105) d
106) e
107) b
108) c
109) e
110) subjetiva
111) 0
112) 10
113) 9
114) 4
115) 12
116) 8
117) 15
118) 6
119) subjetiva
120) 9

Capítulo 6

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

6.1 Máximo Divisor Comum (MDC)

É o maior divisor comum de dois ou mais números dados.

6.1.1 Determinação do MDC

1º modo: Através da intersecção dos divisores comuns

Basta determinarmos, separadamente, os divisores dos números dados e, em seguida, os divisores comuns.

Ex.: Seja determinar o mdc dos números 60 e 36.

1º passo: $D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
2º passo: $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36\}$
3º passo: $D(60) \cap D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Vemos que, dentre os divisores comuns, o maior é o 12, portanto, o $\mathrm{mdc}(60; 36) = 12$.

2º modo: Com auxílio da decomposição em fatores primos

Regra

a) Decompõem-se os números dados em fatores primos;

b) A potência, ou o produto, resultante das potências do(s) fator(es) primo(s) comum(ns) da(s) base(s) elevada(s) ao(s) menor(es) expoente(s), será o mdc procurado.

Ex$_1$.: Determinar o mdc dos números 48 e 40.

48	2		40	2
24	2		20	2
12	2		10	2
6	2		5	5
3	2		1	
1				

$48 = 2^4 \times 3 \qquad 40 = 2^3 \times 5$

Portanto o $\mathrm{mdc}(48; 40) = \underset{\text{fator primo comum}}{\overset{\text{menor expoente}}{2^3}} = 8$

Ex$_2$.: Determinar o mdc dos números 120 e 108

120	2		108	2
60	2		54	2
30	2		27	3
15	3		9	3
5	5		3	3
1	1			

$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5 \qquad 108 = 2^2 \times 3^3$

Portanto o $\mathrm{mdc}(120; 108) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

6.1.2 Propriedades

$1^{\underline{a}}$ *O* mdc *de dois ou mais números primos entre si é sempre igual a* 1.

Sabemos que dois ou mais números são primos entre si, quando forem divisíveis simultaneamente apenas pela unidade.

Se o 1 é o único divisor, ele também será o maior divisor comum.

Ex$_1$.: $\mathrm{mdc}(7; 3) = 1$
Ex$_2$.: $\mathrm{mdc}(11; 4) = 1$
Ex$_3$.: $\mathrm{mdc}(4; 9) = 1$

Ex$_4$.: $\mathrm{mdc}(4; 8; 15) = 1$

Ex$_5$.: $\mathrm{mdc}(99; 100) = 1$

2ª *O* mdc *de dois ou mais números naturais, onde o menor seja divisor do(s) maior(es), é o menor.*

Suponha A e B dois números naturais $(A > B)$ e B divisor de A.

Como B é divisor de A e divisor de si mesmo, então B será o maior divisor comum.

Ex$_1$.: $\mathrm{mdc}(4; 8) = 4$

Ex$_2$.: $\mathrm{mdc}(60; 36; 12) = 12$

Obs.: - Quando o menor número não for divisor do(s) maior(es), devemos dividi-lo por 2, por 3, por 5,... ou seja, pela sucessão dos números primos absolutos, até encontrarmos o primeiro quociente que seja divisor do(s) outro(s). Esse quociente será o mdc desejado.

Ex$_1$.: $\mathrm{mdc}(60; 36)$

1º) 36 não é divisor de 60, então;

2º) $36 : 2 = 18$, que também não é divisor de 60, então;

3º) $36 : 3 = 12$, que é divisor de 60, daí, o $\mathrm{mdc}(60; 36) = 12$

3ª *Multiplicando-se ou dividindo-se dois ou mais números naturais por um outro qualquer (diferente de zero), o* mdc *deles ficará multiplicado ou dividido por esse número.*

Para efeito de demonstração, vamos supor que M seja o mdc de dois números A e B.

Sabemos que ao multiplicarmos A e B por um número $k (k \neq 0)$, o resto de $A \times k$ por $B \times k$ será $r_1 \times k$, do mesmo modo que o resto de $B \times k$ por $r_1 \times k$ é $r_2 \times k$ e, finalmente, o resto de $r_1 \times k$ por $r_2 \times k$ será igual ao $M \times k$, como queríamos demonstrar.

4ª *Dividindo-se dois ou mais números naturais pelo* mdc *deles, encontraremos sempre, quocientes primos entre si.*

Sejam $A, B, C, \ldots$ números dados e d o mdc deles.

Se o $\mathsf{mdc}(A, B, C, \ldots) = d \Rightarrow \mathsf{mdc}\left(\frac{A}{d}, \frac{B}{d}, \frac{C}{d}, \ldots\right) = \frac{d}{d} = 1.$

Fazendo $\frac{A}{d} = q'$, $\frac{B}{d} = q''$, $\frac{C}{d} = q'''$, $\ldots$ então, teremos:

$\mathsf{mdc}(q', q'', q''', \ldots) = 1$, portanto, $q', q'', q''', \ldots$ serão quocientes primos entre si, c.q.d.

Ex$_1$.: $\mathsf{mdc}(60; 36) = 12 \rightarrow \begin{cases} 60 : 12 = 5 \\ 36 : 12 = 3 \end{cases}$

5 e 3 são primos entre si.

Ex$_2$.: $\mathsf{mdc}(120; 60; 36) = 12 \rightarrow \begin{cases} 120 : 12 = 10 \\ 60 : 12 = 5 \\ 36 : 12 = 3 \end{cases}$

$10; 5$ e 3 são primos entre si.

6.1.3 3º modo: Através das Divisões Sucessivas

Teorema:

O máximo divisor comum de dois números naturais é igual ao máximo divisor comum do menor com o resto da divisão desses números.

Suponhamos A e B ($A > B, B \neq 0$) componentes de uma divisão inexata.

Se B não dividir $A \Rightarrow A = \dot{B} + r$.

Sabemos que o divisor comum de A e B também o é de r.

Se B não for divisor de A, então o mdc de A e B será o mesmo que o de B e r; se r for o mdc de B e r, então o $\mathrm{mdc}(A;B) = r$.

Generalizando, teremos que:

Se $B|A \rightarrow \mathrm{mdc}(A;B) = B$, caso contrário,
$A = \dot{B} + r_1 \rightarrow \mathrm{mdc}(A;B) = \mathrm{mdc}(B;r_1)$
Se $r_1|B \rightarrow \mathrm{mdc}(B;r_1) = r_1$, caso contrário,
$B = \dot{r_1} + r_2 \rightarrow \mathrm{mdc}(A;B) = \mathrm{mdc}(B;r_1) = \mathrm{mdc}(r_1;r_2) = \ldots$
Esse procedimento só será interrompido quando o resto for zero, ocasião em que poderemos determinar o mdc

Dessa demonstração, conclui-se que:

Para determinarmos o mdc de dois números, primeiramente dividimos o maior pelo menor; em seguida, o divisor pelo resto; depois, o primeiro resto pelo segundo resto e, assim, sucessivamente, até obtermos um quociente exato do último divisor pelo último resto. O último divisor será o maior divisor comum procurado.

Ex.: Seja determinar o mdc dos números 60 e 36.

$1^{\underline{o}}$) $\begin{array}{r|l} 60 & 36 \\ \hline 24 & 1 \end{array}$ $\quad \mathrm{mdc}(60;36) = \mathrm{mdc}(36;24)$

$2^{\underline{o}}$) $\begin{array}{r|l} 36 & 24 \\ \hline 12 & 1 \end{array}$ $\quad \mathrm{mdc}(36;24) = \mathrm{mdc}(24;12)$

$3^{\underline{o}}$) $\begin{array}{r|l} 24 & 12 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$ $\quad \mathrm{mdc}(24;12) = 12$

Conclusão: $\mathrm{mdc}(60;36) = \mathrm{mdc}(36;24) = \mathrm{mdc}(24;12) = 12$

Supondo-se A e B ($A > B$) dois números dados e aplicando a regra anterior, teremos:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline r_1 & q_1 \end{array}$$

Se, $\quad r_1 \neq 0 \rightarrow \begin{array}{r|l} B & r_1 \\ \hline r_2 & q_2 \end{array}$

Se, $\quad r_2 \neq 0 \rightarrow \begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ \hline r_3 & q_3 \end{array}$

Se, $r_3 \neq 0 \rightarrow \begin{array}{c|c} r_2 & r_3 \\ \hline r_4 & q_4 \end{array}$

Se, $r_{n-1} \neq 0 \rightarrow \begin{array}{c|c} r_{n-2} & r_{n-1} \\ \hline r_n & q_n \end{array}$

Se, $r_n = 0$, então o mdc será: r_{n-1} .

Organizando essas divisões sucessivas, certo matemático, que também foi chamado de Euclides[1], idealizou o dispositivo de cálculo mostrado a seguir:

	q_1	q_2	q_3	$q_4 \ldots$	q_{n-1}	q_n
A	B	r_1	r_2	$r_3 \ldots$	r_{n-2}	r_{n-1}
r_1 $\neq 0$	r_2 $\neq 0$	r_3 $\neq 0$	$\ldots$	r_{n-1} $\neq 0$	$r_n = 0$	

Observações:

$1^{\underline{a}}$) $q_1, q_2, q_3, \ldots$ e q_{n-1} são números maiores ou iguais a 1 (≥ 1) e,

$2^{\underline{a}}$) q_n só poderá ser maior ou igual a $2 (\geq 2)$, pois o menor valor que r_{n-1} ($\mathrm{mdc}(A; B)$) pode assumir é o 1. Se o mdc de dois números é o 1, então r_{n-1} e r_{n-2} são primos entre si. Como o menor primo entre si com o 1 é o 2, então o menor valor de r_{n-2} é igual a 2.

Portanto, se $r_{n-2} = 2$ e $r_{n-1} = 1$, então $q_n = \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = \dfrac{2}{1} = 2$.

Conclusão: O menor valor que r_n pode assumir é o 2.

6.1.4 Exercícios Resolvidos

1) Achar o mdc de 60 e 36 através do algoritmo de Euclides

60	36	

$\Rightarrow$

	1	
60	36	
24		

$\Rightarrow$

	1	
60	36	24
24		

$\Rightarrow$

	1	1
60	36	24
24	12	

$\Rightarrow$

	1	1	2
60	36	24	12
24	12	0	

$\Rightarrow \mathrm{mdc}(60; 36) = 12.$

[1]Euclides ($365a.c - 300a.c$)

2) Na determinação do mdc de dois números A e B, através do "algoritmo de Euclides", encontraram-se três quocientes, sendo os mesmos os menores possíveis. Calcular A e B, sabendo-se que o mdc é igual a 7.

Resolução:

Se os quocientes são os menores possíveis, podemos afirmar que são 1; 1 e 2, respectivamente. Logo, tem-se:

a)

	1	1	2
A	B		7

b)

	1	1	2
A	B	x	7
y	7	0	

$$x = 2 \times 7 + 0$$
$$x = 14 = y$$

c)

	1	1	2
A	B	14	7
14	7	0	

$$B = 1 \times 14 + 7 \Rightarrow B = 21$$

d)

	1	1	2
A	21	14	7
14	7	0	

$$A = 1 \times 21 + 14 \Rightarrow A = 35$$

Resp.: 35 e 21.

3) Determinar o maior número natural pelo qual se deve dividir 574 e 754, a fim de que os restos sejam 15 e 23, respectivamente.

Resolução

Seja d o número desejado.

De acordo com os dados, teremos:

$\begin{array}{l|l} 574 & d \\ \cline{2-2} 15 & q_1 \end{array}$ .... (I)

e

$\begin{array}{l|l} 754 & d \\ \cline{2-2} 23 & q_2 \end{array}$ .... (II)

De (I), temos:

$574 = d \times q_1 + 15$ ou $d \times q_1 = 574 - 15 \therefore q_1 = \dfrac{559}{d}$

De (II), temos:

$754 = d \times q_2 + 23$ ou $d \times q_2 = 754 - 23 \therefore q_2 = \dfrac{731}{d}$

Como d é divisor simultâneo de 559 e 731, e queremos determinar o maior, basta calcularmos o mdc dos números 559 e 731, ou seja:

	1	3	4
731	559	172	43
172	43	0	

Resp.: O número procurado é o 43

4) Calcular a diferença (positiva) de dois números naturais, que têm para produto 2.304 e para máximo divisor comum o número 12.

Resolução:

Supondo A e B dois números, teremos, de acordo com os dados:

$$\begin{cases} A \times B = 2.304 \\ mdc(A; B) = 12 \end{cases}$$

$\dfrac{A}{12} = q' \Rightarrow A = 12 \times q'$ .... (I)

$\dfrac{B}{12} = q'' \Rightarrow B = 12 \times q''$ .... (II)

Multiplicando-se (I) por (II), teremos:

$(12 \times q') \times (12 \times q'') = 2\,304$

$q' \times q'' = \dfrac{2\,304}{144}$ ou

$q' \times q'' = 16$

Como q' e q'' são números primos entre si, teremos que determinar o(s) par(es) de números que satisfazem tal condição, daí,

Se $q' \times q'' = 16$, então, $q' = 1$ e $q'' = 16$

Substituindo q' e q'' em (I) e (II), teremos:

$A = 12 \times 1 \therefore A = 12$

$B = 12 \times 16 \therefore B = 192$

Logo, a diferença positiva será $192 - 12 = 180$.

5) Dividindo-se dois números por 5, o mdc passou a ser 9. Determinar esses números, sabendo que um deles é o triplo do outro.

Resolução:

Supondo $A = x$ o primeiro número, então, o segundo (B) será $3x$.

De acordo com os dados, teremos:

$\mathrm{mdc}\left(\dfrac{x}{5}, \dfrac{3x}{5}\right) = 9$, ou, o $\mathrm{mdc}(x; 3x) = 45$ ($3^{\underline{a}}$ propriedade).

Aplicando agora a $2^{\underline{a}}$ propriedade, concluiremos que o mdc de x e $3x$ é x, portanto, x igual a 45, logo,

se $x = 45$, então, $3x = 135$.

Resp.: 45 e 135

6) Uma pessoa dispõe de três pedaços de arame do mesmo tipo, cujas medidas são: $2,40\mathrm{m}$, $3.200\mathrm{mm}$ e $0,0056\mathrm{km}$. Desejando obter o maior comprimento possível, sem qualquer perda, calcular número de pedaços a serem obtidos.

Resolução:

$2,40\,\mathrm{m} = 240\,\mathrm{cm}$; $3\,200\,\mathrm{mm} = 320\,\mathrm{cm}$; $0,0056\,\mathrm{km} = 560\,\mathrm{cm}$

$\text{mdc}(240;320;560) = \text{mdc}(24;32;56) = 8 \times 10 = 80$, daí:

$\dfrac{240\,\text{cm}}{80\,\text{cm}} = 3$ pedaços de $80\,\text{cm}$;

$\dfrac{320\,\text{cm}}{80\,\text{cm}} = 4$ pedaços de $80\,\text{cm}$;

$\dfrac{560\,\text{cm}}{80\,\text{cm}} = 7$ pedaços de $80\,\text{cm}$.

Total: $3 + 4 + 7 = 14$ pedaços.

Obs.: $240\,\text{cm} + 320\,\text{cm} + 560\,\text{cm} = 1.120\,\text{cm}$

$1120\,\text{cm} \div 80 = 14$ pedaços

7) O mdc de dois números $A = 360$ e $2^x \times 5^y$ é igual a 8. Calcular $x^0 + y^x$.

Resolução:

$A = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$B = 2^x \times 5^y$

$\text{mdc}(A;B) = 8 = 2^3$

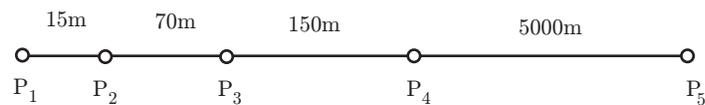
Como o mdc de 2^3 e 2^x é igual a 8, infere-se que $x > 3$ e como não há o fator 5 no mesmo, y terá que ser igual a zero. Daí ...

$x^0 + y^x = 1 + 0^x = 1, \ \forall x \geq 3.$

8) Em uma rua existe um trecho com $200\,\text{m}$ de comprimento e querem-se colocar postes de 8 em 8 metros. Sabendo-se que deverão existir postes nos extremos, determinar o número de postes que deverão ser adquiridos.

Resolução:

número de postes $= \dfrac{200}{8} + 1 = 26$ postes.

9) Os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, no desenho seguinte, são postes, já existentes em uma estrada, cujas distâncias estão indicadas ...

Quer-se colocar outros entre os já existentes, de modo que a distância entre eles seja a mesma e a maior possível. Determinar o número de postes necessários.

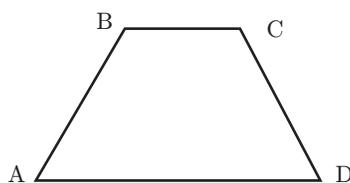
Resolução:

O mdc das distâncias $15\,\mathrm{m}$, $70\,\mathrm{m}$, $150\,\mathrm{m}$ e $500\,\mathrm{m}$ é igual a $5\,\mathrm{m}$.

$15\,\mathrm{m} : 5\,\mathrm{m} = 3; 70\,\mathrm{m} : 5\,\mathrm{m} = 14; 150\,\mathrm{m} : 5\,\mathrm{m} = 30; 500\,\mathrm{m} : 5\,\mathrm{m} = 100$

$3 + 14 + 30 + 100 = 147 - 2$ (extremos) -5 (já existentes) $= 140$ postes.

10) Quer-se colocar mourões[2] sobre a linha imaginária que delimita os lados do terreno, cujas dimensões estão indicadas a seguir:

AB = 30 m
BC = 20 m
CD = 40 m
AD = 50 m

Sabendo-se que a distância entre eles deve ser a mesma, e a maior possível, determinar o número de mourões que devem ser adquiridos.

Resolução:

1º O $\mathrm{mdc}(30\,\mathrm{m}, 20\,\mathrm{m}, 40\,\mathrm{m}, 50\,\mathrm{m}) = 10\,\mathrm{m}$

2º De A até B $\Rightarrow 30\,\mathrm{m} : 10\,\mathrm{m} = 3$ mourões;

De B até $C \Rightarrow 20\,\mathrm{m} : 10\,\mathrm{m} = 2$ mourões;

De C até $D \Rightarrow 40\,\mathrm{m} : 10\,\mathrm{m} = 4$ mourões;

De D até $A \Rightarrow 50\,\mathrm{m} : 10\,\mathrm{m} = 5$ mourões.

Conclusão: Deverão ser adquiridos 14 mourões

11) O mdc de dois números é 15. Dividindo-se esses dois números pelo mmc deles, encontraremos quocientes cuja soma é igual a 10. Determinar os pares de números que satisfazem essas condições.

[2] Estacas que servem para sustentar os fios de uma cerca.

Resolução:

Sejam a e b os números a serem determinados, onde o $mmc(a; b) = M$.

De acordo com os dados, podemos escrever:

1º $mdc(a; b) = D = 15$

2º $\frac{M}{a} + \frac{M}{b} = 10$ .... (I)

Sabemos que $a \times b = M \times D \Rightarrow M = \frac{a \times b}{15}$ .... (II)

Substituindo (II) em (I) e simplificando, teremos: $\frac{a}{15} + \frac{b}{15} = 10$.

Fazendo:

$\frac{a}{15} = q' \Rightarrow a = 15q'$ .... (III)

$\frac{b}{15} = q'' \Rightarrow b = 15q''$ .... (IV)

$q' + q'' = 10 \ldots q'$ e q'' primos entre si.

1º) $q' = 1$ e $q'' = 9 \Rightarrow$ em (III) e (IV), $a = 15$ e $b = 135$

2º) $q' = 3$ e $q'' = 7 \Rightarrow$ em (III) e (IV), $a = 45$ e $b = 105$

Resp.: 15 e 135; 45 e 105.

6.2 Mínimo Múltiplo Comum (em $\mathbb{N}^*$)-MMC

É o menor múltiplo comum de dois ou mais números dados.

6.2.1 Notação

Para indicarmos o mínimo múltiplo comum de vários números $(A, B, C, \ldots)$, escreveremos: $mmc(A, B, C, \ldots)$.

6.2.2 Determinação do MMC

1º modo: Através da intersecção do(s) menor(es) múltiplo(s) comum(ns).

Ex.: Seja determinar o mmc dos números 3 e 4.

1º passo: $M(3)^* = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, \ldots\}$

2º passo: $M(4)^* = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \ldots\}$

3º passo: $M(3)^* \cap M(4)* = \{12, 24, 36, \ldots\}$

Vê-se que, dentre os múltiplos comuns, o menor é o 12, daí, o $mmc(3; 4) = 12$.

2º modo: Através da decomposição em fatores primos

1º caso: Por decomposição simultânea.

Sejam $A, B, C, \ldots$ números naturais, diferentes de zero. Desejando determinar o mmc deles, divide-se $A, B, C, \ldots$ pelos divisores primos $a, b, c, \ldots$ conforme o algoritmo a seguir:

$$\begin{array}{l|l}
A - B - C - \cdots & \left.\begin{array}{l} a \\ a \\ a \\ \vdots \end{array}\right\} \alpha \text{ fatores} \\
& \left.\begin{array}{l} b \\ b \\ b \\ \vdots \end{array}\right\} \beta \text{ fatores} \\
& \left.\begin{array}{l} c \\ c \\ c \\ \vdots \end{array}\right\} \gamma \text{ fatores}
\end{array}$$

$\mathrm{mmc}(A, B, C, \dots) = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times \cdots = P.$

Ex$_1$.: Determinar o mmc de 60 e 36.

$$\begin{array}{rcr|l}
60 & - & 36 & 2 \\
30 & - & 18 & 2 \\
15 & - & 9 & 3 \\
5 & - & 3 & 3 \\
5 & - & 1 & 5
\end{array}$$

Daí, o $\mathrm{mmc}(60; 36) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$.

Ex$_2$.: Determinar o mmc dos números 48; 100 e 120.

$$\begin{array}{rcrcr|l}
48 & - & 100 & - & 120 & 2 \\
24 & - & 50 & - & 60 & 2 \\
12 & - & 25 & - & 30 & 2 \\
6 & - & 25 & - & 15 & 2 \\
3 & - & 25 & - & 15 & 3 \\
1 & - & 25 & - & 5 & 5 \\
1 & - & 5 & - & 1 & 5 \\
1 & - & 1 & - & 1 &
\end{array}$$

Daí, o $\mathrm{mmc}(48; 100; 120) = 2^4 \times 3 \times 5^2 = 16 \times 3 \times 25 = 1\,200$.

2º caso: Por decomposição "separada".

A condição geral de multiplicidade (4.14) induz-nos a seguinte regra:

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é igual ao produto das potências dos fatores primos comuns, e não comuns, elevadas aos de maiores expoentes.

Ex$_1$.: Determinar o mmc de 120 e 36.

1º passo:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad / \; 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

2º passo:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad / \; 2^2 \times 3^2$$

3º passo: $\mathrm{mmc}(120; 36) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = 360.$

6.2.3 Propriedades

1ª *Qualquer múltiplo do* mmc *de dois números, também será múltiplo desses números.*

Sejam A e B dois números naturais ($\neq 0$).
Se m for o mmc deles, então, $m = A \times p$ e $m = B \times q$.

Multiplicando-se os dois membros dessas igualdades por k, teremos:

$m \times k = A \times p \times k$ e $m \times k = B \times q \times k$.

Vê-se entretanto que $m \times k$ é múltiplo de A e de B, e ainda, qualquer múltiplo de m contém como divisores os números A e B.

Ex.: O $\mathrm{mmc}(3; 4) = 12$ e, qualquer múltiplo de 12, ou seja $12, 24, 36, \ldots$ também é múltiplo de 3 e 4.

2ª *O produto de dois números naturais* A *e* B ($B \neq 0$)*, é igual ao produto do* mdc *pelo* mmc *deles.*

Demonstração:

Se $A \times B = A \times B$, então

$$\frac{A \times B}{mdc(A;B)} = \frac{A}{mdc(A;B)} \times B = A \times \frac{A}{mdc(A;B)}$$

O quociente gerado por $\frac{A \times B}{mdc(A;B)}$ é múltiplo de A e de B, conseqüentemente, será múltiplo do mmc, ou seja,

$$\frac{A \times B}{mdc(A;B)} = mmc(A;B) \times k \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

Dividindo-se, separadamente, os dois membros da igualdade anterior por B e por A, teremos:

1º) $\frac{A}{mdc(A;B)} = \frac{mdc(A;B)}{B} \times k$

2º) $\frac{B}{mdc(A;B)} = \frac{mdc(A;B)}{A} \times k$

Como os quocientes gerados por $\frac{A}{mdc(A;B)}$ e $\frac{B}{mdc(A;B)}$ são primos entre si, conclui-se que $k = 1$.

Substituindo $k = 1$ em (I), teremos: $\frac{A \times B}{mdc(A;B)} = mmc(A;B)$ ou ainda

$$\mathbf{A \times B = mdc(A;B) \times mmc(A;B)} \quad \ldots \text{c.q.d.}$$

Ex.: Verificar a igualdade anterior, supondo $A = 60$ e $B = 36$.

Substituindo 60 e 36 na relação anterior, teremos:

$60 \times 36 = mdc(60;36) \times mmc(60;36)$
$2.160 = 12 \times 180$
$2.160 = 2.160$ (ok!)

3ª *O* mmc. *de dois ou mais números naturais, onde o maior é múltiplo do(s) menor(es), é o maior*.

Sejam A e B dois números onde $A = \dot{B}$.
Se A é múltiplo de B, então A é divisível por B, então, o
$mdc(A;B) = B$ .... (I)
Vimos anteriormente que $A \times B = mdc(A;B) \times mmc(A;B)$ ... (II)

Substituindo (I) em (II), tem-se: $A \times B = B \times \mathrm{mmc}(A; B)$.
Simplificando, convenientemente, teremos: $\mathrm{mmc}(A; B) = A$ ... c.q.d.

Ex$_1$.: $\mathrm{mmc}(3; 6) = 6$, pois 6 é o múltiplo de 3.

Ex$_2$.: $\mathrm{mmc}(4; 8; 16) = 16$, pois 16 é múltiplo de 4 e 8, simultaneamente.

Obs.: Quando o maior não for múltiplo do menor, devemos multiplicá-lo pela sucessão dos números naturais, a partir de 2, até obtermos o primeiro número que seja múltiplo do menor.

Ex.: $\mathrm{mmc}(8; 10) = ?$

10 não é múltiplo de 8, então, teremos:

$10 \times 2 = 20 \neq (\dot{8})$; $20 \times 3 = 30 \neq (\dot{8})$; $10 \times 4 = 40 = \dot{8}$

Portanto, o $\mathrm{mmc}(8; 10) = 40$.

4ª *O* mmc *de dois números primos entre si é igual ao produto deles.*

Sabemos que, se dois números A e B forem primos entre si, então,
o $\mathrm{mdc}(A; B) = 1$ .... (I)

Sabemos, também, que:
$A \times B = \mathrm{mdc}(A; B) \times \mathrm{mmc}(A; B)$ ... (II)

Substituindo (I) em (II), teremos que o $\mathrm{mmc}(A; B) = A \times B$ ... c.q.d.

Ex$_1$.: $\mathrm{mmc}(3; 5) = 3 \times 5 = 15$.

Ex$_2$.: $\mathrm{mmc}(11; 4) = 11 \times 4 = 44$

Ex$_3$.: $\mathrm{mmc}(4; 9) = 4 \times 9 = 36$

Ex$_4$.: $\mathrm{mmc}(99; 100) = 99 \times 100 = 9.900$

Obs.: Se todos os números forem primos absolutos, o mmc será igual ao produto deles.

Ex.: O mmc dos números $2, 7, 11$ e 17 é igual a $2 \times 7 \times 11 \times 17$, ou seja, 2.728.

5ª *Dividindo-se o* mmc *de dois ou mais números naturais, por cada um deles, encontraremos sempre quocientes primos entre si.*

Tomemos, para efeito de demonstração, dois números A e B.

Se $A \times B = mdc(A;B) \times mmc(A;B)$

$$\frac{mmc(A;B)}{A} = \frac{B}{mdc(A;B)} \text{ ou } \frac{mmc(A;B)}{B} = \frac{A}{mdc(A;B)}$$

Como os quocientes gerados por $\dfrac{B}{mdc(A;B)}$ e $\dfrac{A}{mdc(A;B)}$ são primos entre si, infere-se que:

$\dfrac{mmc(A;B)}{A}$ e o $\dfrac{mmc(A;B)}{B}$ serão primos entre si, como queríamos demonstrar.

Ex$_1$.: $mmc(60;36) = 180 \rightarrow \begin{cases} 180:6=3 \\ 180:36=5 \end{cases}$; 3 e 5 são primos entre si.

Ex$_2$.: $mmc(20;25;40) = 200 \rightarrow \begin{cases} 200:20=10 \\ 200:25=8 \\ 200:40=5 \end{cases}$; $10, 8$ e 5 são primos entre si.

6ª *Multiplicando-se (ou dividindo-se) dois ou mais números naturais por um outro qualquer (diferente de zero), o* mmc *deles ficará multiplicado ou dividido por esse número.*

Suponhamos, para efeito de demonstração, que A e B sejam dois números naturais (diferentes de zero) e k um fator, também diferente de zero.

Sabe-se que $mmc(A;B) = \dfrac{A \times B}{mdc(A;B)}$ e $mdc\,(A \times k; B \times k) = mdc\,(A;B) \times k$.

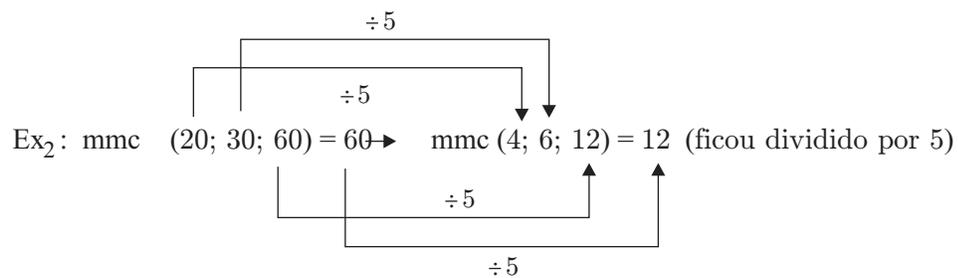
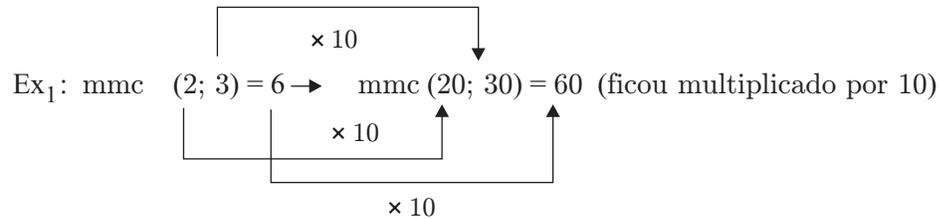
Como o $mmc\,(A \times k; B \times k) = \dfrac{A \times k \times B \times k}{mdc\,(A \times k; B \times k)} = \dfrac{A \times B}{mdc(A;B)} \times k$

então o $mmc(A \times k; B \times k) = mmc(A;B) \times k \ldots$ c.q.d.

× 10

Ex$_1$: mmc (2; 3) = 6 → mmc (20; 30) = 60 (ficou multiplicado por 10)

× 10

× 10

6.2.4 Exercícios Resolvidos

1) Num cesto havia ovos: eram mais de 50 e menos de 60. Contando-os de 3 em 3, sobravam 2; contando-os de 5 em 5, sobravam 4. Determinar o número de ovos do cesto.

Resolução:

Seja N o número de ovos a ser determinado.
De acordo com o enunciado, teremos: $N = \dot{3} + 2$ ... (I) e $N = \dot{5} + 4$ .... (II)
Em (I), podemos escrever que: $N = \dot{3} + (3 - 1)$ ou $N = \dot{3} - 1$
Em (II), podemos escrever que: $N = \dot{5} + (5 - 1)$ ou $N = \dot{5} - 1$
Como N é múltiplo de 3 e 5, menos 1, simultaneamente, teremos:
N é múltiplo do $\mathrm{mmc}(3;5)$ menos 1; mas, o $\mathrm{mmc}(3;5) = 15$, daí ...

$N = \{15 - 1, 30 - 1, 45 - 1, 60 - 1, 75 - 1, \ldots\}$, ou seja,
$N = \{14, 29, 44, 59, 74, \ldots\}$

Como $50 < N < 60$, teremos: $N = 59$.
Resp.: 59 ovos

2) Determinar o menor número que dividido por $12, 15, 18$ e 24, deixa sempre resto 7.

Resolução:

$$\text{se} \quad \left.\begin{array}{l} N = \dot{12} + 7 \\ N = \dot{15} + 7 \\ \\ N = \dot{18} + 7 \\ N = \dot{24} + 7 \end{array}\right\} \rightarrow N = \text{ m.m.c. de } \left\{\begin{array}{c} 12 \\ 15 \\ 18 \\ 24 \end{array}\right\} + 7$$

Logo, $N = 360 + 7 \therefore N = 367$
Resp.: 367

3) Determinar o menor número que, dividido por $8; 18$ e 20, deixa os restos $1; 11$ e 13, respectivamente.

Resolução:

Conforme o enunciado, temos que:

$$\begin{cases} N = \dot{8} + 1 \\ N = \dot{18} + 11 \\ N = \dot{20} + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \dot{8} + 8 - 7 \\ N = \dot{18} + 18 - 7 \\ N = \dot{20} + 20 - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \dot{8} - 7 \\ N = \dot{18} - 7 \\ N = \dot{20} - 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow N = \mathrm{mmc}(8; 18; 20) - 7$
$N = 360 - 7 \therefore N = 353$

Resp.: 353

4) Suponha que um cometa A atinja o ponto mais próximo da Terra em sua órbita a cada 20 anos; um cometa B a cada 30 anos e um cometa C a cada 75 anos. Se, em 1985 os três estiveram, simultaneamente, o mais perto possível da Terra, determinar o ano da próxima ocorrência desse fato.

Resolução:

O menor tempo (em anos) comum desse período, será obtido pelo mmc de $20, 30$ e 75. Assim sendo, o $\mathrm{mmc}(20; 30; 75) = 300$

O período desses encontros, ocorrerá a cada 300 anos, daí, o próximo encontro será em: $1985 + 300 = 2.285$.

5) A soma de dois números A e B é 42, e o mmc deles é 60. Determinar esses números.

Resolução:

De acordo com os dados, teremos:

$$\begin{cases} A + B = 42 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)} \\ mmc(A;B) = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 \div A = q' \Rightarrow A = \dfrac{60}{q'} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)} \\ \\ 60 \div B = q'' \Rightarrow B = \dfrac{60}{q''} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), teremos:

$\dfrac{60}{q'} + \dfrac{60}{q''} = 42$ ou

$\dfrac{10}{q'} + \dfrac{10}{q''} = 7$ ou ainda,

$$\frac{q' + q''}{q' \times q''} = \frac{7}{10} \to \begin{cases} q' + q'' = 7 \\ q' \times q'' = 10 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, teremos: $q' = 2$ e $q'' = 5$ ou vice-versa.

Substituindo esses valores em (II) e (III), teremos:

1º) para $q' = 2 \Rightarrow A = \dfrac{60}{2} \therefore A = 30$

2º) para $q'' = 5 \Rightarrow B = \dfrac{60}{5} \therefore B = 12$

Resp.: Os números são, 30 e 12, respectivamente.

6) O produto de dois números naturais é 720. Sabendo-se que o mdc deles é 6, determinar o mmc desses números.

Resolução:

Supondo A e B os números dados, podemos escrever que:

$A \times B = mdc(A;B) \times mmc(A;B)$

Substituindo os dados do problema, convenientemente, teremos:

$720 = 6 \times mmc(A;B)$

$mmc(A;B) = \dfrac{720}{6}$

$mmc(A;B) = 120$

Resp.: 120

7) Determinar o número de múltiplos de 3 e 5, na sucessão dos números naturais, de 1 até 600.

Resolução:

O menor múltiplo comum dos dois é o 15 ($\mathrm{mmc}(3,5)$), portanto, os múltiplo comuns são:

$15, 30, \ldots, 600$

Total: $600 \div 15$

Resp.: 40

8) Determinar o número de múltiplos de 3 ou de 5, na sucessão dos números naturais, de 1 até 600.

Resolução:

Sabemos da Teoria dos Conjuntos que, se dois conjuntos A e B não são disjuntos, então

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(\dot{3} \cup \dot{5}) = n(\dot{3}) + n(\dot{5}) - n(\dot{3} \cap \dot{5})$

$n(\dot{3} \cup \dot{5}) = \dfrac{600}{3} + \dfrac{600}{5} - \dfrac{600}{15}$, onde $15 = \mathrm{mmc}(3;5)$

$n(\dot{3} \cup \dot{5}) = 200 + 120 - 40$

$n(\dot{3} \cup \dot{5}) = 280$

Resp.: 280

6.3 Exercícios Propostos

1) O mdc de dois números é 15. Na sua determinação pelo algoritmo de Euclides, encontramos os quocientes 3, 1, 2 e 4. Quais são os números?

   a) 540 e 180 b) 540 e 385 c) 720 e 195 d) 620 e 165

2) Dividindo-se dois números por 7, o mdc passou a ser 29. Determine esses números, sabendo-se que um deles é o dobro do outro.

   a) 203 e 406 b) 215 e 430 c) 223 e 446 d) 230 e 460

3) No cálculo do mdc de dois números, pelas divisões sucessivas, obteve-se como quocientes os números 3, 6, 1 e 3. Sabendo-se que o mdc é 4, determine-os.

a) 340 e 104 b) 340 e 108 c) 220 e 108 d) 340 e 92

4) No aeroporto Santos Dumont partem aviões para São Paulo a cada 20 minutos, para o Sul do país a cada 40 minutos e para Brasília, a cada 100 minutos. Às 8 horas da manhã, houve embarque simultâneo para partida. Até as 18 horas, coincidirão ainda, quantos embarques?

a) três b) dois c) quatro d) cinco

5) O mdc de dois números é 1, e o mmc deles 29.403. Se um dos números é 112, qual é o outro?

a) 3^2 b) 3^3 c) 3^4 d) 3^5

6) O mmc de dois números é 24. Determine o produto desses números, sabendo-se que o mdc deles é 4.

a) 66 b) 76 c) 86 d) 96

7) Suponha dois cometas: um aparecendo a cada 20 anos e, outro, a cada 30 anos. Se em 1960 tivessem ambos aparecido, pergunta-se: quantas novas coincidências haverão até o ano 2.500?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

8) Qual é a operação que permite-nos determinar o mmc de dois números primos absolutos?

a) Adição b) Subtração c) Divisão d) Multiplicação

9) O produto de dois números é 300, e o mmc deles, 60. Qual é o mdc desses dois números?

a) 20 b) 15 c) 10 d) 5

10) O maior número pelo qual devemos dividir 30 e 411, para que os restos sejam respectivamente, 5 e 4, está entre:

a) 20 e 30 b) 31 e 40 c) 41 e 50 d) 51 e 60

11) Sendo dois números $A = 2^4 \times 3^3 \times 5$ e $B = 2^3 \times 3^2 \times 11$, o quociente da divisão do seu mmc pelo seu mdc será:

a) 5×11 b) $2^2 \times 3^3$ c) $2 \times 3 \times 5 \times 11$ d) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$

12) O mdc de dois números é 20. Na determinação pelo algoritmo de Euclides, encontraram-se os quocientes 2, 1, 3 e 2. Quais são os números?

a) 235 e 160 b) 500 e 180 c) 450 e 180 d) 725 e 190

13) Na determinação do maior divisor comum de dois números pelo algoritmo de Euclides, encontramos os quocientes 1; 2 e 6 e os restos 432; 72 e 0, respectivamente. Qual é a soma desses números?

a) 1.800 b) 2.000 c) 2.104 d) 2.304

14) O quociente do mmc dos números 6; 8 e 12 pelo mdc de 8 e 160 é igual a:

a) 3 b) 8 c) 16 d) 24

15) Sejam os números 18 e $5y$. Se o mmc deles é 90, e o mdc igual a 1/10 do mmc, calcule a diferença desses números.

a) 9 b) 27 c) 4 d) 81

16) O mdc dos números fatorados $2^4 \times 3^2$ e $2^3 \times 3^3$, é:

a) 36 b) 72 c) 24 d) 54

17) O mdc de dois números é 15, e o menor é a quarta parte do maior. Qual é o maior?

a) 80 b) 50 c) 30 d) 60

18) Para acondicionar 1.560 latas de azeite e 870 latas de óleo em caixotes, de modo que cada caixote contenha o maior e o mesmo número de latas, sem que sobre nenhuma, e, ainda, sem misturar latas de cada espécie, quantas latas em cada caixote serão necessárias?

a) 30 b) 40 c) 20 d) 50

19) O mdc de 288 e $2^3 \times 3^2$, é igual a:

a) 144 b) 288 c) 72 d) 36

20) O mmc de 180 e 216, é igual a:

a) 1.080 b) 36 c) 216 d) 6

21) O menor número que dividido por $18; 32$ e 54, deixa sempre resto 11 é igual a:

a) 115 b) 853 c) 875 d) 299

22) Sejam $A = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $B = 2^2 \times 7$ e $C = 2 \times 3 \times 5$. O máximo divisor comum deles, é igual a:

a) 2 b) 6 c) 10 d) 8

23) O máximo divisor comum de 24 e 36 é igual a:

a) 9 b) 6 c) 12 d) 4

24) O produto de dois números é 1.176, e o mmc, 84. O mdc desses números é igual a:

a) 84 b) 42 c) 14 d) 28

25) Sabendo-se que o mdc dos números n e 15 é igual a 3, e o mmc, 90. Determine o valor de $2n$, supondo $n \in \mathbb{N}$.

a) 18 b) 5 c) 6 d) 36

26) Três satélites artificiais giram em torno da Terra, em órbitas constantes. O tempo de rotação do primeiro é 42 minutos, do segundo, 72 minutos e, do terceiro, 126 minutos. Em dado momento, eles se alinham em um mesmo meridiano, embora em latitudes diferentes. Eles voltarão em seguida, a passar simultaneamente pelo mesmo meridiano, depois de:

a) $15h\,24min$ b) $7h\,48min$ c) $126min$ d) $8h\,24min$

27) Sabendo-se que $A = 2^x \times 3^2 \times 5$, $B = 2^{2x} \times 3^2 \times 5^2$, e que o mmc de A e B têm 45 divisores, qual é o valor de x?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

28) Se $a = 2^2 \times 3 \times 5$ e $b = 2^3 \times 3^2$, então, o mdc e o mmc desses números são, respectivamente:

a) 12 e 360 b) 360 e 12 c) 12 e 240 d) 24 e 360

29) O mdc de dois números é 75; o maior deles é 300 e, o menor, é diferente de 75. O menor é, portanto:

a) 5^3 b) 3×5^3 c) $3^2 \times 5^2$ d) $2 \times 3 \times 5^2$

30) O cabo Praxedes tira serviço a cada 5 dias, e o soldado Atanagildo, a cada 7 dias. Se os soldados estão de serviço hoje, daqui há quantos dias tirarão serviço juntos novamente?

a) 12 dias b) 14 dias c) 17 dias d) 35 dias

31) Ao calcular o mdc dos números A e B (A e $B \in \mathbb{N}$), pelo algoritmo de Euclides, obteve-se (ver abaixo):

	2	1	3
A	B	x	11
y	z	0	

Podemos afirmar que:

a) $A - B = 27$ b) $A - B = 47$ c) $A - B = 55$ d) $A - B = 53$
e) $A - B = 77$

32) Um trem A parte de uma cidade a cada 6 dias. Um trem B parte da mesma cidade a cada 9 dias. Se A e B partirem juntos, voltarão a fazê-lo, pela primeira vez, depois de quantos dias?

a) 54 b) 18 c) 15 d) 12 e) 10

33) O mdc de dois números A e B é $2^5 \times 3^2 \times 5^4 \times 7$. Sendo $A = 2^x \times 3^z \times 5^y \times 7$ e $B = 2^6 \times 3^3 \times 5^5 \times 7$, então, $x \times y \times z$ é igual a:

a) 20 b) 80 c) 60 d) 40 e) 11

34) Se o $\text{mdc}(a, b) = 4$, o $\text{mmc}(a, b) = 80$ e $a + b = 36$, então, o valor numérico da expressão $2a - b$, $a > b$, é:

a) 24 b) 16 c) 20 d) 36 e) 12

35) Ao separar o total de figurinhas em grupos de 12, de 15 ou de 24, uma criança observou que sobravam sempre 7. Sendo o total de figurinhas compreendido entre 120 e 240, qual é o numero de figurinhas?

a) 149 b) 202 c) 127 d) 216 e) 120

36) Observe as seguintes proposições:

I - O mmc de dois números primos entre si, é obtido multiplicando-os;

II - O produto de dois números naturais, diferentes de zero, é igual ao produto do mdc pelo mmc deles;

III - Suponha dois números naturais diferentes de zero. Se um deles for múltiplo de todos os outros, ele será o mmc dos números dados.

Quantas são verdadeiras?

a) 1 b) 2 c) 3 d) zero

37) O produto de dois números é 2.160, e o mdc deles, 6. Calcule o mmc desses números.

38) Sabe-se que o mdc dos números A e B é 12, e que o mmc é 24. Determine dentre os números $2, 3, 5, 30$ e 150, quais podem ser divisores de A e B e quais são múltiplos de A e B?

39) Três automóveis disputam uma corrida numa pista circular. O primeiro dá cada volta em 4 minutos, o segundo em 5 minutos e o terceiro em 6 minutos. No fim de quanto tempo voltarão a se encontrar, no inicio da pista, se eles partirem juntos?

40) Os números 756 e $2^x \times 3^y$ têm 9 como mdc. Quais são os valores de x e y?

41) Determine os pares de números, onde a soma deles seja 168 e o mdc igual a 24.

42) Determine os pares de números, cuja soma dos quocientes deles pelo mdc seja 7, e o mmc seja 60.

43) A soma de dois números é 48 e o mmc, 140. Determine-os.

44) Dois números têm mdc igual a 20 e para mmc, 420. Quais são esses números?

45) Que relação deve existir entre a e b, para que se tenha a soma desses números igual ao sêxtuplo do máximo divisor comum?

46) No cálculo do mdc de dois números pelo algoritmo de Euclides, obteve-se os quocientes $1; 2$ e 3. Sendo o mdc igual a 40, quais são esses números?

47) Qual é o mdc de dois números consecutivos?

48) Sejam $A = 2^{2m} \times 3^p \times 5$ e $B = 2^p \times 5^m$. Sabendo-se que o mdc desses números é 40 e o mmc igual a 10.800, determine os valores naturais de m e p.

49) Se A e B forem primos entre si, qual será o produto do mdc pelo mmc deles?

50) Determine dois números cujo mdc seja 2 e o mmc 120, sabendo-se ainda que a soma deles é igual a 46.

51) O produto do mmc pelo mdc de dois números múltiplos sucessivos de 11 é igual a 5.082. Determine-os.

52) Qual deve ser o valor de a no número $N = 2^{a+1} \times 3 \times 5^2$, para que o mdc dos números 96; N e 240 seja 24?

53) Determine o menor número que dividido por $10; 16$ e 24 deixa, respectivamente, os restos $5; 11$ e 19.

54) O quociente de dois números naturais A e B, é $10 : 3$, e o mmc deles, 180. Determine-os.

55) Dois números naturais têm por soma 96 e o máximo divisor comum igual a 12. Determine o maior dos dois números, sabendo-se que o produto deles é o maior possível.

56) Calcule m no número $A = 2^{m-1} \times 3^2 \times 5^m$, de modo que o mdc dos números A e 900, seja 45.

57) O produto do mmc pelo mdc de dois múltiplos de um número natural N é 4.235. Qual é o valor de N?

58) O quociente de dois números naturais é igual a $7 : 4$, e o mínimo múltiplo comum desses números é 1.680. O máximo divisor comum desses números terá quantos divisores naturais exatos?

a) 12 b) 16 c) 8 d) 10 e) 20

59) O mmc de dois números é 300, e o mdc deles, 6. O quociente do maior pelo menor:

a) pode ser 2;

b) tem 4 divisores positivos;

c) é um numero primo

d) tem 6 divisores positivos;

e) nada se pode afirmar

60) As divisões do número x por 4 e do número y por 3 geram quocientes exatos iguais. Sabendo-se que o menor múltiplo comum, multiplicado pelo maior divisor comum dos números x e y, é igual a 588; podemos afirmar que a soma $x + y$ é igual a:

a) 36 b) 52 c) 49 d) 42 e) 64

61) A soma de dois números naturais positivos, onde o maior é menor que o dobro do menor, é igual a 136. Sabendo-se que o máximo divisor comum é 17, qual é a diferença deles?

a) 102 b) 65 c) 34 d) 23 e) 51

62) Qual a diferença de dois números naturais, que têm para produto 2.304, e para máximo divisor comum o número 12?

a) 180 b) 72 c) 0 d) 192 e) 168

63) O número 12 é o máximo divisor comum dos números 360, a e b, considerados dois a dois. Sabendo-se que $100 < a < 200$ e que $100 < b < 200$, pode-se afirmar que $a + b$, vale:

a) 204 b) 228 c) 288 d) 302 e) 372

64) Se o $\mathrm{mdc}(a, b, c) = 100$ e o $\mathrm{mmc}(a, b, c) = 600$, podemos afirmar que o número de conjuntos de três elementos distintos a, b e c é:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

65) Um cofre é equipado com um sistema automático de destranca por um minuto, e volta a trancá-lo se não for aberto. Tal cofre tem dois sistemas independentes: um que dispara de 46 em 46 minutos, após ser ligado o sistema, e outro de 34 em 34 minutos. Sabendo-se que o cofre pode ser aberto tanto por um, quanto pelo outro dispositivo, e que um não anula o

outro, quantas vezes por dia pode-se dispor do cofre para abertura, sendo o sistema ligado a zero hora?

a) 74 b) 73 c) 72 d) 71 e) 70

66) Num depósito estão guardados 300 folhas de compensados de espessura $5,0\,\mathrm{mm}$ e $1,5\,\mathrm{cm}$, respectivamente, formando pilhas com $2,35\,\mathrm{m}$ de altura. Qual é a soma dos algarismos do número que expressa a quantidade de folhas de $5,0\,\mathrm{mm}$?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

67) Sejam a, b e c números primos distintos, em que $a > b$. O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de $m = a \times b$ e $n = a^2 \times b^2 \times c^2$ são, respectivamente, 21 e 1.764. Pode-se, assim, afirmar que $a + b + c$ é igual a:

a) 9 b) 10 c) 12 d) 42 e) 62

68) Sabendo-se que o produto de dois números é 10.692, e que o menor múltiplo comum é 594, determine esses números.

69) Determine dois números, sabendo-se que o seu produto é 12.600, e que o seu menor múltiplo comum é igual a 6.300.

70) O produto de dois números é 2.160, e o mmc deles, 180. Determine-os.

71) Determine dois números a e b cuja soma seja 4.380, e o menor múltiplo comum deles seja 37.800.

72) Ache dois números inteiros positivos a e b, sabendo que sua soma seja 651 e que o quociente de seu mmc pelo mdc seja igual a 108.

Respostas

1) c
2) a
3) b
4) a
5) d
6) d
7) d
8) d
9) d
10) b
11) c
12) b
13) d
14) a
15) b
16) b
17) d
18) a
19) c
20) a
21) c
22) a
23) c
24) c
25) d
26) d
27) b
28) a
29) c
30) d
31) c
32) b
33) d
34) a
35) c
36) c
37) 360
38) **Divisores:** 2 e 3
Múlt. Comuns: $24, 48, 72, 96, \dots$
39) $60\,min$ **ou** $1h$
40) $x = 0$ e $y = 2$
41) 24 e 144; 48 e 120; 72 e 96
42) 10 e 60; 12 e 30; 15 e 20
43) 20 e 28
44) 20 e 420; 60 e 140
45) $a = 5b$ **ou** $b = 5a$
46) 400 e 280
47) 1
48) $m = 3$ e $p = 2$
49) $A \times B$
50) 6 e 40
51) 66 e 77
52) 2
53) 235
54) 60 e 18
55) 60
56) 1
57) 11
58) a
59) d
60) c
61) c
62) a
63) b
64) b
65) c
66) d
67) c
68) 594 e 18; 198 e 54
69) 4 e 3.150
18 e 700;
50 e 252
70) 12 e 180; 60 e 36
71) 600 e 4.380
72) 567 e 84

Capítulo 7

Números Fracionários

7.1 Fração

É o número que representa uma ou mais partes iguais em que se divide a unidade.

7.2 Representação das Frações

As frações podem ser representadas por dois números, separados por um traço horizontal[1] (—) ou inclinado (/) ou N/D.

$$\frac{N}{D} \text{ ou } N/D$$

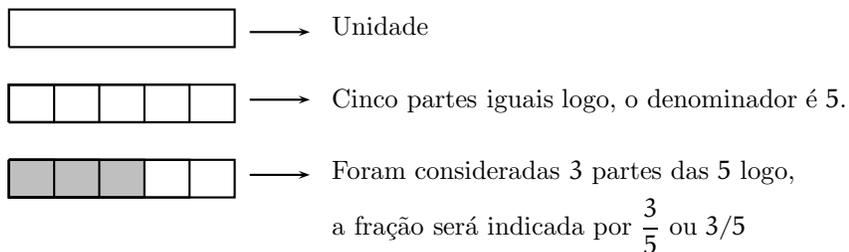
O número que for colocado acima do traço denomina-se *numerador* e o outro, abaixo do traço, *denominador*.

O *numerador* e o *denominador* denominam-se *termos da fração*.

7.2.1 Significado dos Termos

1º *Denominador* - indica o número de partes iguais em que a unidade foi dividida.

2º *Numerador* - indica o número de partes consideradas.

[1]Leonardo de Pisa (Fibonnaccci) 1.170 − 1.150
Nicole Oresme, 1º francês a usar o traço horizontal (1.325 − 1.382)
De Morgan (1.806 − 1.871), indicou as frações da forma N/D

7.3 Frações Homogêneas e Frações Heterogêneas

7.3.1 Frações Homogêneas

São aquelas que possuem mesmo denominador.

7.3.2 Frações Heterogêneas

São aquelas que possuem denominadores diferentes.

7.4 Leitura das Frações

A leitura das frações são enunciadas de acordo com o denominador.

1º caso: Se o denominador for $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9, lê-se o numerador seguido das palavras: meio(s), terço(s), quarto(s), quinto(s), sexto(s), sétimo(s), oitavo(s) e nono(s).

Ex.: $\frac{3}{2}$ ... três meios

$\frac{2}{7}$ ... dois sétimos

$\frac{5}{9}$ ... cinco nonos

$\frac{1}{8}$ ... um oitavo.

2º caso: Se o denominador for 10 ou uma das potências de 10, isto é, 100, $1.000, \ldots$, lê-se o numerador seguido da(s) palavra(s): décimo(s), centésimo(s), milésimo(s), ...

$\frac{3}{10}$ ... três décimos

$\frac{7}{100}$ ... sete centésimos

$\frac{11}{1000}$ ... onze milésimos

3º caso: Se o denominador for maior que 10 e não for potência de 10, lê-se o numerador seguido do denominador e dos substantivos masculinos avo ou avos[2]

Ex.: $\frac{1}{17}$ ... um, dezessete avo

$\frac{7}{15}$ ... sete, quinze avos

$\frac{9}{23}$ ... nove, vinte e três avos

$\frac{1}{270}$ ... um, duzentos e setenta avo

7.5 Frações Decimais e Frações Ordinárias

7.5.1 Frações Decimais

São aquelas em cujos denominadores aparecem 10 *ou qualquer potência de* 10.

Ex.: $\frac{7}{10}, \frac{17}{100}, \frac{3}{1000}$

7.5.2 Frações Ordinárias

São aquelas em cujos denominadores aparecem números naturais diferentes de 10 *ou de potências de* 10.

Ex.: $\frac{3}{5}, \frac{15}{13}, \frac{29}{174}$

7.6 Frações Próprias, Impróprias e Aparentes

7.6.1 Frações Próprias

São frações que têm numeradores menores que os denominadores.

Ex.: $\frac{3}{4}, \frac{5}{21}, \frac{5}{11}$

[2] avo(s) - Sufixo proveniente de oitavo(s)

7.6.2 Frações Impróprias

São aquelas que têm numeradores maiores ou iguais aos denominadores.

Ex.: $\frac{5}{2}, \frac{15}{3}, \frac{7}{7}$

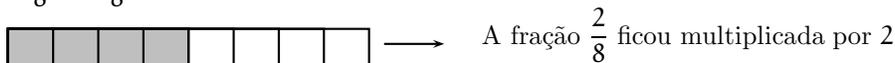
7.6.3 Frações Aparentes

É qualquer fração cujos numeradores são múltiplos dos denominadores.

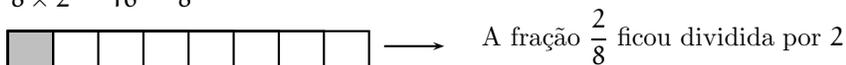
Ex.: $\frac{6}{3}, \frac{5}{4}, \frac{0}{4}$

7.7 Propriedades das Frações

1ª *Multiplicando-se (ou dividindo-se) o numerador de uma fração dada por qualquer número natural, diferente de zero, o valor da mesma ficará multiplicada (ou dividida) por esse número.*

Ex.:

Obs.: Se dividirmos o numerador 4 por 2, retornaremos à fração anterior.

2ª *Multiplicando-se (ou dividindo-se) o denominador de uma fração dada por qualquer número natural diferente de zero, o valor da mesma ficará dividida (ou multiplicada) por esse número.*

Ex.:

Obs.: Se dividirmos o denominador 8, por 2, retornaremos a fração anterior.

3ª *Multiplicando-se (ou dividindo-se) os termos de uma fração dada por qualquer número natural, diferente de zero, a mesma não sofrerá alteração.*

Ex.: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$

7.8 Frações Equivalentes

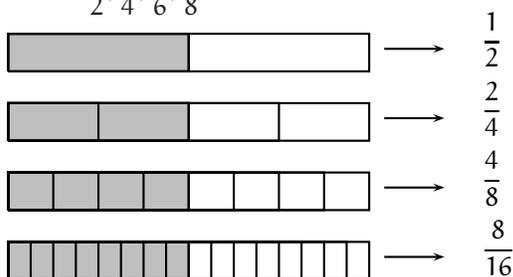
São aquelas que possuem o mesmo valor.

Ex.: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \cdots$

$\longrightarrow \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \frac{2}{4}$

$\longrightarrow \frac{4}{8}$

$\longrightarrow \frac{8}{16}$

7.9 Simplificação de Frações

Simplificar uma fração significa obter outra(s) equivalente(s) e de termos menores.

Ex.: Seja simplificar a fração $\frac{36}{60}$

1ª Simplificação: $\frac{36:2}{60:2} = \frac{18}{30}$

2ª Simplificação: $\frac{36:2}{60:2} = \frac{18:2}{30:2} = \frac{9}{15}$

3ª Simplificação: $\frac{36:2}{60:2} = \frac{18:2}{30:2} = \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$

7.10 Fração(ões) Irredutível(eis)

É toda fração cujos termos são primos entre si.

Ex.: $\frac{3}{5}, \frac{8}{9}, \frac{99}{100},$

Obs.: Para tornarmos uma fração irredutível, podemos proceder de dois modos:

1º) Através de simplificações sucessivas.

Veja o exemplo do item 7.9, 3ª simplificação.

2º) Com o auxílio do $\mathfrak{mdc}$

Nesse caso, basta dividirmos os termos da fração pelo $\mathfrak{mdc}$ deles.

Ex.: Seja tornar a fração $\frac{36}{60}$ irredutível.

1º) $\mathrm{mdc}(60;36) = 12$

2º) $\frac{36:12}{60:12} = \frac{3}{5}$, vê-se que 3 e 5 são primos entre si.

7.11 Redução de Frações ao Menor Denominador Comum

Para reduzirmos duas ou mais frações ao menor denominador comum, devemos seguir os seguintes passos:

1º) determinar o mmc dos denominadores;

2º) dividir o mmc por cada um desses denominadores;

3º) multiplicar os quocientes encontrados pelos numeradores, gerando, assim, frações equivalentes de menor denominador comum.

Ex.: Reduzir as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ ao menor denominador comum.

1º) $\mathrm{mmc}(2;4;3) = 12$;

2º) $12 \div 2 = 6$; $12 \div 4 = 3$ e $12 \div 3 = 4$;

3º) $\frac{1}{2/6}, \frac{3}{4/3}, \frac{2}{3/4}$

4º) $\frac{1 \times 6}{12}, \frac{3 \times 3}{12}, \frac{2 \times 4}{12}$ ou simplesmente,

5º) $\frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{8}{12}$

7.12 Operações com Frações

a) Adição e Subtração

1º caso: Com frações homogêneas

Regra

Para somarmos ou subtrairmos duas ou mais frações homogêneas, basta repetirmos o denominador e somarmos ou subtraírmos os numeradores das mesmas.

Seja efetuar a operação $\frac{A}{D} \pm \frac{B}{D} \pm \frac{C}{D} \pm \cdots$

$\frac{A}{D} = Q_1 \rightarrow D \times Q_1 = A$ .... (I)

$\frac{B}{D} = Q_2 \rightarrow D \times Q_2 = B$ .... (II)

$\frac{C}{D} = Q_3 \rightarrow D \times Q_3 = C$ .... (III)

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

Somando-se ou subtraindo-se as igualdades (I), (II), (III),..., membro a membro, teremos:

$D \times Q_1 \pm D \times Q_2 \pm D \times Q_3 \pm \cdots = A \pm B \pm C \pm \cdots$ ou

$D \times (Q_1 \pm Q_2 \pm Q_3 \pm \cdots) = A \pm B \pm C \pm \cdots$ ou ainda,

$$Q_1 \pm Q_2 \pm Q_3 \pm \cdots = \frac{A \pm B \pm C \pm \cdots}{D}$$

$$\frac{A}{D} \pm \frac{B}{D} \pm \frac{C}{D} \pm \cdots = \frac{A \pm B \pm C \pm \cdots}{D} \quad \ldots \text{c.q.d}$$

Ex$_1$.: $\frac{3}{11} + \frac{2}{11} + \frac{4}{11} = \frac{3+2+4}{11} = \frac{9}{11}$

Ex$_2$.: $\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$

2º caso: Com Frações Heterogêneas

Regra

Reduzimos as frações ao mesmo denominador, dividimo-lo por cada um dos denominadores e, em seguida, multiplicamos cada um dos quocientes obtidos pelos seus respectivos numeradores.

Demonstração:

Seja $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} \pm \frac{E}{F} \pm \cdots$ uma operação.

1º) $mmc(B, D, F, ...) = m$

2º) $\frac{m}{B} = q_1 \Rightarrow B = \frac{m}{q_1}$ ou $m = B \times q_1$

$\frac{m}{D} = q_2 \Rightarrow D = \frac{m}{q_2}$ ou $m = D \times q_2$

$\frac{m}{F} = q_3 \Rightarrow F = \frac{m}{q_3}$ ou $m = F \times q_3$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

3º) $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} \pm \frac{E}{F} \pm \cdots = \frac{A}{m/q_1} \pm \frac{C}{m/q_2} \pm \frac{E}{m/q_3} \pm \cdots$ (I)

4º) $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} \pm \frac{E}{F} \pm \cdots = \frac{A \times q_1}{B \times q_1} \pm \frac{C \times q_2}{D \times q_2} \pm \cdots = \frac{A \times q_1}{m} \pm \frac{C \times q_2}{m} \cdots$ (II)

Como (I) é igual a (II), podemos escrever que:

$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} \pm \frac{E}{F} \pm \cdots = \frac{A}{m/q_1} \pm \frac{C}{m/q_2} \pm \frac{E}{m/q_3} \pm \cdots = \frac{A \times q_1}{m} \pm \frac{C \times q_2}{m} \pm \frac{E \times q_3}{m} \pm \cdots$

Como as frações são homogêneas, teremos, de acordo com o caso anterior:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} \pm \frac{E}{F} \pm \cdots = \frac{A \times q_1 \pm C \times q_2 \pm E \times q_3 \pm \cdots}{m} \quad \ldots \text{c.q.d.}$$

Ex$_1$.: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, $mmc(3,4) = 12 \begin{cases} 12 : 3 = 4 \\ 12 : 4 = 3 \end{cases}$

1º) $\frac{2}{3/4} + \frac{1}{4/3} = \frac{11}{12}$

2º) $\frac{2 \times 4}{12} + \frac{1 \times 3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$

b) Multiplicação

Regra

Para multiplicarmos duas ou mais frações, basta multiplicarmos os numeradores e os denominadores entre si.

Seja a multiplicação $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F} \times \cdots$

Fazendo: $\frac{A}{B} = Q_1 \rightarrow B \times Q_1 = A$ ..... (I)

$\frac{C}{D} = Q_2 \rightarrow D \times Q_2 = C$ ..... (II)

$\frac{E}{F} = Q_3 \rightarrow F \times Q_3 = E$ ..... (III)

... ...

Multiplicando-se, membro a membro, (I), (II), (III), ... , teremos:

$(B \times Q_1) \times (D \times Q_2) \times (F \times Q_3) \times \cdots = A \times C \times E \times \cdots$

$B \times D \times F \times \cdots \times Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times \cdots = A \times C \times E \times \cdots$

Dividindo-se os dois membros por $B \times D \times F \times \ldots$, teremos:

$$Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times \cdots = \frac{A \times C \times E \times \cdots}{B \times D \times F \times \cdots} \quad . \ . \ . \text{ c.q.d.}$$

Substituindo-se Q_1 por $\frac{A}{B}$, Q_2 por $\frac{C}{D}$, Q_3 por $\frac{E}{F}, \ldots$ teremos:

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F} \times \cdots = \frac{A \times C \times E \times \cdots}{B \times D \times F \times \cdots} \ \text{..... c.q.d.}$$

Obs.: $A \times \frac{B}{C} = \frac{A}{1} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{1 \times C} = \frac{A \times B}{C}$

Ex$_1$.: $5 \times \frac{2}{17} = \frac{5 \times 2}{17} = \frac{10}{17}$

Ex$_2$.: $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{189}$

Ex$_3$.: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{30 : 10}{80 : 10} = \frac{3}{8}$

Obs.: Antes de multiplicarmos, devemos simplificar convenientemente, se possível, os numeradores com os denominadores.

No exemplo anterior tal simplificação é possível, se não vejamos:

$$\frac{\not{2}^{1}}{\not{5}_{1}} \times \frac{3}{\not{4}_{2}} \times \frac{\not{5}^{1}}{4} = \frac{3}{8}$$

c) Divisão

Regra

Para dividirmos uma fração por outra, basta repetirmos a primeira e, em seguida, multiplicá-la pelo inverso da segunda.

Seja a divisão de $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$

Fazendo:

$$\frac{A}{B} = Q_1 \rightarrow B \times Q_1 = A \quad \ldots\ldots.. \quad \text{(I)}$$

$$\frac{C}{D} = Q_2 \rightarrow C = D \times Q_2 \quad \ldots\ldots.. \quad \text{(II)}$$

Multiplicando-se membro a membro, teremos:

$$B \times Q_1 \times C = A \times D \times Q_2$$

Dividindo-se os dois membros por $B \times C \times Q_2$ e simplificando, teremos:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{A \times D}{B \times C},$$

Substituindo Q_1 por $\frac{A}{B}$ e Q_2 por $\frac{C}{D}$, tem-se:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A \times D}{B \times C} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} \quad \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

Ex.: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$

Obs.: 1ª) $\frac{\frac{A}{B}}{C} = \frac{\frac{A}{1}}{\frac{B}{C}} = \frac{A}{1} \times \frac{C}{B} = \frac{A \times C}{B}$

(as printed: $\dfrac{A}{\frac{B}{C}} = \dfrac{\frac{A}{1}}{\frac{B}{C}} = \frac{A}{1} \times \frac{C}{B} = \frac{A \times C}{B}$)

Ex.: $\dfrac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$

Obs.: 2ª) $\dfrac{\frac{A}{B}}{C} = \dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{1}} = \frac{A}{B} \times \frac{1}{C} = \frac{A}{B \times C}$

Ex.: $\dfrac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

Obs.: 3ª) $\dfrac{1}{\frac{A}{B}} = \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{A}{B}} = 1 \times \frac{B}{A} = \frac{B}{A}$

Ex.: $\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$

d) Potência

Regra

Para calcularmos a potência de uma fração, basta elevarmos cada um dos termos da mesma a esse expoente.

Seja a fração $\left(\dfrac{A}{B}\right)^m$.

Sabemos que:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m = \underbrace{\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} \times \cdots \times \frac{A}{B}}_{m \text{ fatores}} \qquad \text{ou}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m = \frac{\overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{B \times B \times \cdot \times B}_{m \text{ fatores}}} \qquad \text{ou ainda}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m = \frac{A^m}{B^m} \qquad \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

Conclusão:

A potência de uma fração é igual a outra, cujos termos são potências dos termos da fração dada.

Ex.: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$

7.13 Fração de Fração(ões)

É qualquer produto obtido através da multiplicação de duas ou mais frações.

Ex$_1$.: $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{4}{5}$

$= \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{15}$

Ex$_2$.: $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{3}{5}$ de $\dfrac{4}{9}$

$= \dfrac{2}{\not{3}} \times \dfrac{\not{3}}{5} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{45}$

Obs.: A preposição "de", nesse caso, significa vezes.

7.14 Números Mistos

São aqueles compostos de duas partes: uma delas inteira e a outra fracionária.

Ex.: $2+\dfrac{3}{5}$ ou $\left(2\,\dfrac{3}{5}\right)$ ...... lê-se: dois inteiros e três quintos.

7.15 Transformações

1º caso: De fração imprópria para número misto

Ex.: Transformar a fração $\dfrac{14}{3}$ para número misto.

1º modo: Desmembrando a fração em duas outras homogêneas.

$$\frac{14}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=4+\frac{2}{3}\text{ ou simplesmente, } 4\,\frac{2}{3}$$

Obs.: 12 é o maior múltiplo de 3 menor que 14.

2º modo: Extraindo-se os inteiros.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array} \quad \ldots\ldots. \quad 4\,\frac{2}{3}$$

2º caso: De número misto para fração imprópria

Neste caso, basta multiplicarmos o denominador pela parte inteira, somar esse produto ao numerador da fração e colocar a soma encontrada sobre o denominador.

$$A+\frac{B}{C}=\frac{C\times A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{C\times A+B}{C}$$

Ex.: $4\,\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\times 4+2}{3}=\dfrac{12+2}{3}=\dfrac{14}{3}$

7.16 Expressões Fracionárias

São expressões que envolvem números fracionários.

Ao efetuarmos, devemos seguir os seguintes passos:

1º) as potenciações;
2º) as multiplicações ou divisões, na ordem em que aparecerem;
3º) as adições ou subtrações, convenientemente.

Ex.: Resolva as expressões fracionárias seguintes:

a) $$\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}\div\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}}$$

$$=\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{1}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}}\quad\begin{cases}\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{1}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{12}\\[2ex]\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{10+6}{15}=\dfrac{16}{15}\end{cases}$$

$$=\dfrac{\dfrac{1}{12}}{\dfrac{16}{15}}=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{5}{64}$$

7.17 Comparação de Frações

1º caso: Frações com o mesmo denominador

De duas ou mais frações com o mesmo denominador, a maior será aquela que tiver o maior numerador.

Ex.: $\dfrac{9}{11}>\dfrac{8}{11}>\dfrac{7}{11}$

2º caso: Frações com o mesmo numerador

De duas ou mais frações com o mesmo numerador, a maior será aquela que tiver o menor denominador.

Ex.: $\dfrac{11}{2}>\dfrac{11}{3}>\dfrac{11}{5}$

3º caso: Frações Heterogêneas

Nesse caso devemos torná-las homogêneas antes de compararmos.

Ex.: $\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{3}\quad\ldots\text{mmc}(5;6;3)=30$

$$\begin{cases}30:5=6\\30:6=5\\30:3=10\end{cases}$$

$$\dfrac{3}{5/6},\dfrac{5}{6/5},\dfrac{1}{3/10}\quad\rightarrow\quad\dfrac{18}{30},\dfrac{25}{30},\dfrac{10}{30}$$

Conclusão: $\dfrac{5}{6}>\dfrac{3}{5}>\dfrac{1}{3}$

7.18 Frações Inversas ou Recíprocas

Duas ou mais frações são ditas inversas ou recíprocas, quando o produto delas for igual a 1.

Ex.: $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$, pois, $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$

Obs.: $\frac{3}{5} = \cfrac{1}{\frac{5}{3}}$

Diz-se que $\frac{5}{3}$ é o inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}\cdot$

7.19 Frações Compostas

São aquelas onde um dos termos, ou ambos, são expressões fracionárias.

Ex.: $\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{3}}, \quad \cfrac{7+\cfrac{1}{5}}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}}}$

7.20 Frações Contínuas Limitadas (noções)

Denomina-se fração contínua limitada a toda fração obtida de outra irredutível A/B, *que pode ser colocada da forma*:

$$Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \ddots + \cfrac{1}{Q_{n-1} + \cfrac{1}{r_n}}}} \text{ ou seja}$$

$$\frac{A}{B} = Q_1 + \frac{r_1}{B} = Q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{B}{r_1}}$$

$$\frac{A}{B} = Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}$$

Generalizando, teremos:

$$Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{Q_{n-1} + \cfrac{1}{r_n}}}}} \qquad \ldots \text{c.q.d.}$$

Obs.:

1ª) $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_{n-1}, Q_n$ são quocientes maiores que zero, podendo Q_1 ser zero, se $A < B$;

2ª) $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são os respectivos restos até $r_n = 2$.

Exemplos:

1) Seja transformar $\frac{154}{69}$ numa fração contínua limitada.

$$\frac{154}{69} = 2 + \frac{16}{69} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{69}{16}}$$

$$\frac{154}{69} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{5}{16}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{16}{5}}};$$

Logo, $\frac{154}{69} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}$

Obs.: Como a fração é irredutível, podemos aplicar o algoritmo de Euclides, onde $2, 4, 3$ e 5 são quocientes e o mdc é o 1, assim, teremos:

	2	4	3	5
154	69	16	5	1
16	5	1	0	

De acordo com a observação anterior, podemos escrever:

$$\frac{154}{69} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}$$

2) Seja transformar $\frac{26}{115}$ numa fração contínua limitada.

Resolução:

1º modo:

$$\frac{26}{115}=\cfrac{1}{\cfrac{115}{26}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{11}{26}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{26}{11}}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{11}}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{11}{4}}}}$$

$$\Rightarrow\ \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}}}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}}}}$$

Logo,

$$\frac{26}{115}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

2º modo:

$$\frac{26}{115}=\cfrac{1}{\cfrac{115}{26}}$$

	4	2	2	1	3
115	26	11	4	3	1
11	4	3	1	0	

Daí,

$$\frac{26}{115}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

7.21 Exercícios Resolvidos

1) Determinar o número de unidades devemos subtrair do denominador da fração 7/45, de modo que a mesma fique três vezes maior.

Resolução:

Para que essa fração fique três vezes maior, devemos multiplicá-la por 3, ou seja:

$$\frac{7}{45} \times 3 = \frac{7}{15}$$

Vê-se que o denominador variou de 45 para 15, ou seja, $45 - 15$, que é igual a 30.

Resp.: 30

2) Dois terços de uma peça de fazenda custam R\$12,00. Determinar o preço de 3/5 da mesma.

Resolução:

1º)	$\frac{2}{3} \to$ R\$12,00		$\frac{5}{5} \to$ R\$18,00
	$\frac{1}{3} \to$ R\$6,00		$\frac{1}{5} \to$ R\$3,60 (R\$18,00÷5)
	$\frac{3}{3} \to$ R\$18,00		$\frac{3}{5} \to$ R\$10,80(R\$3,60 × 3)

Resp.: R\$10,80

3) Calcular o mmc de $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$·

Resolução:

1º) $\text{mmc}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) = m \quad \ldots \quad \text{(I)}$

2º) $\text{mmc}(3;5) = 15$

3º) Aplicando a 3ª propriedade do mmc em (I), teremos:

$$\text{mmc}\left(\frac{2}{3} \times 15, \frac{4}{5} \times 15\right) = m \times 15 \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

$$\text{mmc}(10, 12) = 60 \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

Igualando (II) com (III), teremos: $m \times 15 = 60 \therefore m = 4$

Substituindo $m = 4$ em (I), teremos:

$\text{mmc}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) = 4$

4) Uma torneira enche um tanque em t' horas e uma outra, separadamente, em t'' horas. Determinar em quanto tempo irão enchê-lo, se forem abertas simultaneamente.

Resolução:

	tanque		hora(s)
1ª torneira	1	$\rightarrow$	t'
	$\frac{1}{t'}$	$\rightarrow$	1

	tanque		hora(s)
2ª torneira	1	$\rightarrow$	t''
	$\frac{1}{t''}$	$\rightarrow$	1

Em 1 hora as duas juntas irão encher $\frac{1}{t'} + \frac{1}{t'}$ ou $\frac{t' + t''}{t' \times t''}$

Estudemos agora o enchimento das duas, simultaneamente:

	tanque		hora(s)	
1ª + 2ª torneira	$\frac{t' + t''}{t' \times t''}$	$\rightarrow$	t'	
	$\frac{1}{t' \times t''}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{t' + t''}$	[tempo total (T)]
	1	$\rightarrow$	$\frac{t' \times t''}{t + t''}$	

Resp.: $T = \frac{t' \times t''}{t' + t''}$, ou seja, o produto dos tempos divididos pela soma dos mesmos.

5) Uma torneira enche um tanque em 2 horas e uma outra, separadamente, em 3 horas. Abrindo-as simultaneamente, determinar em quanto tempo (horas e minutos) ambas enchê-lo-ão.

Resolução:

$$T = \frac{t' \times t''}{t' + t''} \begin{cases} t' = 2h \\ t'' = 3h \end{cases}$$

Substituindo esses valores convenientemente, teremos:

$$T = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = \frac{6}{5}\,\text{h}$$

Resp.: $1h\ 12min$

6) Um registro esvazia um tanque (cheio) em 6 horas e um outro, separadamente, em três horas. Se forem abertos simultaneamente, calcular em quantas horas o esvaziarão.

Resolução:

Como o tempo que duas torneiras levam para encher (um tanque vazio) é o mesmo que levam para esvaziar (um tanque cheio), raciocinaremos análogamente, de acordo com a questão anterior, ou seja:

$$T = \frac{t' \times t''}{t' + t''} \begin{cases} t' = 6h \\ t'' = 3h \end{cases}$$

Substituindo esses valores convenientemente, teremos:

$$T = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = \frac{18}{9}\,\text{h}$$

Resp.: 2 horas.

7) Sabe-se que uma torneira enche um tanque (vazio) em t' horas e um registro consegue esvaziá-lo (quando cheio) em t'' horas. Analisar as condições de enchimento e de esvaziamento, supondo:

1º) o tanque vazio;

2º) o tanque cheio.

Resolução:

Para enchermos um tanque (vazio), o tempo de enchimento (t') deverá ser menor que o de esvaziamento $t''[t' < t'']$ e, para o esvaziarmos, $[t' > t'']$. Assim sendo, deveremos raciocinar a partir dessas duas hipóteses, isto é:

1ª) hipótese: $t' < t''$

a) Torneira (ench.)			b) Registro (esvaz.)		
tanque		hora(s)	tanque		hora(s)
1	$\rightarrow$	t'	1	$\rightarrow$	t''
$\dfrac{1}{t'}$	$\rightarrow$	1	$\dfrac{1}{t''}$	$\rightarrow$	1

Como $t' < t'' \rightarrow \dfrac{1}{t'} > \dfrac{1}{t''}$, daí, em 1 hora as duas irão encher $\left(\dfrac{1}{t'} - \dfrac{1}{t''}\right)$ do tanque, ou seja, $\dfrac{t'' - t'}{t'' \times t'}$, portanto ...

tanque		hora(s)	
$\dfrac{t'' - t'}{t'' \times t'}$	$\rightarrow$	t'	
$\dfrac{1}{t'' \times t'}$	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{t'' - t'}$	
1	$\rightarrow$	$\dfrac{t'' \times t'}{t'' - t'}$	(tempo total)

Logo, $T = \dfrac{t'' \times t'}{t'' - t'}$ .... (I)

2ª) hipótese: $(t' > t'')$

Raciocinando analogamente ao desenvolvimento anterior, concluiremos que:

$T = \dfrac{t' \times t''}{t' - t''}$ .... (II)

Como não existe tempo negativo, de (II) e (II) conclui-se que:

$T = \dfrac{t' \times t''}{|t' - t''|}$ .... $t' \neq t''$

8) Três torneiras podem encher um tanque, separadamente, em t', t'' e t''' horas, respectivamente. Supondo o mesmo vazio e abrindo-as simultaneamente, determinar em quanto tempo (T) irão enchê-lo.

Resolução:

Para t' e t'', teremos:

$T' = \dfrac{t' \times t''}{t' + t''}$ ... (I), onde T' é o tempo parcial entre as duas primeiras torneiras.

Para determinarmos o tempo total T, conjugaremos T' com t''' e, assim sendo, teremos:

$$T = \frac{T' \times t'}{T' + t'} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$T = \frac{\dfrac{t' \times t''}{t' + t''} \times t''}{\dfrac{t' \times t''}{t' + t''} + t'''} = \frac{\dfrac{t' \times t'' \times t'''}{t' + t''}}{\dfrac{t' \times t'' + (t' + t'') \times t'''}{t' + t''}} \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Simplificando-se os denominadores, teremos:

$$T = \frac{t' \times t'' \times t'''}{t' \times t'' + t' \times t''' + t'' \times t'''} .$$

9) Demonstrar que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Resolução:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1) + B \times n}{n(n+1)}$$

$$0 \times n + 1 = (A + B) \times n + A$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \Rightarrow 1 + B = 0 \therefore B = -1 \end{cases}$$

Substituindo A e B em (I), teremos:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} \text{ ou}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

10) Calcular a soma (S) gerada por $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$

Resolução:

Fazendo em $\frac{1}{n\times(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, k$, teremos:

para $n = 1$, $\quad \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

para $n = 2$, $\quad \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ para $n = 3$, $\quad \frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$\vdots$

para $n = k$, $\quad \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Somando membro a membro, teremos:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

$$S = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

Como $n = k$, teremos:

$$S = \frac{n}{n+1}$$

11) Provar que $\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$

Resolução:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = 2\times\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \equiv \frac{A}{2n+1} - \frac{B}{2n+3} \qquad \ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \equiv \frac{A\times(2n+3) - B\times(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \equiv$$

$$\equiv \frac{(2A-2B)\times n + 3A - B}{(2n+1)(2n+3)}$$

$0 \times n + 1 = (2A - 2B) \times n + 3A - B.$

Dessa igualdade podemos tirar:

1º) $2A - 2B = 0 \therefore A = B$

2º) $3A - B = 1 \to 3B - B = 1 \therefore B = A = \frac{1}{2}$

Substituindo A e B em (I), teremos:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = 2 \times \left[\frac{\frac{1}{2}}{2n+1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+3} \right]$$

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \quad \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

12) Calcular a soma (S) gerada por

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Resolução:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$2S = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

Sabemos que $\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$, onde n pode ser: $0, 1, 2, \ldots, k$.

Se $n = 0 \to \frac{2}{3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$

Se $n = 1 \to \frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

Se $n = 2 \to \frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$

$\vdots \qquad \vdots$

Se $n = k \to \frac{2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$

Somando membro a membro, teremos:

$$2S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2k+3}$$

$$2S = \frac{2k+3-1}{2k+3}$$

$$S = \frac{2(k+1)}{2(2k+3)}$$

$$S = \frac{k+1}{2k+3}$$

Como $k = n$, teremos :

$$S = \frac{n+1}{2n+3}$$

13) Se $A = \underbrace{111\ldots11}_{\text{8 algs}}$ e $B = \underbrace{111\ldots11}_{\text{100 algs}}$, calcular o mdc de A e B.

Resolução:

$$A = \frac{10^8-1}{9} \text{ e } B = \frac{10^{100}-1}{9}$$

$$\text{m.d.c. } \left(\frac{10^8-1}{9}, \frac{10^{100}-1}{9}\right) = m$$

$$\text{m.d.c } \left(9 \times \frac{10^8-1}{9}, 9 \times \frac{10^{100}-1}{9}\right) = 9 \times m.$$

m.d.c. $(10^8-1, 10^{100}-1) = 9 \times m.$

Sabemos da Álgebra que: $a^m - b^m$ é divisível por $(a-b)$.

Observe que (10^8-1) não divide $10^{100}-1$.

Fatorando, então, 10^8-1, teremos:

$$\frac{10^{100}-1}{10^8-1} = \frac{(10^4)^{25}-(1)^{25}}{(10^4+1)(10^4-1)}.$$

Vê-se pois que (10^4-1) divide $(10^4)^{25}-(1)^{25}$, daí ...

$$9 \times M = 10^4 - 1$$

$$M = \frac{10^4-1}{9} = 1.111.$$

Logo, o m.d.c. $\left(\dfrac{10^8-1}{9}, \dfrac{10^{100}-1}{9}\right) = 1.111.$

14) Três torneiras enchem um tanque do seguinte modo: a $1^{\underline{a}}$ mais a $3^{\underline{a}}$ em 84 minutos; a $1^{\underline{a}}$ mais a $2^{\underline{a}}$ em 70 minutos, e a $2^{\underline{a}}$ mais a $3^{\underline{a}}$ em 140 minutos. Achar o tempo que levará cada uma para enchê-lo.

Resolução:

Chamemos as $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ torneiras, de A, B e C, respectivamente.

Sendo $A + C = 84$ min., $A + B = 70$ min. e $B + C = 140$ min.

Logo, a cada minuto, a parte do tanque enchido é:

$A + C = \dfrac{1}{84} \quad \ldots \quad$ (I)

$A + B = \dfrac{1}{70} \quad \ldots \quad$ (II)

$B + C = \dfrac{1}{140} \quad \ldots \quad$ (III)

Somando-se I, II e III, teremos: $2 \times (A + B + C) = \dfrac{1}{84} + \dfrac{1}{70} + \dfrac{1}{140}.$.

Simplificando, virá:

$A + B + C = \dfrac{1}{60}$

Substituindo (III) em (IV) $\ldots A = \dfrac{1}{60} - \dfrac{1}{140} = \dfrac{4}{420} = \dfrac{1}{105}$

Substituindo (I) em (IV) $\ldots B = \dfrac{1}{60} - \dfrac{1}{84} = \dfrac{2}{240} = \dfrac{1}{210}$

Substituindo (II) em (IV) $\ldots C = \dfrac{1}{60} - \dfrac{1}{70} = \dfrac{1}{420}$

	tanque		min.
$1^{\underline{a}}$ Torneira:	$\dfrac{1}{105}$	...	1
	1	...	105

	tanque		min.
$2^{\underline{a}}$ Torneira:	$\dfrac{1}{210}$	...	1
	1	...	210

	tanque		min.
3ª Torneira:	$\frac{1}{420}$	...	1
	1	...	420

Resp.:

1ª : 105 min.

2ª : 210 min.

3ª : 420 min.

15) Um cachorro persegue uma lebre; enquanto o cachorro dá 4 pulos, a lebre dá 9, porém, 2 pulos do cachorro valem 7 pulos da lebre. Sendo a distância entre os dois de 100 pulos de lebre, determinar o número de pulos o cachorro deverá dar para alcançar a lebre.

1ª *resolução*:

Cachorro		Lebre
4	....	9
2	....	7
4	....	9
4	....	14

Vê-se que a cada 4 pulos o cachorro avança $5(14-9)$ pulinhos de lebre.

Cach		avanço
4	$\longrightarrow$	5
80	$\longleftarrow$	100

Resp.:80 pulos

2ª *resolução*: (algébrica)

Seja p o número de pulos que o cachorro deve dar para alcançar a lebre.

Do que foi desenvolvido anteriormente, podemos simplesmente escrever a equação:

$$\frac{7}{2}p - \frac{9}{4}p = 100 \therefore p = 80$$

7.22 Exercícios Propostos

1) Efetue e simplifique as frações, até torná-las irredutíveis:

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$

b) $\frac{7}{9}-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}$

c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$

e) $\frac{1}{7}+\frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

g) $1+\frac{3}{2}$

h) $1-\frac{1}{5}$

i) $2\times\frac{3}{5}$

j) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

k) $2+\frac{3}{5}$

l) $\frac{4}{5}+3$

m) $\dfrac{2}{\frac{2}{5}}$

n) $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

o) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{5}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+4+\frac{1}{2}}$

p) $\dfrac{5-\frac{1}{10}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{2}{5}\right)}$

q) $\dfrac{\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}}{\frac{7}{12}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}+\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{9}{4}}{\frac{11}{16}-\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}}$

r) $1-\dfrac{4-\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{8}+\frac{139}{40}}$

s) $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}}{1+\dfrac{1+\frac{1}{4}}{4}}$

t) $\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{4+\frac{5}{6}}}$

u) $\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5}}}}$

v) $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}$

w) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$

x) $\dfrac{\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}{4+\dfrac{1}{2}}$

y) $1-\dfrac{1-\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}{1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}$

z) $\dfrac{\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}{3}}+\dfrac{\frac{1}{2}}{\dfrac{5}{1-\frac{1}{5}}-1}$

2) Efetue e simplifique as frações, até torná-las irredutíveis:

a) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{10}\right);$

b) $\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{4}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{2}{99}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{100}\right);$

c) $\left(1+\dfrac{1}{15}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{16}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{17}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{18}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{19}\right);$

d) $\left(1-\dfrac{3}{7}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{8}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{9}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{3}{20}\right);$

e) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{99}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{100}\right);$

f) $\dfrac{2^2-1}{2^2+2}\times\dfrac{3^2-1}{3^2+3}\times\dfrac{4^2-1}{4^2+4}\times\cdots\times\dfrac{19^2-1}{19^2+19}\times\dfrac{20^2-1}{20^2+20};$

g) $2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+4\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots+10\times\left(1-\frac{1}{10}\right);$

h) $20+\left(20+\frac{1}{5}\right)+\left(20+\frac{2}{5}\right)+\left(20+\frac{3}{5}\right)+\cdots+40;$

i) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{98}{100}+\frac{99}{100}\right);$

j) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\times\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\times\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}\times\cdots\times\dfrac{\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}}{\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}};$

k) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots+\frac{1}{97\times 99};$

l) $\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\cdots+\frac{2}{19\times 21};$

m) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{9^2-1}+\frac{1}{10^2-1};$

n) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right);$

o) $\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{28\times 31};$

p) $\frac{13}{2\times 4}+\frac{13}{4\times 6}+\frac{13}{6\times 8}+\cdots+\frac{13}{50\times 52};$

q) $\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\times\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\times\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\times\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\times\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(12^4+\frac{1}{4}\right)};$

r) $\frac{1}{10}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\cdots$ (Harvard)

3) Calcule:

a) $16^{\frac{1}{2}}$

b) $8^{\frac{1}{3}}$

c) $49^{\frac{1}{2}}$

d) $64^{\frac{1}{3}}$

e) $81^{\frac{1}{4}}$

f) $625^{\frac{1}{4}}$

g) $\left(\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^{4}+4^{11}}\right)^{\frac{1}{2}}$

4) Se $\dfrac{43}{19} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$, calcule $a+b+c+d$.

5) Determine $a+b+c$, sabendo que $a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \dfrac{15}{2}\cdot$

6) Se A, B e C são inteiros positivos, onde $\dfrac{31}{4} = A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C+1}}$, calcule $A^2+B^2+C^2$.

7) Considere os números $a = \dfrac{105678+10^{999}}{105679+10^{999}}$ e $b = \dfrac{105679+10^{999}}{105680+10^{999}}$. No que concerne a a e b pode-se afirmar que:

a) a é maior que b
b) a é igual a b
c) a é menor que b
d) a é maior ou igual a b
e) a é menor ou igual a b

8) Transforme $\dfrac{53}{23}$ em uma fração contínua limitada.

9) Calcule o valor de $\dfrac{2^{2.001}+2^{1.999}}{2^{2.000}-2^{1.998}}\cdot$

10) O valor de $\dfrac{\overbrace{999.999}^{18 \text{ noves}}}{999\,999\,999} - 1$.

11) Qual é o maior número natural menor ou igual a $\dfrac{3^{31}+2^{31}}{3^{29}+2^{29}}$.

12) Determine a fração equivalente a $\dfrac{7}{15}$, cuja soma dos termos seja 198.

13) Qual é a fração equivalente a $\dfrac{3}{8}$, cuja diferença dos seus termos seja 40?

14) Calcule z, de modo que a fração $\dfrac{z+66}{z+91}$ seja o quadrado de outra fração, cujos termos sejam consecutivos.

15) Calcule a soma dos termos da maior fração própria irredutível para que o produto de seus termos seja 60.

16) Numa cesta havia laranjas. Deram-se $\dfrac{2}{5}$ a uma pessoa, a terça parte do resto a outra e ainda restaram 10 laranjas. Quantas laranjas havia?

17) Duas camponesas foram à feira levando 410 ovos para vender. A primeira conseguiu vender $\dfrac{2}{5}$ dos ovos que levava e a segunda os $\dfrac{3}{7}$. Sabendo-se que elas voltaram com o mesmo número de ovos, quantos ovos levava cada uma?

18) Uma pessoa, depois de gastar $\dfrac{3}{8}$ de seu dinheiro, pagou uma dívida de $\dfrac{2}{3}$ do que restou, ficando ainda com $R\$120,00$. Quanto possuia essa pessoa?

19) De um recipiente cheio de água retiram-se $\dfrac{2}{3}$ do seu conteúdo. Recolocando-se 30 litros de água, o conteúdo passa a ocupar a metade do volume inicial. Qual é a capacidade do recipiente?

20) Pedro e Paulo, encarregados de uma obra, fariam todo o trabalho em 12 dias. No fim do quarto dia de trabalho, Pedro adoeceu e Paulo concluiu o serviço em 10 dias. Que fração da obra cada um executou?

21) Para ladrilhar $\dfrac{5}{7}$ de um pátio, utilizaram-se 46.360 ladrilhos. Quantos ladrilhos iguais a esses serão necessários para ladrilhar $3/8$ desse pátio?

22) Uma torneira enche um tanque em 1 hora e uma outra em 3 horas. Estando o mesmo vazio e abrindo-as simultaneamente, em quantos minutos enchê-lo-ão?

23) Um registro esvazia um tanque em 2 horas e um outro em 4 horas. Estando cheio e abrindo-as simultaneamente, determine o tempo em que o nível da água atingirá $\frac{1}{4}$ do mesmo.

24) Duas torneiras enchem um tanque em $1h\,12min$. Sabendo-se que uma delas o enche em 2 horas, em quantas horas a outra, separadamente, o encherá?

25) Uma torneira enche certo tanque em 5 horas e uma outra o esvazia em 3 horas. Supondo o mesmo cheio e abrindo-as simultaneamente, em quanto tempo (horas e minutos) será esvaziado?

26) Um reservatório é alimentado por duas torneiras. A primeira pode enchê-lo em 15 horas e a segunda em 12 horas. Que fração deste reservatório as duas encherão em 1 hora?

27) Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas, sozinha, enchê-lo-ia em 7 horas. Em quanto tempo a outra, sozinha, encheria o mesmo?

28) Uma torneira enche um tanque em 15 minutos e uma outra em 7 minutos e 30 segundos. Se forem abertas simultneamente, em quantos minutos enchê-lo-ão?

29) Uma torneira enche um tanque em $\frac{1}{8}$ da hora e um registro o esvazia em $\frac{1}{4}$ da hora. Se forem abertas simultneamente, em que tempo encherão o mesmo?

30) Uma torneira enche um tanque em 15 horas e uma segunda em 10 horas. Se a primeira for conservada aberta durante 40 minutos e a segunda durante 30 minutos, que fração do tanque ficará cheia?

31) Duas torneiras são abertas juntas. A primeira enche um tanque em 5 horas e a segunda, um outro tanque de igual capacidade em 4 horas. No fim de quanto tempo o volume que falta para echer o segundo será $\frac{1}{4}$ do volume que falta para encher o primeiro?

32) Uma torneira leva 12 minutos para encher um tanque, se abrirmos a torneira A, e leva 18 minutos, se abrirmos a torneira B. Primeiramente abrimos a torneira A, e decorrido algum tempo, fechamos torneira A e abrimos a torneira B. Depois de 3 minutos que a torneira B ficou aberta o tanque encheu. Quantos minutos a torneira A ficou aberta?

33) Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto uma segunda gasta 18 minutos para enchê-lo. Com o tanque inicialmente vazio, abrisse a primeira durante x minutos; ao fim desse tempo fecha-se essa torneira e abrisse a segunda, a qual termina de enchê-lo em $x+3$ minutos. Nessas condições, em quantos minutos o tanque ficará cheio?

34) Um comerciante vendeu a um freguês $\frac{2}{5}$ das laranjas que possuía, mais três laranjas e a um segundo, vendeu $\frac{1}{4}$ das laranjas que possuía inicialmente mais sete laranjas. Quantas laranjas possuía o negociante, sabendo-se que o primeiro freguês recebeu 8 laranjas a mais que o segundo?

35) Calcule a soma de todas as frações positivas menores que 10, que possuem denominador 30, quando escritas na sua forma irredutível.

36) Um automóvel pode deslocar-se, sem se abastecer de combustível, durante 360 minutos. Tendo saído com um furo no tanque de gasolina, ele andou, apenas, 144 minutos. Quer-se saber que quantidade de gasolina escoaria do tanque se ficasse 15 minutos parado.

37) Duas turmas, cada uma com 20 trabalhadores, foram encarregados de serviços iguais. No fim de 25 dias a primeira turma havia feito $\frac{3}{8}$ do trabalho e a segunda $\frac{5}{7}$. Quantos operários as segunda devem ser removidos para a primeira, afim de que o trabalho desta turma fique pronto no fim de 60 dias?

Respostas

1)

a)	$\frac{5}{7}$	g)	$\frac{5}{2}$	m)	5	s)	$\frac{10}{21}$
b)	$\frac{4}{9}$	h)	$\frac{4}{5}$	n)	3	t)	$\frac{29}{76}$
c)	$\frac{3}{4}$	i)	$\frac{6}{5}$	o)	$\frac{5}{6}$	u)	$\frac{37}{164}$
d)	$\frac{2}{9}$	j)	$\frac{10}{9}$	p)	1	w)	$\frac{75}{64}$
e)	$\frac{5}{6}$	k)	$\frac{10}{3}$	q)	$\frac{13}{3}$	x)	**1**
f)	$\frac{1}{20}$	l)	$\frac{4}{15}$	r)	0	y)	$\frac{5}{6}$
						z)	$\frac{29}{16}$

2)

a)	$\frac{11}{2}$	g)	45	m)	$\frac{36}{55}$
b)	$\frac{1}{4.950}$	h)	8.040	n)	$\frac{101}{200}$
c)	$\frac{4}{3}$	i)	2.475	o)	$\frac{10}{31}$
d)	$\frac{1}{57}$	j)	1.003	p)	$\frac{25}{8}$
e)	$\frac{1}{100}$	k)	$\frac{49}{99}$	q)	$\frac{1}{313}$
f)	$\frac{1}{20}$	l)	$\frac{20}{21}$	r)	$\frac{13}{36}$

3)

a) 4

b) 2

c) 7

d) 4

e) 3

f) 5

g) 16

4) 10

5) 9

6) 54

7) **c**

8) $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$

9) $\frac{10}{3}$

10) 10^9

11) 8

12) $\frac{63}{135}$

13) $\frac{24}{64}$

14) 78

15) 17

16) 25

17) 1ª) 200; 2ª) 210

18) R$ 576, 00

19) 180ℓ

20) Pedro: $\frac{14}{15}$, **Paulo:** $\frac{1}{15}$

21) 24.339

22) 45 min

23) 1 h

24) 3 h

25) 7h 30min

26) $\frac{3}{20}$

27) 9h 20min

28) 5 min

29) 3min 45seg

30) 7/60

31) 45 min

32) 10 min

33) 15 min

34) 80

35) 400

36) $\frac{1}{16}$

37) 2

Capítulo 8

Números β-cimais e Números β-nários

8.1 Introdução

Seja a fração $\frac{N}{(10_\beta)^p}$, $\beta \geq 2$ onde $N = abcd\ldots$ possua n algarismos e $p \in \mathbb{N}$[1]. Para obtermos o(s) número(s) gerado(s) por essa(s) fração(ões), iremos inicialmente supor $p = n - 1$ e, assim sendo, podemos escrever $\frac{abcd\ldots}{10_\beta^{n-1}}$.

Desmembrando essa fração homogeneamente, onde os numeradores sejam valores relativos desses algarismos, teremos:

$$\frac{abcd...}{(10_\beta)^{n-1}} = \frac{a \times 10_\beta^{n-1} + b \times 10_\beta^{n-2} + c \times 10_\beta^{n-3} + d \times 10_\beta^{n-4} + \cdots}{(10_\beta)^{n-1}} \text{ ou}$$

$$\frac{(abcd...)_\beta}{(10_\beta)^{n-1}} = \frac{a \times 10_\beta^{n-1}}{(10_\beta)^{n-1}} + \frac{b \times 10_\beta^{n-2}}{(10_\beta)^{n-1}} + \frac{c \times 10_\beta^{n-3}}{(10_\beta)^{n-1}} + \frac{d \times 10_\beta^{n-4}}{(10_\beta)^{n-1}} + \cdots$$

Simplificando, teremos:

$$\frac{abcd...}{10_\beta^{n-1}} = a + \frac{b}{10_\beta^1} + \frac{c}{10_\beta^2} + \frac{d}{10_\beta^3} + \cdots,$$

ou ainda:

$$\frac{abcd...}{10_\beta^{n-1}} = a + \frac{b}{10_\beta} + \frac{c}{100_\beta} + \frac{d}{1000_\beta} + \cdots$$

[1] John Napier $(1.550 - 1.617)$

Separando o "a" das frações por uma vírgula e conservando após a mesma os demais numeradores, teremos $(a, bcd...)_\beta$, ao qual se denomina de números β-cimais ou números β-nários.

Em um número qualquer $(...abc, def...)_\beta$, o algarismo ou o conjunto de algarismos à esquerda da vírgula denomina-se *parte inteira* ou *característica* e, o(s) da direita, diz(em)-se parte β-cimal, parte β-nária ou as duas podem ser ditas, *mantissa*.

Ex$_1$.: Seja transformar a fração $\left(\frac{7319}{1000}\right)_\beta$ em número β-cimal ou β-nário.

$$\left(\frac{7319}{1000}\right)_\beta = \left(\frac{7000+300+10+9}{1000}\right)_\beta$$

$$\left(\frac{7319}{1000}\right)_\beta = \left(\frac{7000}{1000}+\frac{300}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{9}{1000}\right)_\beta$$

$$\left(\frac{7319}{1000}\right)_\beta = \left(7+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}+\frac{9}{1000}\right)_\beta$$

$$\left(\frac{7319}{1000}\right)_\beta = 7,319_\beta$$

Ex$_2$.: $(2+0,3+0,03+0,003+\cdots)_\beta = (2,333...)_\beta$

Ex$_3$.: $(3+0,2+0,4+0,04+0,004+\cdots)_\beta = (3,2444...)_\beta$

8.2 Nomenclatura Numa Base Qualquer β

Base		Lê-se:
$\beta=2$	$(abc, def\dots)_2$	número binário
$\beta=3$	$(abc, def\dots)_3$	número ternário
$\beta=4$	$(abc, def\dots)_4$	número quaternário
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\beta = 9$	$(abc, def \dots)_9$	número nonário
$\beta = 10$	$(abc, def \dots)_{10}$	número decimal
$\beta = 11$	$(abc, def \dots)_{11}$	número undecimal
$\beta = 12$	$(abc, def \dots)_{12}$	número duodecimal
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\beta = 15$	$(abc, def \dots)_{15}$	número pentadecimal
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\beta = 20$	$(abc, def \dots)_{20}$	número icodecimal
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

8.3 Leitura dos Números Não Decimais

Lê-se algarismo por algarismo da *característica*, seguido da palavra vírgula; em seguida, algarismo por algarismo da *mantissa*, seguido do número correspondente à base.

Ex.: $3,71_{(5)}$ - três vírgula, sete, um, base cinco.

$(0,2444\dots)_6$ - zero vírgula, dois, quatro, quatro, quatro, etecétera, base seis.

8.4 Leitura dos Números Decimais

1º) modo: Lê-se a parte inteira, se houver, seguida da parte decimal, dandо-lhe o nome da última ordem.

Obs.: Caso não haja a parte inteira, enuncia-se apenas a decimal, conforme a última ordem.

Ex$_1$.: $2,345 \rightarrow$ dois inteiros, trezentos e quarenta e cinco milésimos.

Ex$_2$.: $0,76 \rightarrow$ setenta e seis centésimos.

Ex$_3$.: $2,333 \rightarrow$ dois vírgula, três, três, três, ...

2º) modo: Lê-se o número decimal sem a vírgula, seguido da denominação da última ordem decimal.

Ex.: $3,542 \rightarrow$ três mil quinhentos e quarenta e dois milésimos.

3º) modo: Lê-se separadamente cada algarismo, dando-lhes a denominação decimal correspondente.

Ex.: $7,869 \to$ sete unidades, oito décimos, seis centésimos e nove milésimos

4º) modo: Lêem-se as partes inteira e decimal, algarismo por algarismo, interpondo a palavra vírgula.

Ex.: $8,75 \to$ oito vírgula setenta e cinco.

Obs.: Para escrevermos um número decimal, devemos seguir os seguintes passos:

1º) escreve-se a parte inteira seguido da vírgula;
2º) da esquerda para a direita, escrevem-se os décimos, centésimos, milésimos;
3º) caso falte a parte inteira ou alguma ordem decimal, coloca-se o zero no lugar da mesma.

Ex$_1$.: Dois décimos ou $0,2$

Ex$_2$.: Sete milésimos ou $0,07$;

Ex$_3$.: Sessenta e sete, décimos milésimos ou $0,0067$

Ex$_4$.: Trinta e duas unidades e quarenta e sete milésimos ou $32,047$

8.4.1 Unidades Decimais

Denominam-se unidades decimais fracionárias ou simplesmente unidades decimais, as frações $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1.000}, \ldots$, e lêem-se: *um décimo, um centésimo, um milésimo.*

Essas unidades decimais também são ditas: de 1ª ordem, de 2ª ordem, de 3ª ordem, ...

8.5 Princípios

Os mesmos princípios da numeração decimal também são aplicáveis aos números decimais.

1º princípio: da numeração falada.

"*Dez unidades de uma ordem decimal qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior*".

2º princípio: da numeração escrita.

“*Todo algarismo decimal escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem decimal igual a dez vezes as unidades de ordem desse outro*”.

8.6 Propriedades

1ª) “*Um número decimal não se altera quando colocamos um ou mais zeros à direita do último algarismo significativo (da direita) ou à esquerda do primeiro da parte inteira*”.

Exs.: $2,34 = 2,340 = 2,3400 = 2,34000\ldots$
$2,34 = 02,34 = 002,34 = \ldots 0002,34$

2ª) Obs.:

$$\frac{ab}{10} = a,b \Rightarrow 10 \times a,b = ab$$

$$\frac{abc}{100} = a,bc \Rightarrow 100 \times a,bc = abc$$

$$\frac{abcd}{1000} = a,bcd \Rightarrow 1000 \times a,bcd = abcd$$

Conclusão:

“*Para determinarmos o produto de um número decimal por* $10, 100, 1.000, \ldots 10^n$ $(n \in \mathrm{IN})$*, basta deslocarmos a vírgula uma, duas, três,* $\ldots n$ *casas decimais para a direita*”.

Ex$_1$.: $34,5768 \times 10 = 345,768$

Ex$_2$.: $43,8675 \times 100 = 4386,75$

Ex$_3$.: $123,4567 \times 1000 = 123456,7$

3ª) Obs.: Sabemos que:

$$\frac{ab}{10} = a,b$$

$$\frac{abc}{100} = a,bc$$

$$\frac{abcd}{1000} = a,bcd$$

Conclusão:

"*Para determinarmos o quociente de um número decimal por* $10, 100$, $1.000, \ldots 10^n$ $(n \in \mathbb{N})$, *basta deslocarmos a vírgula uma, duas, três,...* n *casas decimais para a esquerda*".

Ex$_1$.: $473 \div 10 = 47,3$

Ex$_2$.: $734 \div 100 = 7,34$

Ex$_3$.: $234,5 \div 1000 = 0,2345$

Obs$_1$.: Se: $10 = 10^1$

$$100 = 10^2$$
$$1000 = 10^3$$
$$\vdots$$
$$1\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ zeros}} = 10^n,$$ conclui-se que:

"*Multiplicar ou dividir um número decimal por* 10^n *significa deslocar a vírgula para a direita ou para a esquerda, tantas casas quantas forem as unidades do expoente*".

Exs.:
a) $7,345 \times 10^2 = 734,5$
b) $478,5 \div 10^2 = 4,785$

Obs$_2$.: Qualquer fração decimal irredutível da forma $\dfrac{N}{10^p}$ pode ser expressa por $N \times 10^{-p}$, pois,

$$\frac{N}{10^p} = N \times \frac{1}{10^p} = N \times \frac{10^0}{10^p} = N \times 10^{0-p} = N \times 10^{-p}$$

Ex$_1$.: $\dfrac{3}{10^7} = 3 \times 10^{-7}$

Ex$_2$.: $\dfrac{2}{10^3} = 2 \times 10^{-3}$

Da observação anterior, podemos concluir que:

Ao multiplicarmos um número decimal por 10^{-n} $(n \in \mathbb{N}^*)$, *basta deslocarmos a vírgula* n *casas para a esquerda.*

Exs.:
a) $23,7 \times 10^{-1} = 2,37$
b) $2347,8 \times 10^{-2} = 23,478$
c) $2 \times 10^{-3} = 0,002$

Obs$_3$.: O deslocamento da vírgula num sistema não decimal poderá ser também para a esquerda ou para a direita, ou seja, vai depender da operação indicada:

a) se for multiplicação, ou seja:

$abc, def_{(\beta)} \times 10^n \Rightarrow n$ algarismos para a direita;

b) se for divisão, ou seja:

$abc, def_{(\beta)} \div 10^n \Rightarrow n$ algarismos para a esquerda.

8.7 Números Decimais Exatos e Inexatos

Quando a partir de uma fração irredutível $\frac{N}{D}$, dividirmos o numerador pelo denominador, dois tipos de números decimais poderão surgir no quociente: decimais exatos (dízimas finitas) ou decimais inexatos.

Há dois tipos de decimais inexatos: os periódicos (dízimas periódicas) e os ilimitados não periódicos, denominados de números irracionais[2].

8.7.1 Números Decimais Exatos

São aqueles que possuem um número limitado de algarismos na parte decimal.

Ex.: $\frac{3}{8}$

$$\begin{array}{l|l} 3 & 8 \\ \hline \ \ 30 & 0,375 \\ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ 40 & \end{array}$$

$\frac{3}{8} = 0,375 \Rightarrow$ número decimal exato com 3 algarismos na parte decimal.

8.7.2 Números Decimais Periódicos

São números decimais inexatos em que, na mantissa, aparece(m) um algarismo ou um grupo de algarismos repetindo-se infinitamente.

Ex.: a) $\frac{7}{3}$

[2] No cap. 11 estudaremos a determinação (extração) de tais números.

$$\begin{array}{l|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} \ \ 10 & 2,333\ldots \\ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ddots & \end{array}$$

Ex.: b) $\frac{5}{7}$

$$\begin{array}{l|l} 5 & 7 \\ \cline{2-2} \ 50 & 0,71428571\ldots \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ddots & \end{array}$$

Ex.: c) $\frac{23}{6}$

$$\begin{array}{l|l} 23 & 6 \\ \cline{2-2} \ 50 & 3,8333\ldots \\ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ddots & \end{array}$$

Obs.: O algarismo ou o conjunto de algarismos que se repete(m) nas dízimas periódicas denomina(m)-se "*período*".

No exemplo (b) o período é 714285; no exemplo (c), o período é 3.

8.7.3 Classificações dos Números Irracionais

Os irracionais podem ser: *modulados, ordenadamente crescentes e caóticos*.

Exemplos

a) de modulados: $0,12112211122211112222\ldots$;
$5,30330033300033330000\ldots$

b) de ordenadamente crescente: $0,12345678910111213\ldots$
$0,369121518\ldots$
$0,510152025\ldots$

c) de caóticos: $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$
$\pi = 3,141592653\ldots$
$e = 2,7182814590\ldots$

8.8 Quociente com Aproximação

Calcular o quociente de dois números N e D com uma aproximação $\frac{a}{b}$ de unidade significa determinar o maior número que, multiplicado por D, gere o maior produto contido no numerador.

8.8.1 Regra

Multiplica-se $\frac{N}{D}$ *por* $\frac{a}{b}$*; divide-se o numerador da fração encontrada pelo denominador, com uma aproximação de uma unidade; multiplica-se o quociente obtido pela fração* $\frac{b}{a}$*; o resultado será o quociente com a aproximação desejada.*

Ex₁.: Calcular com uma aproximação $\frac{1}{100}(0,01)$ o quociente de 3 por 7.

$1^{\underline{o}})$ $\quad \frac{3}{7} \times \frac{100}{1} = \frac{300}{7}$

$2^{\underline{o}})$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 42 \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

$3^{\underline{o}})$ $\quad 42 \times \frac{1}{100} = 0,42 \Rightarrow$ quociente com a aproximação desejada.

Obs.: Na prática, teremos:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0,42 \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

Ex₂.: Calcular com uma aproximação $\frac{1}{4}$ de unidade o quociente de 3 por 7.

1º) $\frac{3}{7} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{7}$

2º) $\begin{array}{r|l} 12 & 7 \\ \hline 5 & 1 \end{array}$

Resp.: $1\frac{5}{7}$

Ex3.: Calcular $\frac{5}{9}$ com aproximação $\frac{3}{7}$ de unidade

1º) $\frac{5}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{35}{27}$

2º) $\begin{array}{r|l} 35 & 27 \\ \hline 8 & 1 \end{array}$

Resp.: $1\frac{8}{27}$

8.9 Notação das Dízimas Periódicas

Representando o período por letras, podemos ter as seguintes notações:

$a, b...;\ a(b);\ \ a, [b];\ \ a, \bar{b};\ \ a, \overset{\frown}{b}$ ou ainda $a, \dot{b}$

$a, bcbcbc...;\ \ a(bc);\ \ a, [bc];\ \ a, \overline{bc};\ \ a, \overset{\frown}{bc}$ ou ainda $a, \dot{b}\dot{c}$

$ab, cddd...;\ \ ab, c(d);\ \ ab, c[d];\ \ ab, \overline{cd};\ \ ab, c\overset{\frown}{d}$ ou ainda $ab, c\dot{b}$

Obs.: O algarismo ou o conjunto de algarismos entre a vírgula e o período, denomina-se *anteperíodo*.

Ex.: $4,31888\ldots \begin{cases} 4\ldots \text{ parte inteira} \\ 31\ldots \text{anteperíodo} \end{cases}$

8.10 Classificação das Dízimas Periódicas

As dízimas periódicas são classificadas em função do próprio período. Elas podem ser: periódicas *simples* ou periódicas *compostas*.

8.10.1 Dízimas Periódicas Simples

São aquelas onde o período começa logo após a vírgula.

Exs.: $0,222\ldots$
$3,(27)$
$32,\overline{123}$
$(2,333\ldots)_5$

8.10.2 Dízimas Periódicas Compostas

São aquelas que possuem anteperíodo.

Exs.: $0,2(3)$
$31,12(437)$
$(1,266\ldots)_7$

8.11 Geratrizes de Números β-cimais e β-nários

Denomina-se *geratriz*, a fração que reproduz o número dado.

$1^{\underline{o}}$ caso: O número é decimal exato

Propriedade:

A geratriz de um número decimal exato tem para numerador o número dado, sem a vírgula, e para denominador, o 1 *seguido de um ou mais zeros, igual ao número de algarismo(s) da mantissa.*

Seja $(ab\ldots kl, mn\ldots yz)_\beta$ um número β-cimal ou β-nário exato, com α algarismo(s) na característica e β algarismo(s) na mantissa.
Supondo G a sua geratriz, teremos a seguinte igualdade:

$$G = (\underbrace{ab\ldots kl}_{\gamma}, \underbrace{mn\ldots yz}_{\delta})_\beta$$

Multiplicando-se os dois membros por $(10_\beta)^\delta$, teremos:

$$(10_\beta)^\delta \times G = (\underbrace{ab\ldots kmn\ldots yz}_{\gamma+\delta \text{ algs.}})_\beta \Rightarrow G = \frac{\overbrace{(ab\ldots klmn\ldots yz)_\beta}^{\gamma+\delta \text{ algs.}}}{(10_\beta)^\delta},$$

como $(10_\beta)^\delta = (1\underbrace{00\ldots0}_{\delta \text{ zero(s)}})_\beta$, então,

$$G = \frac{(\overbrace{ab\ldots klmn\ldots yz}^{\gamma+\delta \text{ algs.}})_\beta}{(1\underbrace{00\ldots0}_{\delta \text{ zero(s)}})_\beta}$$

Exs.:

a) $2,3 = \dfrac{23}{10}$

b) $12,345 = \dfrac{12.345}{1.000}$, simplificando-a, teremos $\dfrac{2.469}{200}$

c) $(3,4)_7 = \dfrac{34_7}{10_7}$ ou $\left(\dfrac{34}{10}\right)_7$

d) $0,25_8 = \dfrac{25_8}{100_8} = \left(\dfrac{25}{100}\right)_8$

2º caso: O número decimal é periódico

1ª hipótese: Dízimas periódicas simples

Propriedade:

A geratriz de uma dízima periódica simples tem para numerador o número dado sem a vírgula, menos a parte inteira, e para denominador tantos δ *quantos forem o número de algarismo(s) do período.*

Seja $(ab\ldots kl,\overline{mn\ldots yz})_\beta$ uma dízima periódica simples com γ algarismo(s) na característica e δ algarismo(s) no período.

Igualando esse número a G, teremos:

$$G = (\underbrace{ab\ldots kl}_{\gamma \text{ algs}},\underbrace{\overline{mn\ldots yz}}_{\delta \text{ algs}})_\beta \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

Multiplicando-se os dois membros por $(10_\beta)^\delta$, teremos:

$$(10_\beta)^\delta \times G = (\underbrace{ab\ldots klmn\ldots yz}_{\gamma+\delta \text{ algs}},\underbrace{\overline{mn\ldots yz}}_{\delta \text{ algs}})_\beta \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), teremos:

$$(10_\beta)^\delta \times G - G = (\underbrace{ab\ldots klmn\ldots yz}_{\gamma+\delta \text{ algs}},\underbrace{\overline{mn\ldots yz}}_{\delta \text{ algs}})_\beta - (\underbrace{ab\ldots kl}_{\gamma \text{ algs}},\underbrace{\overline{mn\ldots yz}}_{\delta \text{ algs}})_\beta$$

$$G \times ((10_\beta)^\delta - 1) = (\underbrace{ab\ldots klmn\ldots yz}_{\gamma+\delta \text{ algs}})_\beta - (\underbrace{ab\ldots kl}_{\gamma \text{ algs}})_\beta$$

$$G = \frac{(\overbrace{ab\ldots klmn\ldots yz}^{\gamma+\delta \text{ algs.}})_\beta - (\overbrace{ab\ldots kl}^{\gamma \text{ algs}})_\beta}{(10_\beta)^\delta - 1}$$

Como $(10_\beta)^\delta - 1 = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\delta \text{ alfa(s)}}$, para $\delta \in \mathbb{N}$, então...

$$G = \frac{(\overbrace{ab\ldots klmn\ldots yz}^{\gamma+\delta \text{ algs.}})_\beta - (\overbrace{ab\ldots kl}^{\gamma \text{ algs}})_\beta}{\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\delta \text{ alfa(s)}}} \quad \ldots \quad \text{c.q.d.}$$

Exs.:

a) $2,777\ldots = \dfrac{27-2}{9} = \dfrac{25}{9}$

b) $(0,242424\ldots)_6 = \dfrac{242_6 - 2_6}{55_6} = \dfrac{240_6}{55_6}$

c) $3,\overline{42}_6 = \dfrac{342_6 - 3_6}{55_6} = \dfrac{335_6}{55_6}$

Obs.: As dízimas cujo período $p = \beta - 1$ não têm geratrizes. Tal tentativa, leva-nos a um número (β-cimal ou β-nário) exato.

Ex$_1$.: $5,999\ldots = \dfrac{59-5}{9} = \dfrac{54}{9} = 6$

Na prática fazemos: $5,999\ldots = 5 + 1 = 6$.

Ex$_2$.: $(4,555\ldots)_6 = \dfrac{45_6 - 4_6}{5_6} = \dfrac{41_6}{5_6} = 5_6$

Ex$_3$.: $(2,3444\ldots)_5 = \dfrac{234_5 - 23_5}{40_5} = \dfrac{211_5}{40_5}$

2ª hipótese: Dízima periódica composta

Propriedade:

A geratriz de uma dízima periódica composta tem para numerador o número dado sem a vírgula até o primeiro período, inclusive, menos a parte não periódica (parte inteira + anteperíodo), e para denominador, a quantidade α de algarismos igual ao número de algarismos do período, seguido de um ou mais zeros relativos ao(s) do anteperíodo.

Seja $(ab\ldots ef,\ gh\ldots lmn\,\overline{op\ldots yz})_\beta$ uma dízima periódica composta, onde a parte inteira tenha γ algarismos, o anteperíodo δ e o período ξ algarismo(s).

Igualando esse número a letra G de geratriz, teremos:

$$G = (\underbrace{ab\ldots ef}_{\gamma \text{ algs}},\underbrace{gh\ldots lmn}_{\delta \text{ algs}}\underbrace{\overline{op\ldots yz}}_{\xi \text{ algs}})_\beta$$

Multiplicando-se respectivamente os dois membros por 10^δ e $10^{\delta+\xi}$, teremos:

$$10^\delta \times G = (\underbrace{ab\ldots efgh\ldots lmn}_{\gamma+\delta \text{ algs}},\underbrace{\overline{op\ldots yz}}_{\xi \text{ algs}})_\beta \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

$$10^{\delta+\xi} \times G = (\underbrace{ab\ldots efgh\ldots lmnop\ldots yz}_{\gamma+\delta+\xi \text{ algs}},\underbrace{\overline{op\ldots yz}}_{\xi \text{ algs}})_\beta \quad \ldots \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), teremos:

$$10^{\delta+\xi} \times G - 10^\delta \times G =$$

$$= (\underbrace{ab\ldots efgh\ldots lmnop\ldots yz}_{\gamma+\delta+\xi \text{ algs}},\underbrace{\overline{op\ldots yz}}_{\xi \text{ algs}})_\beta - (\underbrace{ab\ldots efgh\ldots lmn}_{\gamma+\delta \text{ algs}},\underbrace{\overline{op\ldots yz}}_{\xi \text{ algs}})_\beta$$

$$G\times(10^\xi-1)\times 10^\delta = (\underbrace{ab\ldots efgh\ldots lmnop\ldots yz}_{\gamma+\delta+\xi \text{ algs}})_\beta - (\underbrace{ab\ldots efgh\ldots lmn}_{\gamma+\delta \text{ algs}})_\beta$$

ou $G = \dfrac{(\overbrace{ab\ldots efgh\ldots lmnop - yz}^{\gamma+\delta+\xi \text{ algs}})_\beta - (\overbrace{ab\ldots efgh\ldots lmn}^{\gamma+\delta \text{ algs}})_\beta}{(10^\xi - 1)\times 10^\delta}$

Obs.: $10^\xi - 1 = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\xi \text{ alfa(s)}}$ e $(10_\beta)^\delta = (1\underbrace{00\ldots 0}_{\delta \text{ zero(s)}})_\beta$

Donde

$$G = \frac{(\overbrace{ab\ldots efgh\ldots lmnop\ldots yz}^{\gamma+\delta+\xi \text{ algs}}) - (\overbrace{ab\ldots efgh\ldots lmn}^{\gamma \text{ algs}})_\beta}{\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\xi \text{ alfa(s)}}\underbrace{00\ldots 0}_{\delta \text{ zero(s)}}}$$

Exemplos:

a) $1,2333\ldots = \dfrac{123-12}{90} = \dfrac{111}{90}$ ou $\dfrac{37}{30}$

b) $1,2356456456\ldots = \dfrac{123456-123}{99.900} = \dfrac{123333}{99.900}$ ou $\dfrac{41111}{33.300}$

c) $5,0999\ldots = \dfrac{509-50}{90} = \dfrac{459}{90} = \dfrac{51}{10}$ ou $5,1$.

d) $(3,2444\ldots)_7 = \dfrac{324_7 - 32_7}{60_7} = \dfrac{262_7}{30_7}$

8.12 Exercícios Propostos

1) Determine a geratriz de cada número, deixando-a sob a forma irredutível quando for possível.

a) $2,3$
b) $1,25$
c) $0,625$
d) $0,222\ldots$
e) $0,333\ldots$
f) $1,666\ldots$
g) $0,121212\ldots$
h) $0,123123123\ldots$
i) $1,111\ldots$
j) $0,\overline{42}$
k) $1,1(3)$
l) $0,0888\ldots$
m) $0,0[8]$
n) $0,0333\ldots$
o) $2,9181818\ldots$
p) $0,(39)$
q) $0,8333\ldots$
r) $0,(5)$
s) $0,0(5)$
t) $0,4(35)$
u) $0,424242\ldots$
v) $0,058333\ldots$
w) $0,0(6)$
x) $0,00555\ldots$
y) $0,04(72)$

2) Determine a geratriz de cada número, deixando-a sob a forma irredutível quando for possível.

a) $0,7_9$

b) $1,3_5$

c) $0,42_6$

d) $(4,2)_7$

e) $(2,333\ldots)_5$

f) $(4,222\ldots)_7$

g) $(0,424242\ldots)_6$

h) $(0,1222\ldots)_5$

i) $(0,222\ldots)_3$

j) $(0,888\ldots)_9$

l) $(3,2111\ldots)_5$

3) Efetue, dando a resposta sob forma de fração irredutível:

a) $0,444\ldots + 0,222\ldots$

b) $0,888\ldots - 0,555\ldots$

c) $0,121212\ldots \times 0,75$

d) $0,666\ldots \div 0,333\ldots$

4) Determine o número decimal gerado pelas seguintes frações:

a) $\dfrac{5}{56}$ c) $\dfrac{7}{11}$

b) $\dfrac{32}{125}$ d) $\dfrac{14}{15}$

Respostas

1) a) $23/10$

b) $5/4$

c) $5/8$

d) $2/9$

e) $1/3$

f) $5/3$

g) $4/33$

h) $41/333$

i) $10/9$

j) $44/33$

k) $17/15$

l) $4/45$

m) $1/55$

n) $1/30$

o) $321/110$

p) $13/33$

q) $5/6$

r) $5/9$

s) $1/18$

t) $431/990$

u) $14/33$

v) $7/120$

x) $1/15$

y) $13/275$

2) **a)** $\left(\frac{7}{10}\right)_9$

b) $\left(\frac{13}{10}\right)_5$

c) $\left(\frac{21}{30}\right)_6$

d) $\left(\frac{43}{10}\right)_7$

e) $\left(\frac{21}{4}\right)_5$

f) $\left(\frac{23}{3}\right)_7$

g) $\left(\frac{42}{55}\right)_6$

h) $\left(\frac{3}{20}\right)_5$

i) 1_3

k) 1_9

l) $1,3_4$

m) $\left(\frac{234}{40}\right)_5$

3) **a)** $2/3$

b) $1/3$

c) $\frac{1}{11}$

d) 2

4) a) $0,3125$

b) $0,256$

c) $0,636363\ldots$

d) $0,9333\ldots$

8.13 Critérios de Convertibilidade de uma Fração Ordinária Irredutível em Número Decimal

Vimos até agora que os números decimais, exatos ou periódicos, foram obtidos a partir de divisões. Estudaremos a seguir critérios que, a partir de teoremas, nos permitirão, pela simples decomposição do denominador em fatores primos, saber a natureza (ou espécie) de números gerados por essas frações

1º Teorema

A condição necessária e suficiente para que uma fração irredutível gere um número decimal exato é que o denominador seja $2, 5$ *ou* 10*, ou que a sua decomposição em fatores primos contenha potências de* 2 *ou* 5*, ou fatores envolvendo tais potências.*

Seja a fração $\dfrac{N}{2^\alpha \times 5^\beta}$, onde α e $\beta \in \mathbb{N}$.

Analisando o denominador, podemos considerar três hipóteses:

$1^{\underline{a}}$) hipótese: $\beta = \alpha$

a) Substituindo β por α, teremos: $\dfrac{N}{2^\alpha \times 5^\alpha}$ ou $\dfrac{N}{10^\alpha}$,

b) Substituindo α por β, teremos: $\dfrac{N}{2^\beta \times 5^\beta}$ ou $\dfrac{N}{10^\beta}$

Como o denominador é uma potência de 10, o quociente gerado será um número decimal exato.

Obs.: Vemos nessa demonstração que o número de algarismos da parte decimal é igual ao maior dos expoentes, seja α ou β.

$2^{\underline{a}}$) hipótese: $\alpha < \beta$

Se $\alpha < \beta$, então, $\beta = \alpha + \delta$.

Multiplicando-se os dois termos da fração $\frac{N}{2^{\alpha} \times 5^{\beta}}$ por 2^{δ}, teremos:

$$\frac{N \times 2^{\delta}}{2^{\alpha} \times 2^{\delta} \times 5^{\beta}} \Leftrightarrow \frac{N \times 2^{\delta}}{2^{\alpha+\delta} \times 5^{\beta}}$$

Substituindo $\alpha + \delta$ por β, teremos:

$$\frac{N \times 2^{\delta}}{2^{\beta} \times 5^{\beta}} \Leftrightarrow \frac{N \times 2^{\delta}}{10^{\beta}}$$

Como o denominador é uma potência de 10, essa fração gerará um "número decimal finito", com β algarismos na parte decimal.

3ª) hipótese: $\alpha > \beta$

Se $\alpha > \beta$, então $\alpha = \beta + \delta$.

De modo análogo ao que fizemos anteriormente, concluiremos que:

$$\frac{N}{2^{\alpha} \times 5^{\beta}} = \frac{N \times 5^{\delta}}{10^{\alpha}}$$

Vê-se também que a mesma gerará um número decimal exato com α algarismos na parte decimal e que o número de algarismos da parte decimal é dado simplesmente pelo maior expoente, seja do fator primo 2 ou do fator primo 5.

Ex$_1$.: $\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{7}{2^3} \Rightarrow$ um número decimal exato com 3 algarismos na parte decimal.

Ex$_2$.: $\frac{16}{625} \Rightarrow \frac{16}{5^4} \Rightarrow$ um número decimal exato com 4 algarismos na parte decimal.

Ex$_3$.: $\frac{11}{400} \Rightarrow \frac{11}{2^4 \times 5^2} \Rightarrow$ um número decimal exato com 4 algarismos na parte decimal.

2º Teorema

O número de casas decimais gerado através das potências de um número decimal é igual ao produto obtido da multiplicação do expoente pela quantidade de algarismos da parte decimal.

Demonstração:

Sabemos que se $\frac{N}{2^{\alpha} \times 5^{\beta}}$ gera um número decimal exato, com α ou β algarismos (o maior dos dois), então $\left(\frac{N}{2^{\alpha} \times 5^{\beta}}\right)^m = \frac{N^m}{2^{m.\alpha} \times 5^{m.\beta}}$, onde $m.\alpha$ e $m.\beta$ definirão a quantidade de algarismos da parte decimal.

3º **Teorema**

Qualquer fração ordinária irredutível, cujo denominador seja diferente(s) da(s) potência(s) de 2 *e (ou)* 5 *ou do produto dessas diferentes potências, gera sempre números decimais periódicos.*

Demonstração:

Seja uma fração irredutível qualquer $\dfrac{N}{K \times D}$.

Temos que provar:

1º) que essa fração gera, para quociente, um número com infinitos algarismos;

2º) que existe, na parte decimal, periodicidade de algarismos.

1º) Se a fração $\dfrac{N}{K \times D}$ possuir um número finito de algarismos, podemos escrever que:

$$\frac{N}{K \times D} = \frac{A}{10^m} \quad \text{ou} \quad A = \frac{N \times 10^m}{K \times D}$$

Sendo A um número natural pertencente a $\mathbb{N}^*$, $K \times D$ dividiria $N \times 10^m$, mas sendo $K \times D$ primo com N, por hipótese, dividiria 10^m, o que não é concebível, pois a decomposição de 10^m não contém o fator K.

Conclusão: A fração $\dfrac{N}{K \times D}$ gera um número com infinitos algarismos em sua mantissa.

2º) Sabemos que para obtermos um número decimal a partir da fração $\dfrac{N}{K \times D}$, temos que dividir N por $K \times D$, e acrescentarmos um zero à direita do 1º resto, a fim de obtermos cada novo resto. Se o divisor for $K \times D$, então aparecerão, no máximo, $[(K \times D) - 1]$ restos diferentes e, sendo o número de algarismos do quociente infinito, tais restos aparecerão infinitamente. Mas, como os dividendos parciais são obtidos acrescentando-se um zero a cada resto, então, esses dividendos parciais se reproduzirão igualmente ao número de algarismos do quociente.

Conclusão: O número decimal é periódico.

4º **Teorema**

Se uma fração irredutível $\dfrac{N}{D}$ *tiver no denominador potência(s) diferentes de* 2 *ou* 5*, ou ainda fatores diferentes envolvendo tais potências, então essa fração gerará uma dízima periódica simples.*

Demonstração:

Vimos anteriormente que essa fração, com esses denominadores, não gera números decimais exatos ou periódicos.

Se essa fração gerasse uma dízima periódica composta, teríamos no denominador os(s) nove(s) seguidos(s) de um ou mais zeros.

Supondo que mesma tivesse no denominador um ou mais 9, seguido de um ou mais zeros, poderíamos escrever:

$\frac{N}{D} = \frac{K}{90}$

Ao tornarmos a fração $\frac{K}{90}$ irredutível, poderá desaparecer do denominador 90, cuja fatoração é $2 \times 3^2 \times 5$, um dos fatores primos, seja o fator 2 ou 5.

Supondo que, após essa simplificação, o denominador 5 não desapareça, teremos:

$\frac{N}{D} = \frac{c}{2 \times d}$

Sabe-se que, se duas frações irredutíveis são iguais, elas são equivalentes, daí, teríamos $N = c$ e $D = 2 \times d$, o que é um absurdo, pois, o teorema supõe que o denominador seja diferente de 2^m de 5^p ou de fatores envolvendo tais potências. Conseqüentemente, se a fração $\frac{N}{D}$ não gera decimal finita, nem periódica composta, então gerará forçosamente uma dízima periódica simples.

5º Teorema

Se uma fração irredutível tiver para denominador uma multiplicação envolvendo a(s) potência(s) do(s) fator(es) primo(s) 2^m ou 5^p, acompanhadas de um outro qualquer k, então esta gerará uma dízima periódica composta.

Demonstração:

Seja $\frac{N}{D} = \frac{N}{2^m \times k}$, $\frac{N}{5^p \times k}$, ou $\frac{N}{2^m \times 5^p \times k}$

Como já foi visto, a fração $\frac{N}{D}$ não pode gerar número decimal exato, nem dízima periódica simples. Sabemos também que o denominador de uma dízima periódica simples é sempre constituído de um ou mais 9, portanto, se a fração $\frac{N}{D}$ gerasse uma dízima periódica simples, poder-se-ia escrever:

$\frac{N}{D} = \frac{a}{b}$, onde o denominador teria pelo menos um nove.

Tornando a fração $\frac{a}{b}$ irredutível, teríamos $\frac{N}{D} = \frac{c}{d}$.

Como duas frações equivalentes geram o mesmo valor, teríamos $N = c$ e $D = d$, o que é um absurdo, pois a hipótese inicial era que o denominador D continha um dos fatores 2; 5, ou ambos, e como vimos, não possui nenhum desses fatores. Conseqüentemente, se a fração $\frac{N}{D}$ não gerar um número decimal exato nem periódica simples, então gerará, necessariamente, uma dízima periódica composta.

8.14 Estimativa da Quantidade de Algarismos do Período de uma Dízima

8.14.1 Teorema

O número de algarismos do período[3] *de uma dízima, obtidos a partir de uma fração irredutível* N/D*, é igual ao número de primos entre si com* D *menores que* D *ou uma parte alíquota deste número.*

Ex.: Estimar o número de algarismos gerado pelas frações $\frac{4}{9}, \frac{2}{11}, \frac{20}{42}$.

a) $\frac{4}{9} = \frac{4}{3^2} \to \varphi(9) = 3^{2-1} \times (3-1) = 6$

Conclusão: O período poderá ter 1 algarismo, 2, 3 ou 6 algarismos.

b) $\frac{2}{11} \to \varphi(11) = 11 - 1 = 10$

Conclusão: O período poderá ter 1 algarismo, 2, 5 ou 10 algarismos.

c) $\frac{20}{42} = \frac{10}{21} = \frac{10}{3 \times 7} \to \varphi(21) = 3^{1-1} \times 7^{1-1} \times (3-1) \times (7-1) = 12$

Conclusão: O período poderá ter 1 algarismo, 2, 3, 4, 6 ou 12 algarismos.

8.15 Número Exato de Algarismos do Período de uma Dízima

8.15.1 Teorema 1

Se uma fração irredutível $\frac{n}{d}$ *gerar uma dízima periódica simples, a quan-*

[3] Deixamos essa demonstração para os queridos alunos, que terão de conhecer o "teorema generalizado" de Fermat, para concluir a mesma.

tidade de algarismos do período (p) *é igual ao expoente da menor potência de* 10 *que dividida pelo denominador* (d)*, gere resto* 1.

Demonstração:

$10^p \underline{|\, d}$, então $10^p = d \times q + 1$ .... (I)
$\;1 \quad q$

De (I) podemos escrever que: $10^p - 1 = d \times q$

A fração $\dfrac{n}{d}$ é equivalente a $\dfrac{n \times q}{d \times q}$.

Substituindo $n \times q$ pelo produto P e $d \times q$ por $10^p - 1$, teremos:

$$\frac{n}{d} = \frac{P}{10^p - 1}.$$

Como o denominador tem p nove(s), o período terá, conseqüentemente, p algarismos, c.q.d.

8.15.2 Teorema 2

Se uma fração irredutível $\dfrac{n}{d}$ *gerar uma dízima periódica composta, a quantidade de algarismos do período é igual ao expoente da menor potência de* 10*, que dividida pelo denominador* d' *(obtido após a exclusão do mesmo, do(s) fator(es)* 2^α *e/ou* 5^β *ou* $2^\alpha \times 5^\beta$ *) gere resto 1.*

Demonstração:

Seja d' o valor do denominador, quando elidirmos do mesmo o(s) fator(es) 2^α e/ou 5^β ou $2^\alpha \times 5^\beta$.

Se $10^p \underline{|\, d'}$, então $10^p = d' \times q + 1$ .... (I)
$\;1 \quad q$

De (I) podemos escrever que: $10^p - 1 = d' \times q$ .... (II)

Multiplicando-se os dois membros de (II) por 10^γ, onde γ é a quantidade de algarismos do anteperíodo, teremos:

$$10^\gamma \times (10^p - 1) = 10^\gamma \times (d' \times q)$$

Observe que o 2º membro é divisível por d, já que o mesmo contém um ou mais fatores diferentes de 2^α, 5^β e/ou $2^\gamma \times 5^\gamma$.

Fazendo $\dfrac{10^\gamma \times d' \times q}{d} = Q$, podemos escrever que:

$$\frac{n}{d} = \frac{n \times Q}{d \times Q} = \frac{n \times Q}{10^{\gamma} \times d' \times q}$$

$$\frac{n}{d} = \frac{n \times Q}{10^{\gamma}(10^{p} - 1)}$$

Vemos, assim, que $\frac{n}{d}$ é equivalente à fração geratriz da dízima periódica composta considerada.

O denominador da mesma é constituído de p noves, seguido do número de zeros, que é igual ao número de algarismos do *anteperíodo*. Portanto, o período tem p algarismos.

Ex.: A fração $\frac{1}{31}$ gera uma dízima periódica simples. Calcular:

a) a quantidade de algarismos do período;

b) o último algarismo do mesmo.

Resolução:

a) 1º) $\varphi(31) = 30$

2º) $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

3º) $10^1 \equiv 10$ (mod. 31)

$10^2 \equiv 7$ (mod. 31)

$10^3 \equiv 70$ (mod. 31) $\equiv 8$ (mod. 31)

$10^5 \equiv 56$ (mod. 31) $\equiv 25$ (mod. 31) $\equiv -6$ (mod. 31)

$10^6 \equiv 64$ (mod. 31) $\equiv 2$ (mod. 31)

$10^{10} \equiv 36$ (mod. 31) $\equiv 5$ (mod. 31)

$10^{15} \equiv -30$ (mod. 31) $\equiv 1$ (mod. 31)

Conclusão: O período tem 15 algarismos.

b) $\begin{array}{l|l} 10^{14} & 31 \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow 10^{14} = 31 \times q + r \Leftrightarrow 10^{14} \times \frac{1}{31} = q + \frac{r}{31}$

$10^2 \equiv 7(\text{mod}.31)$

$10^{12} \equiv 4(\text{mod}.31)$

$10^{14} \equiv 28(\text{mod}.31)$

$\begin{array}{l|l} 28 & 31 \\ \hline & 0{,}9 \end{array} \rightarrow$ último algarismo do período

Verificação:

$$\frac{1}{31} = 0,\overline{032258064516129}$$

8.16 Operações com Números Decimais

1ª) Adição

Regra:

Escrevem-se as parcelas uma debaixo da outra, tendo o cuidado de deixar as vírgulas em correspondência na mesma coluna; somam-se os números normalmente e, no total, coloca-se a vírgula em correspondência com as das parcelas.

Ex.: $2,47 \times 3,8 + 5,734$

Obs.: Quando as parcelas forem apenas dízimas periódicas, devemos:

a) somar normalmente, se o período da soma for maior ou igual a zero e menor ou igual a 10;

b) acrescentar 1 na soma, se a soma das parcelas for maior que 10 e menor ou igual a 20.

c) acrescentar 2 na soma, se a soma das parcelas for maior que 20 e menor ou igual a 30 e, assim, sucessivamente...

Exs.: a) $0,222\ldots + 3,666\ldots + 4,555\ldots$

$$\begin{array}{r} 0,222\ldots \\ 3,666\ldots \\ 4,555\ldots \\ \hline 8,444\ldots \end{array}$$

b) $7,888\ldots + 6,777\ldots + 5,444\ldots + 2,333\ldots$

$$\begin{array}{r} 7,888\ldots \\ 6,777\ldots \\ 5,444\ldots \\ 2,333\ldots \\ \hline 22,444\ldots \end{array}$$

2ª) Subtração

Regra:

Escrevem-se de cima para baixo, o minuendo e o subtraendo, de modo que haja correspondência das vírgulas numa mesma coluna; subtraem-se esses

termos normalmente e, na diferença, coloca-se a vírgula em correspondência, também, com as dos dois termos. Se a quantidade de algarismos da parte decimal do minuendo for menor que as do subtraendo, completa-se o minuendo com um ou mais zeros, até igualarmos às do subtraendo.

Ex₁.: $12,375 - 5,864$

$$\begin{array}{l} 12,375 \\ \underline{5,864} \\ 6,511 \end{array}$$

Ex₂.: $3,5 - 2,381$

$$\begin{array}{l} 3,500 \\ \underline{2,381} \\ 1,119 \end{array}$$

Obs.: Quando o valor periódico do minuendo for menor que o do subtraendo, deveremos raciocinar como se já tivéssemos tomado "emprestado" 1 para o algarismo da direita.

Ex.: $$\begin{array}{l} 5,233333333\ldots \\ \underline{2,745454545\ldots} \\ 2,487878787\ldots \end{array}$$

3ª) Multiplicação

Seja multiplicar $4,52$ por $3,157$.

Transformemos, inicialmente, os dois fatores em frações decimais, ou seja:

$4,52 = \dfrac{452}{100}$ e $3,157 = \dfrac{3157}{1000}$

Daí $\ldots 4,52 \times 3,157 = \dfrac{452}{100} \times \dfrac{3157}{1000} = \dfrac{1426964}{100000} = 14,26964$

Regra prática

Multiplicam-se os números decimais como se a vírgula inexistisse. Em seguida, separam-se no produto, da direita para a esquerda, tantas casas decimais significativas quantas forem as do multiplicando, somadas às do multiplicador.

Ex.: $4,52 \times 3,157$

```
   3,157 ..........   3 casas decimais
   4,52  .......... + 2 casas decimais
  ------             ----------------
   6314               5 casas decimais
  15785
 12628
 --------
 14,26946
```

Obs.: Se os números forem decimais periódicos, devemos efetuar essa multiplicação na forma ordinária.

Ex.: $2,424242\ldots \times 1,4666\ldots = \dfrac{80}{33} \times \dfrac{22}{15} = \dfrac{32}{9} = 3,555\ldots$

4ª) Divisão

Seja dividir o número $157,92$ por 42.

Transformando o dividendo em uma fração decimal e dividindo o numerador pelo denominador, teremos:

$$\frac{157,92}{42} = \frac{\frac{15792}{100}}{42} = \frac{\frac{15792}{42}}{100} = \frac{376}{100} = 3,76$$

Regra prática

Dividem-se os números dados como se a vírgula inexistisse. Depois, desloca-se a vírgula da direita para a esquerda, no quociente, tantas casas quantas forem as das ordens decimais do dividendo.

Ex.: $157,92$ dividido por 42.

```
157,92 |42       <=>   15 792 |42       =>   15,792 |42
                        3 19   376                   3,76
                         252
                           0
```

Obs.: Quando o divisor for um número decimal, multiplicaremos o dividendo e o divisor pela potência de 10 que seja suficiente para tornar o divisor um número inteiro.

Ex.: $1,5792 \div 0,42 \Leftrightarrow 1,5792 \times 10^2 \div 0,42 \times 10^2$ ou $157,92 \div 142$, o que recai no exemplo anterior.

5ª) Potenciação

1º caso: O número é decimal exato

Regra prática:

Eleva-se o número como se fosse um número natural e, o número de algarismos decimais da potência é igual ao produto gerado da quantidade de casas decimais da base pelo expoente.

Ex.: $(0,02)^3$

1º modo: $(0,02)^3 = 0,02 \times 0,02 \times 0,02 = 0,000008$

2º modo:

Vê-se que existem 2 algarismos na parte decimal e o expoente é 3. Daí, $2 \times 3 = 6$, ou seja, existem 6 algarismos na parte decimal. Como 2^3 são 8, concluiremos que: $(0,02)^3 = 0,000.008$

2º caso: O número decimal é periódico

Regra prática:

Passa-se o número decimal para a fração que lhe é geratriz; eleva-se ao expoente desejado e, em seguida, transforma-se a fração obtida em uma dízima periódica.

Ex.: $(0,666\ldots)^2 = \left(\dfrac{6}{9}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9} = 0,444\ldots$

8.17 Mudanças de Base Envolvendo Números β-nários e β-cimais

1º caso: De uma base não decimal para a base decimal

Seja $N = \underbrace{ab\ldots ijk}_{\alpha \text{ algs}},\underbrace{lm\ldots xyz}_{\gamma \text{ algs}}{}_{(\beta)}$ um número decimal e que se queira passar para a base 10.

$$N = a \times \beta^{\alpha-1} + b \times \beta^{\alpha-2} + \cdots + i \times \beta^2 + j \times \beta^1 + k + l \times \beta^{-1}$$
$$+ m \times \beta^{-2} + \cdots + y \times \beta^{\gamma-1} + z \times \beta^{-\gamma}$$

Ex.: Seja passar $0,231_{(5)}$ para a base 10

1º modo: Indireto

$$0,231_{(5)} = \frac{231_{(5)}}{1\,000_{(5)}} = \frac{66}{125} = 0,528$$

2º modo: Através da forma polinômica.

$$0,231_{(5)} = 0 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} + 3 \times 5^{-2} + 1 \times 5^{-3}$$

$$0,231_{(5)} = 0 \times 1 + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{25} + 1 \times \frac{1}{125}$$

$$0,231_{(5)} = 0 + 0,4 + 0,12 + 0,0008$$

$$0,231_{(5)} = 0,528$$

2º caso: Da base decimal para outra base

Ex.: Transformar o número $0,528$ para a base 5.

1º modo: Indireto

a) passa-se $0,528$ para a fração decimal.

$$0,528 = \frac{528}{1000}$$

b) passam-se os dois termos para a base 5.

$$\frac{528}{1000} = \frac{4103_{(5)}}{13000_{(5)}}$$

c) arma-se o algoritmo da divisão

$4103'0_{(5)}$	$13000_{(5)}$	$13000_{(5)} \times 1 = 13000_{(5)}$
$310000_{(5)}$	$0,231_{(5)}$	$13000_{(5)} \times 2 = 31000_{(5)}$
$100300_{(5)}$		$13000_{(5)} \times 3 = 44000_{(5)}$
$44000_{(5)}$		$13000_{(5)} \times 4 = 112000_{(5)}$
$0100300_{(5)}$		
$100300_{(5)}$		
000000		

Portanto, $0,528 = 231_{(5)}$

2º modo: direto

Suponha $0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_n}_{\text{"d" dígitos}}$ um número decimal, onde $d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots d_n$ sejam dígitos.

Pondo-o em sua forma polinômica, teremos:

$$0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_n}_{\text{d digitos}} = d_1 \times 10^{-1} + d_2 \times 10^{-2} + d_3 \times 10^{-3} + d_4 \times 10^{-4} + \cdots + d_n \times 10^{-d}$$

Para efeito de demonstração, tomemos 4 dígitos da mantissa, ou seja, $0, d_1 d_2 d_3 d_4$.

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 = d_1 \times 10^{-1} + d_2 \times 10^{-2} + d_3 \times 10^{-3} + d_4 \times 10^{-4}$$

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 = d_1 \times 10^{-1} + d_2 \times 10^{-2} + 10^{-3} \times (d_3 + d_4 \times 10^{-1})$$

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 = d_1 \times 10^{-1} + 10^{-2} \times \left[d_2 + 10^{-1} \times (d_3 + d_4 \times 10^{-1})\right]$$

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 = 10^{-1} \times \left\{d_1 + 10^{-1} \times \left[d_2 + 10^{-1} \times (d_3 + d_4 \times 10^{-1})\right]\right\}$$

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_{n-1} d_n = 10^{-1} \times \left\{d_1 + 10^{-1} \times \left[d_2 + 10^{-1} \times (d_3 + d_4 \times 10^{-1}) + \cdots + 10^{-1} \left[d_{n-1} + d_n \times 10^{-1}\right] \right\}\right.$$

$$0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_n}_{\text{“d" dígitos}} =$$

$$= \frac{1}{10} \times \left\{d_1 + \frac{1}{10} \times \left[d_2 + \frac{1}{10} \times \left(d_3 + \frac{d_4}{10}\right)\right] + \cdots + \frac{1}{10} \times \left[d_{n-1} + \frac{d_n}{10}\right]\right\}$$

$$0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_n}_{\text{“d" dígitos}} = \frac{1}{10} \times \left(d_1 + \cfrac{d_2 + \cfrac{d_3 + \cfrac{d_4 + \cdots + \cfrac{d_{n-1} + \cfrac{d_n}{10}}{10}}{10}}{10}}{10} \right)$$

$$0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots d_n}_{\text{“d" dígitos}} = \cfrac{d_1 + \cfrac{d_2 + \cfrac{d_3 + \cfrac{d_4 + \cdots + \cfrac{d_{n-1} + \cfrac{d_n}{10}}{10}}{10}}{10}}{10}}{10}$$

Observe que:

1º) $\dfrac{d_1 + \dfrac{d_2 + \dfrac{d_3 + \dfrac{d_4}{10}}{10}}{10}}{10} \times 10 = d_1 + \dfrac{d_2 + \dfrac{d_3 + \dfrac{d_4}{10}}{10}}{10}$, onde d_1 é o 1º algarismo da mantisssa;

2º) $\dfrac{d_2 + \dfrac{d_3 + \dfrac{d_4}{10}}{10}}{10} \times 10 = d_2 + \dfrac{d_3 + \dfrac{d_4}{10}}{10}$, onde d_2 é o 2º algarismo da mantisssa;

3º) $\dfrac{d_3 + \dfrac{d_4}{10}}{10} \times 10 = d_3 + \dfrac{d_4}{10}$, onde d_3 é o 3º algarismo da mantisssa;

4º) $\dfrac{d_4}{10} \times 10 = d_4$, que é o 4º algarismo da mantissa.

De modo análogo ao que foi desenvolvido anteriormente, podemos escrever:

$$0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \dots d_n}_{d \text{ digitos}} = \beta^{-1} \times \left\{ a_1 + \beta^{-1} \times \left[a_2 + \beta^{-1} \times (a_3 + \cdots + \beta^{-1} \times a_n) \right] \right\}$$

ou

$$0,\underbrace{d_1 d_2 d_3 d_4 \dots d_n}_{\text{“d" dígitos}} = \cfrac{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3 + \cfrac{a_4 + \cdots + \cfrac{a_{n-1} + \cfrac{a_n}{\beta}}{\beta}}{\beta}}{\beta}}{\beta}}{\beta} \qquad \dots \text{(I)}$$

Multiplicando-se (I) por β, obteremos: a_1

Analogamente, multiplicando-se

$$\cfrac{a_2 + \cfrac{a_3 + \cfrac{a_4 + \cdots + \cfrac{a_{n-1} + \cfrac{a_n}{\beta}}{\beta}}{\beta}}{\beta}}{\beta}$$ por β, obteremos a_2;

Multiplicando-se

$$\cfrac{a_3 + \cfrac{a_4 + \cdot^{\cdot^{\cdot}} + \cfrac{a_{n-1} + \cfrac{a_n}{\beta}}{\beta}}{\beta}}{\beta}$$ por β, obteremos a_3;

$\vdots$

$\vdots \qquad \vdots$

E, finalmente, multiplicando-se $\frac{a_n}{\beta}$ por β, obteremos a_n:

Ex.: Seja transformar $0,552$ para a base 5.

1º modo:

$$0,552 = \frac{69}{125} = \cfrac{\frac{69}{25}}{5} = \cfrac{2 + \cfrac{\frac{19}{5}}{5}}{5} = \cfrac{2 + \cfrac{3 + \frac{4}{5}}{5}}{5}$$

Portanto, $0,552 = 0,234_5$

2º modo:

1º) $0,552 \times 5 = \mathbf{2},76$

2º) $0,76 \times 5 = \mathbf{3},80$

3º) $0,8 \times 5 = \mathbf{4},00$

Onde os três primeiros dígitos das características dos produtos anteriores, ou seja, 2, 3 e 4, são também os três primeiros dígitos da parte quinária desejada. Daí, $0,552 = 0,\mathbf{234}_5$.

8.18 Exercícios Resolvidos

1) Calcular o valor da potência gerada por: $8^{\frac{1}{3}}$

$$8 = 2^3 \to 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$$

2) Calcular o valor da seguinte expressão: $\dfrac{0,5 - 0,333\ldots \times 0,25}{\frac{2}{3} \times 0,75 \times 0,1666\ldots}$

$$\frac{0,5 - 0,333\ldots \times 0,25}{\frac{2}{3} \times 0,75 \times 0,1666\ldots} \begin{cases} 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ 0,333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \\ 0,1666\ldots = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{12}}{\frac{6}{72}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}} = 5$$

3) Calcular o valor da expressão:

$$\left[\frac{2}{5} + (2 + 0,333\ldots) \times \frac{3}{4} + 0,4 \times \frac{1}{0,8}\right] \times \frac{1}{2} - 0,3$$

$$= \begin{cases} (2 + 0,333\ldots) \times \frac{3}{4} = \left(2 + \frac{3}{9}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{21}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ 0,4 \times \frac{1}{0,8} = \frac{0,4}{0,8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \left[\frac{2}{5} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right] \times \frac{1}{2} - \frac{3}{10}; \quad \left\{\frac{2}{5} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{8}{20} + \frac{35}{20} + \frac{10}{20} = \frac{53}{20}\right\}$$

$$= \frac{53}{20} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{53}{40} - \frac{12}{40}$$

$$= \frac{41}{40} \text{ ou } 1\,\frac{1}{40}$$

4) Determinar que espécie de dízima gera cada uma das frações: $\frac{3}{200}, \frac{2}{48}, \frac{8}{126}$.

Resolução:

1º) $\frac{3}{200} = \frac{3}{2^3 \times 5^2}$

De acordo com a teoria, o quociente gerado será um número decimal exato com 3 algarismos na parte decimal.

2º) $\frac{2}{48} = \frac{1}{24} = \frac{1}{2^3 \times 3}$

Vê-se que se trata de uma dízima periódica composta com 3 algarismos no anteperíodo.

3º) $\frac{8}{126} = \frac{4}{3^2 \times 7}$

Vemos que se trata de uma "dízima periódica simples".

5) Determinar os valores de x e y de modo que a fração $\frac{7}{2^x \times 3^y}$ gere:

a) um número decimal exato;
b) uma dízima periódica simples;
c) uma dízima periódica composta;
d) um número natural;

Resolução:

De acordo com a teoria, podemos afirmar que:

a) se $x > 0$ e $y = 0$, então N será um número decimal exato;
b) se $x = 0$ e $y > 0$, então N será uma dízima periódica simples;
c) se $x = y = 0$, então N será uma dízima periódica composta;
d) se $x = y = 0$, será um número natural.

6) Transformar o numeral $2,12_{(3)}$ em um número decimal.

Resolução:

$2,12_{(3)} = 2 \times 3^0 + 1 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2}$

$2,12_{(3)} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$

$2,12_{(3)} = 2 + 0,333\ldots + 0,222\ldots$

$2,12_{(3)} = 2,555\ldots$

7) Transformar $2,555\ldots$ para a base 3.

Resolução:

1º) $2,555\ldots = \frac{25-2}{9} = \frac{23}{9}$.

Mas,

23	|3		e	9	|3	
2	7	|3		0	3	|3
	1	2			0	1

2º) $\frac{23}{9} = \frac{212_{(3)}}{100_{(3)}} = 2,12_{(3)}$

Portanto $2,555\ldots = 2,12_{(3)}$

8.19 Exercícios Propostos

1) Desloque a vírgula convenientemente:

a) $0,457 \times 10$

b) $4,357 \times 100$

c) $0,0048 \times 10^3$

d) $247 : 10$

e) $237 : 100$

f) $4,35 \times 10^{-2}$

g) $0,457 \times 10^3 \times 10^2$

h) $4,57 \times 10^4 \times 10^{-7}$

i) $\frac{0,37}{10^{-4}}$

j) $\frac{0,003}{10^3}$

k) $4,38 \times 10^{-5}$

l) $0,00035 \times 10^4$

m) $0,3 \times 10^{-4} \times 10^6$

n) $\frac{2,37}{10^{-5} \times 10^7}$

o) $\frac{4,37 \times 10^5}{(10^2)^3 \times 10^3}$

2) Calcule o valor das potências geradas por:

a) $625^{0,75}$
b) $512^{0,444\ldots}$
c) $27^{\frac{2}{3}}$
d) $64^{0,1666\ldots}$
e) $\left(3^{27}\right)^{0,333\ldots}$

3) Que espécie de dízima gera cada uma das frações?

a) $\dfrac{25}{147}$ b) $\dfrac{39}{120}$ c) $\dfrac{129}{42}$ d) $\dfrac{396}{4.572}$

4) Calcule as seguintes expressões:

a) $\left[2^{-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1270^0 + 4^{\frac{1}{2}}\right]$

b) $\dfrac{0,1333\ldots + 0,2}{\dfrac{1}{1,2}}$

c) $\left[8^{\frac{1}{3}} + \left(\dfrac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0,017^0\right] \times \dfrac{1}{0,888\ldots}$

d) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + \dfrac{5}{2} \times 7^{-1} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $\dfrac{\dfrac{2}{3}+1}{\dfrac{4}{3}-1} - \left(\dfrac{\dfrac{2}{3}-2}{4-\dfrac{1}{2}}\right)^0 + \dfrac{1}{2^{-1}} + 0,41(35)$

f) $\dfrac{0,333\ldots + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{5}{4}\right)^0}{\dfrac{1}{2} + 4^{\frac{3}{2}} + 2^{-1}}$

g) $\dfrac{8^{\frac{1}{3}} + 0,0333\ldots - 30^{-1}}{3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1,5}{3}} - \dfrac{2}{30}}$

h) $\dfrac{3^{-1} \times \dfrac{6}{5} + 2^{-2}}{8^0 \times 0,3444\ldots - \dfrac{2}{30}}$

i) $1 - \dfrac{\left(1+3^{\frac{1}{2}}\right)^{0} + 0,333\ldots}{(0,5)^{-2} + 216^{\frac{1}{3}}}$

j) $\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{2} + 1,0333\ldots\right)^{-1}}{0,5 \times \dfrac{1}{4}}$

k) $\dfrac{0,5 \times \dfrac{1}{2} + 2^{-2}}{2 + 0,333\ldots - \dfrac{2}{3}}$

l) $\dfrac{(729)^{-\frac{1}{3}} \times \dfrac{24,08}{0,05}}{2,43232...}$

m) $\dfrac{\dfrac{7,14}{1,02} \times (11,56)^{-\frac{1}{2}}}{(1 - 0,0666\ldots) \div \dfrac{2}{5}}$

n) $\dfrac{(0,333\ldots)^{3} \times 1\,\dfrac{4}{5} + 2,2}{1,1333\ldots}$

o) $\dfrac{0,333\ldots + 0,0666\ldots}{3 - 1\,\dfrac{1}{4}}$

p) $\left(\dfrac{2,1333\ldots}{5^{-3} + \dfrac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

q) $6 \times \left(3,375^{\frac{1}{3}} + (1,777\ldots)^{\frac{1}{2}} + 32^{-\frac{1}{5}}\right)$

r) $\dfrac{0,777\ldots \times 1,2}{1,555\ldots \times 1,44} + \dfrac{3,4 \div 5}{\dfrac{2}{3} \div \dfrac{9}{18}}$

s) $\dfrac{16^{0,75} + (0,00243)^{\frac{1}{5}}}{\dfrac{2}{3} + 4,333\ldots}$

t) $\left[\left(\dfrac{1}{5^{-\frac{2}{3}}}\right)^{3} - \left(\dfrac{2^{12}}{2^{10}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\dfrac{(0,333\ldots)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\left(5^{\frac{5}{3}}\right)^{2}}{5^{\frac{1}{3}}}\right]$

u) $\left[\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-3} \times 0,666\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0} - \frac{1}{1,333\ldots}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$

v) $\left(\frac{1+2+3+\cdots+50}{5+10+15+\cdots+250}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\left(2(1,25)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$

w) $\frac{(0,5)^{-2} \times 2^{0,333\ldots} \times 16^{\frac{1}{3}}}{(0,125)^{-3}}$

x) $\frac{8^{0,666\ldots} + 4^{\frac{3}{2}} - 2^{\sqrt{9}} + 9^{0,5}}{\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

y) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2^{9^{0,5}} + \left[\frac{12^2 - 61 + 17 \div \frac{1}{3}}{15}\right]^{[(3^2+1)\div 0,1]-1^{73}}$

z) $\left(\left(-\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \times (0,333\ldots + 1) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{25}}{2}+3}$

5) A fração $\frac{3}{2^m \times 5^n}$, passando para a decimal, gera uma decimal exata ou periódica?

6) Sobre o número $\frac{1.937}{8.192}$ podemos afirmar que é: podemos afirmar que é:

a) uma dízima periódica simples;
b) uma dízima periódica composta;
c) um número decimal exato com 12 casas decimais;
d) um número decimal exato com 13 casas decimais;
e) um número decimal exato com 14 casas decimais.

7) Determine a(s) fração(ões) próprias irredutíveis, cujo produto dos termos seja 315, de modo que a mesma dê origem a:

a) um número decimal exato
b) uma dízima periódica simples;
c) uma dízima periódica composta.

8) Um aluno, efetuando a divisão de 13 por 41, foi determinando o quociente até que a soma de todos os algarismos por ele escritos fosse imediatamente maior ou igual a 530. Quantas casas decimais ele escreveu?

9) A fração $\dfrac{1}{2^x \times 3 \times 5^2}$ tem por representação decimal uma dízima com três algarismos no anteperíodo. Calcule o maior valor que se pode atribuir a x.

10) Quais os valores que devemos atribuir a x, y e z, de modo que a fração $\dfrac{1}{2^x \times 3^y \times 5^z}$ seja um decimal exato com três casas decimais?

11) Dados os números:

$A = 0{,}273849\overline{51}$;
$B = 0{,}\overline{27384951}$;
$C = 0{,}2738\overline{4951}$;
$D = 0{,}27\overline{384951}$;
$E = 0{,}27384\overline{951}$;
$F = 0{,}2738495127989712888\ldots$

Podemos afirmar que:

a) $A > F > E > C > D > B$
b) $A > F > B > D > C > E$
c) $F > C > D > B > A > E$
d) $B > C > A > F > E > D$
e) $E > A > C > D > F > B$

12) Determine x e $y \in \mathbb{N}$, de modo que:

a) $\dfrac{13}{2^x \times 3^y}$, seja:

a.1) um número decimal exato;
a.2) uma dízima periódica simples;
a.3) uma dízima periódica composta.

b) $\dfrac{11}{5^x \times 7^y}$, seja:

b.1) um número decimal exato com 3 algarismos na parte decimal;
b.2) uma dízima periódica simples;
b.3) uma dízima periódica composta.

c) $\dfrac{4}{2^x \times 7^y}$, seja

c.1) um número decimal exato;
c.2) uma dízima periódica simples;

c.3) uma dízima periódica composta.

d) $\dfrac{6}{2^x \times 3^y}$, seja:

d.1) um número decimal exato;
d.2) uma dízima periódica simples;
d.3) uma dízima periódica composta.

e) $\dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 48 \times 49 \times 50}{2^x \times 3^y}$, seja:

e.1) um número decimal exato;
e.2) uma dízima periódica simples;
e.3) uma dízima periódica composta.

f) $\dfrac{3}{2^x \times 3^y \times 5^z}$, seja:

f.1) um número decimal exato;
f.2) uma dízima periódica simples;
f.3) uma dízima periódica composta.

13) A representação decimal do número $(2^a \times 3^b \times 5^c)^{-1}$, sendo a, b e c números naturais, é uma dízima periódica composta. Sendo assim, pode-se afirmar que, necessariamente:

a) $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$;
b) $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$;
c) $a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$;
d) $a \neq 0$ ou $c \neq 0$ e $b \neq 0$;
e) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

14) Seja M um conjunto cujos elementos são números naturais compostos por três algarismos distintos e primos absolutos. Sabe-se que o inverso de cada um deles é uma dízima periódica simples e que, invertendo-se a posição dos algarismos das centenas com o das unidades, em todos eles, os respectivos inversos são dízimas periódicas compostas Quantos subconjuntos M possui?

15) Um número natural N é formado por dois algarismos. Colocando-se um zero entre eles, N aumenta em 270 unidades. Sabendo-se que o inverso de N é uma dízima periódica composta com dois algarismos no anteperíodo, determine N.

16) Um número natural N é constituído por dois algarismos. Inserindo-lhes o zero observa-se um aumento de 630 unidades, e o inverso do mesmo, gera uma dízima periódica composta com dois algarismos no anteperíodo. Determine os valores de N para os quais essa condição seja satisfeita.

17) Transforme $134,32_{(5)}$ para o sistema de numeração decimal.

18) Passe $44,68$ para a base cinco.

19) Transforme o numeral $2,45_{(6)}$ para a base 10.

20) Passe $2,80555\ldots$ para a base 6.

21) O número 23 está escrito em dois sistemas de numeração cujas bases diferem em duas unidades. Determine-as, sabendo-se que a soma desses dois números é 34.

22) Um número ternário é como um número decimal, exceto os dígitos que representam frações com potências de 3, ao invés de 10.

Ex.: $16/27 = 1/3 + 2/9 + 1/27 = 0,121_3$

Como se expressa $\dfrac{77}{81}$ na base três?

23) Determine, na base 10, a geratriz do número $0,\overline{01}_{(2)}$.

24) O número x escrito na base 7 é igual a $0,333\ldots$. Qual é o valor de x na base 5?

25) Convertendo o numeral $123,12_4$ para a base 5, obtemos:

a) $102,(14)$ b) $102,(41)$ c) $102,1(2)$
d) $102,(12)$ e) $102,(21)$

26) A diferença $1_9 - 0,66_9$ é que número na base 3?

27) Certa fração r é representada na base b por $0,111\ldots$, enquanto que na base $2b$, a sua forma mais simples é $0,2b$. Qual é o valor de r?

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{1}{10}$

28) Qual é a representação binária da fração $\dfrac{1}{5}$?

a) $0,\overline{1001}$ b) $0,\overline{0011}$ c) $0,\overline{0101}$ d) $0,\overline{00111}$ e) $0,\overline{01101}$

29) Escreva $0,1_7 - 0,1_8 + 0,1_9 - 0,1_{10}$, na base 6.

30) Qual é, na base 10, a representação na base 6 do número $0,111\ldots$?

a) $0,2$ b) $0,1\overline{6}$ c) $0,\overline{3}$ d) $0,3$ e) $0,33$

31) Em que base de sistema de numeração, o número $\dfrac{1}{5}$ é igual a $0,333\ldots$?

a) 7 b) 9 c) 11 d) 14 e) 16

32) Determine o inteiro n, sabendo-se que a expansão $0,1n1n1n\ldots$ é igual a $\dfrac{n}{33}$.

33) Na base b, a expansão da fração F_1 é 0,373737..., e a de F_2 é $0,737373\ldots$. Na base a, a expansão da fração F_1 é $0,252525\ldots$, e a de F_2 é $0,525252\ldots$. A soma de a e b quando escrito na base 10, é:

a) 24 b) 22 c) 21 d) 20 e) 19

34) O número $0,7(3)$ é igual a $0,\overline{23}$ (base β). Determine β.

Respostas

1)

a) $4,57$
b) $435,7$
c) $0,48$
d) $24,7$
e) $2,37$
f) $0,0435$
g) 45.700
h) $0,00457$
i) 3.700
j) $0,000003$
k) $0,0000438$
l) $3,5$
m) 30
n) $0,0237$
o) $0,000437$

2) a) 125
b) 16
c) 9
d) 2
e) 19.683

3)

a) Dízima periódica simples; b) Decimal exato; c) Dízima periódica composta; d) Dízima periódica simples

4)

a) $\frac{7}{4}$
b) $\frac{4}{5}$
c) 9
d) $\frac{82}{63}$
e) $\frac{6.371}{990}$
f) $\frac{2}{9}$
g) $\frac{15}{88}$
h) $\frac{117}{50}$

i) $\frac{13}{15}$
j) $\frac{120}{23}$
k) $\frac{3}{10}$
l) 22
m) $\frac{15}{17}$
n) 2
o) $\frac{20}{7}$
p) $\frac{8}{125}$
q) 20
r) $\frac{311}{100}$
s) $\frac{17}{20}$
t) 139
u) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
v) $\sqrt[3]{5}$
w) $\frac{\sqrt[3]{4}}{64}$
x) 1
y) 12
z) 0

5)

$m \geq 0$ **e/ou** $n \geq 0$
$m = 0$ **e** $n \geq 0$
$m \geq 0$ **e** $n = 0$

6) d

7)

a) não existe
b) $\frac{5}{63}$
c) $\frac{1}{315}$, $\frac{9}{35}$ **e** $\frac{7}{45}$

8) 148
9) 3
10) $y = 0$, $x = 3$ **e/ou** $y = 3$
11) e

12-a)

a.1) $x \geq 0$ **e** $y = 0$

a.2) $x = 0$ **e** $y > 0$

a.3) $x > 0$ **e** $y > 0$

12-b)

b.1) $x = 3$ **e** $y = 0$

b.2) $x = 0$ **e** $y > 0$

b.3) $x > 0$ **e** $y > 0$

12-c)

c.1) $x > 0$ **e** $y = 0$

c.2) $x = 2$ **e** $y > 0$

c.3) $x > 2$ **e** $y > 0$

12-d)

d.1) $x \geq 0$ **e** $y = 1$ **ou** $y = 0$

d.2) $x = 0$ **ou** $x = 1$ **e** $y > 0$

d.3) $x > 1$ **e** $y > 1$

12-e)

e.1) $x \geq 0$ **e** $y = 22$

e.2) $x = 47$ **e** $y > 22$

e.3) $x > 47$ **e** $y > 22$

12-f)

f.1) $x \geq 0$ **,** $y = 1$ **e** $z \geq 0$

f.2) $x = z = 0$ **e** $y > 1$

f.3) $\begin{cases} x > 0 \text{ **ou** } z > 0 \text{ **e** } y > 1 \\ x \geq 0 \text{ **ou** } z > 0 \text{ **e** } y > 1 \end{cases}$

13) **c**

14) 256

15) 36

16) 75 **ou** 76

17) $44,68$

18) $134,32$

19) $2,80555\ldots$

20) $2,45_6$

21) **6 e 8**

22) $2,212_3$

23)

24) $(0,222\ldots)_5$
25) a
26) $0,\overline{259}$
27) c
28) b
29) $0,010\overline{13}_6$
30) a
31) e
32) 5
33) e
34) 4

Capítulo 9

Radiciação

9.1 Radiciação

É a operação que tem por fim, a partir de dois números, obter um terceiro que, repetido como fator tantas vezes quantas forem as unidades de um dos dois primitivos, reproduza o outro.

O terceiro número procurado denomina-se raiz, cuja potência é um dos números dados e o outro é o respectivo *grau*. Assim sendo, podemos também defini-la como sendo "*a operação que tem por fim, dada uma potência e o grau, determinar a raiz*".

Ex.: Sejam 8 e 3 dois números

O numero que repetido *três* vezes irá reproduzir o 8 é o número 2 pois $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, onde o 2 é a raiz.

9.2 Notação

A radiciação é indicada pelo sinal $\sqrt{\ }$ onde, sob o traço horizontal, coloca-se a potência (denominada de radicando) e, na abertura do ângulo o expoente (denominado de índice). Assim sendo, o expoente anterior será representado por $\sqrt[3]{8}$ e indica o número que, elevado a 3, reproduz o 8, ou seja:

$\sqrt[3]{8} = 2$, onde
a) $\sqrt{\ }$ é o sinal da radiciação;

b) $\sqrt[3]{8}$ é o radical;
c) 3 é o índice;
d) 8 é o radicando;
e) 2 é a raiz.

Obs.: Os radicais dos 2º e 3º graus ($\sqrt[2]{N}$ e $\sqrt[3]{N}$) são lidos *raiz quadrada* e *raiz cúbica*, respectivamente sendo dispensado o 2 nos radicais de 2º , ou seja, $\sqrt[2]{N}$ escreve-se $\sqrt{N}$. Genericamente, a raiz n de um número N será um número ρ se, somente se, ρ elevado a n reproduzir o *maior* número contido em N, ou seja:

$\sqrt[n]{N} = \rho$, se, e só se, $\rho^n \leq N$

Quando $\rho^n = N$, a raiz ρ diz-se "exata"e, se $\rho^n < N$, a raiz é dita *inexata*.

9.3 Raiz Quadrada

9.3.1 Raiz Quadrada Exata de um Número Natural N

Como vimos em 2.7, denomina-se raiz quadrada exata de um número natural N, a um número natural ρ, tal que ρ elevado ao quadrado reproduza N, ou seja:

$$\sqrt{N} = \rho \iff \rho^2 = N.$$

Obs: $\iff$ lê-se " se, e somente se".

Lembrete! De acordo com a definição anterior, pode-se concluir que todos os *quadrados perfeitos* possuem raízes quadradas exatas:

Exemplos

a) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$
b) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$

9.4 Raiz Quadrada de um Número Natural N com Aproximação de uma unidade por falta

Extrair a raiz quadrada de um número N *com aproximação de uma unidade por falta significa obter a raiz quadrada do maior quadrado perfeito contido no número* N.

1º caso: O número dado é menor que 100

Exs.:

a) A $\sqrt{19}$ é aproximadamente 4, pois o *maior quadrado perfeito* contido em 19 é o 16, cuja raiz quadrada é 4.

b) A $\sqrt{58}$ é aproximadamente 7, pois o *maior quadrado perfeito* contido em 58 é o 49, cuja raiz quadrada é 7.

2º caso: O número dado é maior que $100(10^2)$ e menor que $10000(10^4)$

Demonstração:

Supondo $N = xyzw$ um número da classe dos milhares, a sua raiz quadrada será da classe das dezenas, portanto, será formada por *dois algarismos* (du), isto é, dezenas (d) e unidades (u). Para chegarmos a essa condição, vejamos os teoremas a seguir e suas respectivas demonstrações.

9.4.1 Teorema

O algarismo das dezenas da raiz quadrada de um número de 4 *algarismos é igual à raiz quadrada das centenas do número dado.*

$$\begin{cases} hip : N = xyzw \\ tese : \sqrt{xy} = d \end{cases}$$

Se du é a raiz quadrada de $xyzw$, poderemos escrever:

$(du)^2 \leq xyzw < (du + 1)^2$ ou

$(10d + u)^2 \leq xyzw < (10d + u + 1)^2$

Dessa dupla desigualdade, podemos escrever:

1º) $(10d + u)^2 \leq xy \times 100 + zw$ ou
$100d^2 \leq xy \times 100$, daí,
$d^2 \leq x$ .... (I)

2º) $xyzw \leq (10d + u + 1)^2$

Como qualquer algarismo é menor que $10 (n \leq 9)$, implica, $n + 1 \leq 10$, daí

$xyzw \leq (10d + 10)^2$
$xy \times 100[10 \times (d + 1)]^2$

$xy \times 100 \leq 100(d+10)^2$

portanto,

$xy < (d+1)^2$ .... (II)

Observando (I) e (II), podemos escrever:
$d^2 < xy < (d+1)^2$
Conclusão

Se $d^2 < xy < (d+1)^2 \Rightarrow d < \sqrt{xy} < d+1 \begin{cases} d \text{ por falta} \\ d+1 \text{ por excesso} \end{cases}$

Obs.: Se a raiz quadrada de N for por falta, poderemos escrever:

$xyzw = (du)^2 + r$ ou
$xyzw = (10d + u)^2 + r$

Desenvolvendo o segundo membro, teremos por fim:

$xyzw = 100d^2 + 2 \times 10d \times u + u^2 + r$ .... (III)

Conclusão:

A partir de um número com 4 algarismos, vimos que podemos facilmente obter o algarismo das dezenas de uma raiz quadrada e, sendo d conhecido, poderemos obter o algarismo das unidades (u), como veremos a seguir.

9.4.2 Teorema

Subtraindo-se de um número o quadrado das unidades contidas nas dezenas da sua raiz quadrada e dividindo as dezenas da diferença pelo dobro do número de dezenas, obtém-se o algarismo das unidades ou um algarismo superior.

Demonstração:

De (III), temos:
$xyzw = 100d^2 + 2 \times 10d \times u + u^2 + r$ ou
$xyzw = 100d^2 + 2 \times d \times 10u + u^2 + r$

Fazendo, $xyzw - 100d^2 = r'$... resto parcial
$r' = 2 \times d \times 10u + u^2 + r$

No 2º membro, $2 \times d \times 10u$ é um número exato de dezenas da raiz, que deve estar contido no número de dezenas de r', logo:

$2 \times d \times 10u \leq d$; d dezenas

$u \leq \dfrac{r' \times d}{2 \times d}$

Daí, um dos valores de $u \leq \dfrac{r'}{2}$ deverá (a partir do maior) ser o provável algarismo das unidades.

Ex.: Seja extrair a raiz quadrada de 1.849.

Sabemos que a raiz desejada é um número com dois algarismos (du), visto que,

$$100 < 1849 < 10.000$$

Para obtermos o algarismo das dezenas, basta determinarmos a raiz quadrada, por falta de 18 *centenas* $[(18^c), (1.849 = 1.800 + 49 = 18^c + 49^u)]$. Como o maior quadrado perfeito contido em 18^c é 16^c, cuja raiz quadrada (4^d), conclui-se que 4^d comporá o algarismo das dezenas da raiz, ou seja,

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18^d\ 49^u} & 4^d \\ \hline 16^d & \\ \hline 2^d\ 49^u & \end{array}$$

O próximo algarismo da raiz, será o algarismo das unidades (u), daí, sendo:

$$1.849 = (4u)^2 = (4^d + u)^2 = (4^d)^2 + 2 \times (4^d) \times (u) + u^2,$$

teremos que igualar $2 \times (4^d) \times (u)$ a 24^d, para encontrarmos u, portanto, se:

$2 \times (4^d) \times (u) = 24^d \Rightarrow u = \dfrac{24^d}{2 \times 4^d} = 3$, cujo denominador é o dobro do algarismo das dezenas.

Para confirmarmos o algarismo 3 na ordem das unidades de raiz, basta colocarmos o mesmo do lado direito do 8 *resultando*, portanto, resultará o 83. Multiplicando 83×3 obtemos 249 e, se esse produto for *menor* ou *igual* que o resto, o algarismo 3 será o algarismo das unidades da raiz. Caso o produto fosse maior, diminui-lo-íamos em uma ou mais unidades, até encontrarmos um produto *menor* ou *igual* ao *resto*.

A descrição da extração anterior leva-nos aos seguintes passos:

$1^{\underline{o}}$) Divide-se o número dado em classe de dois algarismos, da direita para a esquerda, podendo a última ter um algarismo;

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18^{d}\ 49^{u}} & \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2º) Coloca-se abaixo da última classe o maior quadrado perfeito contido na mesma, cuja raiz quadrada fará parte do algarismo das dezenas da raiz a ser determinada;

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18.49} & 4 \\ \cline{2-2} 16 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$\longrightarrow$ (4 é a raiz quadrada do maior quadrado perfeito contido em 18)

3º) Baixa-se ao lado do 1º resto a classe seguinte e também o 1º algarismo da raiz que multiplicamos por 2.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18.49} & 4 \\ \cline{2-2} 16 & 4 \times 2 = 8 \\ \hline 2\ 49 & \end{array}$$

$\longrightarrow$ (8 é o dobro do algarismo das dezenas)

4º) Separa-se por um ponto (.) o último algarismo da direita do resto e divide-se o número que ficou à esquerda pelo dobro da raiz.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18.49} & 4 \\ \cline{2-2} 16 & 4 \times 2 = 8 \\ \hline 2\ 49 & 24 : 8 = 3 \end{array}$$

5º) Coloca-se o quociente encontrado à direita do dobro da raiz, multiplicando o número assim formado por esse quociente.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18.49} & 4 \\ \cline{2-2} 16 & 4 \times 2 = 8 \\ \hline 2\ 49 & 24 : 8 = 3 \\ & 83 \times 3 = 249 \end{array}$$

6º) Se o produto encontrado for menor ou igual ao resto, o quociente encontrado será o outro algarismo da raiz.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{18.49} & 43 \\ \cline{2-2} 16 & 4 \times 2 = 8 \\ \hline 2\ 49 & 24 : 8 = 3 \\ & 83 \times 3 = 249 \end{array}$$

Conclusão: A raiz quadrada de 1.849 é 43.

9.4.3 Teorema

O maior resto que se pode encontrar na extração da raiz quadrada de um número natural N *é igual ao dobro da raiz.*

Demonstração:

Se N for um quadrado perfeito, podemos afirmar que $N-1$ é o número cuja raiz quadrada ρ gera o *maior resto.*

Suponhamos agora $\underset{R}{\sqrt{N-1}} = \rho$, onde ρ seja raiz e R o *maior resto.*

Se $\underset{R}{\sqrt{N-1}} = \rho$ .... (I) $\Rightarrow \sqrt{N} = \rho + 1$ .... (II)

Em (I), $N - 1 = \rho^2 + R$ .... (III)

Em (II), $N = (\rho + 1)^2$ .... (IV)

Substituindo (IV) em (III), teremos: $(\rho+1)^2 - 1 = \rho^2 + R$ ou $\rho^2 + 2\rho + 1 - 1 = \rho^2 + R$

$\mathbf{R} = \mathbf{2} \cdot \rho$ .... c.q.d

9.5 Raiz Quadrada de Frações Ordinárias

1º caso: Os termos são quadrados perfeitos.

Nesse caso, basta extrair a raiz de cada termo.

Ex.: $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}$

2º caso: Apenas o denominador é quadrado perfeito.

Nesse caso, extrai-se a raiz do denominador e, em seguida, a do numerador com aproximação de uma unidade.

Ex.: $\sqrt{\dfrac{31}{81}} = \dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{81}} = \dfrac{\sqrt{25}}{9} = \dfrac{5}{9}$ (A aproximação é de $\dfrac{1}{9}$ da unidade).

3º caso: O denominador não é quadrado perfeito.

Nesse caso, basta transformarmos o denominador num quadrado perfeito e, conseqüentemente, recairemos no caso anterior.

Ex.: $\sqrt{\dfrac{5}{19}} = \sqrt{\dfrac{5 \times 19}{19 \times 19}} = \sqrt{\dfrac{95}{19^2}} = \dfrac{9}{19}$

Obs.: A aproximação é de $\dfrac{1}{19}$ de unidade.

9.6 Raiz Quadrada de Números Decimais

Na extração de tais raízes, transformamos os números decimais em frações decimais.

Exemplos

a) Extrair a raiz quadrada de $0,81$.

$0,81 = \dfrac{81}{100} = \dfrac{81}{10^2}$

Extraindo-se a raiz quadrada, teremos $\sqrt{0,81} = \sqrt{\dfrac{81}{10^2}} = \dfrac{9}{10} = 0,9$.

Vê-se que a aproximação é de $\dfrac{1}{10}$ de unidade.

b) Extrair a raiz quadrada de $63,3116$.

$63,3116 = \dfrac{633.116}{10000} = \dfrac{633.116}{100^2}$

Extraindo-se a raiz quadrada, teremos:

$\sqrt{63,3116} = \sqrt{\dfrac{633.116}{100^2}} = \dfrac{796}{100} = 7,96$

Vê-se que a aproximação é centesimal.

c) Extrair a raiz quadrada de $0,54756$.

$0,54756 = \dfrac{54.756}{100.000} = \dfrac{547.560}{1.000.000} = \dfrac{547.560}{1.000^2}$

Extraindo-se a raiz quadrada de $0,54756$, teremos:

$\sqrt{0,54756} = \sqrt{\dfrac{547.560}{1000^2}} = \dfrac{739}{1.000} = 0,739$

Observando os exemplos anteriores, pode-se deduzir a seguinte regra:

1º - Define-se um número par de algarismos decimais, acrescentando-se *um* zero, caso haja necessidade;

2º - Extrai-se a raiz quadrada, deslocando a vírgula no quociente, convenientemente.

9.7 Raiz Quadrada de um Número N com uma Aproximação $\mathfrak{n}/\mathfrak{d}$ de Unidade

Extrair a raiz quadrada de um número N *com uma aproximação* $\mathfrak{n}/\mathfrak{d}$ *de unidade significa calcular o maior número de vezes que* $\mathfrak{n}/\mathfrak{d}$ *está contido na raiz de* N.

1º caso: A aproximação é de uma fração ordinária, cujo numerador é a unidade

Ex.: Extrair a raiz quadrada de 473, com aproximação 1/3 de unidade.

$$437 = \frac{437 \times 3^2}{3^2} = \frac{3.933}{3^2}, \text{ donde, } \sqrt{437} = \sqrt{\frac{3.933}{3^2}} = \frac{\sqrt{3.933}}{\sqrt{3^2}} = \frac{62}{3} = 20\,\frac{2}{3}$$

2º caso: A aproximação é de uma fração ordinária qualquer

Ex.: Extrair a raiz quadrada de 417, com aproximação 3/5.

Obs.: $\dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{\frac{5}{3}}$, o que recai no caso anterior, então, $417 = \dfrac{417 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \dfrac{3.475}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}$, logo,

$$\sqrt{417} = \sqrt{\frac{3.475}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3.475}}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{58}{\frac{5}{3}} = 58 \times \frac{3}{5} = \frac{174}{5} \text{ ou } 34\,\frac{4}{5}$$

Do que acabamos de expor, podemos afirmar que, para extrairmos a raiz quadrada de um número N com uma aproximação $\mathfrak{n}/\mathfrak{d}$, devemos seguir os seguintes passos:

1º) *multiplica-se o número* N *por* $\mathfrak{d}^2/\mathfrak{n}^2$*, ou seja, pelo quadrado do inverso da fração de aproximação*;

2º) *extrai-se, com aproximação de uma unidade, a raiz quadrada do produto*;
3º) *multiplica-se a raiz encontrada pela fração de aproximação.*

3º caso: A aproximação é de uma fração decimal

Ex$_1$.: Seja extrair a raiz quadrada de 2 com uma aproximação decimal, indicando também o resto.

$2 = \dfrac{2 \times 10 \times 10}{10^2} = \dfrac{200}{10^2}$, donde, $\sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{200}{10^2}} = \dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{10^2}} \; \dfrac{14}{10} = 1,4$

Resto: $2 - 1,4^2 = 2 - 1,96 = 0,04$

Ex$_2$.: Extrair a raiz quadrada de 475, com uma aproximação centesimal, indicando o resto.

$475 = \dfrac{475 \times 100 \times 100}{100^2} = \dfrac{4.750.000}{100^2}$, donde, $\sqrt{475} = \sqrt{\dfrac{4.750.000}{100^2}} = \dfrac{2.179}{100} =$ $21,79$

Resto: $475 - 21,79^2 = 475 - 474,8041 = 0,1959$

Ex$_3$.: Extrair a raiz quadrada de 3, com uma aproximação milesimal, indicando também o resto.

$3 = \dfrac{3 \times 1.000 \times 1.000}{1.000^2} = \dfrac{3.000.000}{1.000^2}$, donde, $\sqrt{3} = \sqrt{\dfrac{3.000.000}{1.000^2}} = \dfrac{1.732}{1.000} =$ $1,732$

Resto: $3 - 1,732^2 = 3 - 2,999824 = 0,00017$

9.8 Exercícios Propostos

1) Calcule $\sqrt{21}$ com erro inferior a $\dfrac{1}{8}$

2) Extraia a raiz quadrada de $2\dfrac{1}{5}$, a menos de $\dfrac{1}{3}$ por falta.

3) Qual é a raiz de $0,453$ a menos de $0,01$?

4) Calcule $\sqrt{5,4}$ com erro inferior a $0,01$.

5) Extraindo-se a raiz quadrada de um número n encontrou-se 12, e o resto é o maior possível. Calcule n.

6) Extraia a raiz quadrada a menos de $0,01$ do menor número natural de dois algarismos, que é divisível por $3, 4$ e 7, simultaneamente.

7) Qual é o maior número natural n, tal que, $4^{19} + 4^{98} + 4^{n}$ seja um quadrado perfeito?

8) Se $a = 2^{3,5}$, então:

a) $6 < a \leq 8,5$
b) $8,5 < a \leq 10$

c) $10 < a \leq 11,5$
d) $11,5 < a \leq 13$
e) $13 < a \leq 14,5$

9) Extraia a raiz quadrada dos números seguintes, dando a resposta sob forma de número decimal:

a) $0,529529529\ldots$
b) $0,69444\ldots$

Respostas

1) $4\frac{1}{2}$ **2)** $1\frac{7}{15}$ **3)** $0,67$ **4)** $2,31$ **5)** 168 **6)** $9,16$

7) 176 **8) c** **9) a)** $0,777$**; b)** $0,555\ldots$

9.9 Raiz Cúbica

9.9.1 Raiz Cúbica Exata de um Número Natural N

Como vimos em 2.7, denomina-se raiz cúbica exata e um número natural N a um número natural ρ, tal que, ρ *elevado ao cubo gere* N*, ou seja*:

$$\sqrt[3]{N} = \rho \iff \rho^3 = N.$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{64} = 4$, pois, $4^3 = 64$
b) $\sqrt[3]{343} = 7$, pois, $7^3 = 343$

9.9.2 Extração da Raiz Cúbica de um Número natural N com aproximação de uma unidade por falta

Extrair a raiz cúbica de um número natural N *com aproximação de uma unidade por falta, significa obter a raiz cúbica do maior cubo perfeito contido no número* N.

De modo análogo ao que foi desenvolvido em 11.5, poderemos também demonstrar que se N *é um número dado*, então podemos escrever:

$\rho < \sqrt[3]{N} < \rho + 1$, onde:

ρ é a raiz cúbica de N por falta e $\rho + 1$ é a raiz cúbica de N por excesso.

Estudaremos apenas as raízes cúbicas por falta.

1º caso: O número dado é menor que 100

Ex.: A $\sqrt[3]{70}$ é aproximadamente 4, pois 64 (cuja raiz cúbica é 4) é o maior cubo perfeito contido em 70.

2º caso: O número dado é maior que $1.000(10^3)$ e menor que $1.000.000(10^6)$

Sendo d o número de dezenas e u o algarismo das unidades da raiz cúbica de um número N entre 100 e 1.000, podemos escrever:

$N = (du)^3 + r$

$N = (10d + u)^3 + r$

$N = (10d)^3 + 3 \times (10d)^2 \times u + 3 \times (10d) \times u^2 + u^3 + r$

$N = 1000d^3 + 3 \times 100 \times d^2 \times u + 3 \times 10 \times d \times u^2 + u^3 + r$

9.9.3 Teorema I

O algarismo das dezenas da raiz cúbica de um número (entre 1.000 e 1.000.000) é o mesmo que o da raiz cúbica dos milhares do número dado.

9.9.4 Teorema II

Substituindo de um número dado o cubo das unidades contido nas dezenas de sua raiz cúbica e dividindo as centenas da diferença pelo triplo do quadrado de dezenas da raiz, obtém-se o algarismo das unidades ou superior.

De acordo com as demonstrações desses teoremas, poderemos chegar a uma regra que, para melhor ser entendida, será enunciada e acompanhada passo a passo através de um exemplo.

Ex.: Seja extrair a raiz cúbica de 12.167.

Regra

1º) *Divide-se o número em classes de três algarismos, da direita para a esquerda, podendo a última classe ser incompleta;*

$\sqrt[3]{12.167}$

2º) *Coloca-se abaixo da última classe (12) o maior cubo contido na mesma (8), cuja raiz cúbica (3) será o 1º algarismo da raiz subtrai-se esse cubo (8)*

de 12 *(*$1^{\underline{a}}$ *classe), obtendo-se assim o* $1^{\underline{o}}$ *resto parcial, ao lado do mesmo, baixando a próxima classe (*167*).*

$\sqrt[3]{12.167}$	3
8	
4.167	

$\rightarrow$ (3 é a raiz cúbica do maior cubo perfeito contido em 12)

$3^{\underline{o}}$) *Separa-se por um ponto (.) os dois primeiros algarismos da direita desse resto (*41.67*) e divide-se a parte da esquerda (*41*) pelo triplo do quadrado do número que está compondo a raiz* $[41 \div (3 \times 2^2) = 41 \div 12 = 3,41(6)]$

Obs.: A parte inteira desse quociente (3) deverá ser menor ou igual ao $2^{\underline{o}}$ algarismo da raiz.

Se for *maior* ou *igual*, adotaremos o 9 (maior número de um algarismo).

$\sqrt[3]{12.167}$	3
8	$3 \times 2^2 = 12$
4.167	$41 : 12 = 3$

$4^{\underline{o}}$) *Para verificarmos se o algarismo (*3*) fará parte da raiz, coloca-se abaixo do resto (*4.167*) a soma do triplo do quadrado da raiz, multiplicado pelo quociente encontrado, acrescido de dois zeros* $(3 \times 2^2 \times 3 = 3600)$, *mais o triplo da raiz multiplicado pelo quadrado do quociente encontrado, acrescido de um zero*; $(3 \times 2 \times 3^2 = 540)$, *mais*;

O cubo do quociente achado $(3^3) = 27$

$\sqrt[3]{12.167}$	3
8	$3 \times 2^2 = 12$
4.167	$41 : 12 = 3$
4.167	
0	
	$3 \times 2^2 \times 3 = 36.000$
	$3 \times 2 \times 3^2 = 540$
	$3^3 = 27$

Como a soma (4.167) é igual ao resto (4.167), então, o algarismo 3 fará parte da raiz. Se a soma obtida fosse maior que o resto, diminuiríamos esse algarismo de $1, 2, 3, \ldots$ unidade(s), até obtermos uma soma menor ou igual ao resto.

9.9.5 Teorema III

O maior resto que se pode encontrar na extração da raiz cúbica de um número N *é igual ao triplo do quadrado da raiz mais o triplo da raiz.*

Seja $\underset{R}{\sqrt[3]{N-1}} = \rho$, onde ρ é a raiz e R o maior resto.

Se $\underset{R}{\sqrt[3]{N-1}} = \rho \quad .... \quad \text{(I)} \Rightarrow \sqrt[3]{N} = \rho + 1 \quad .... \quad \text{(II)}$

Em (I), $N - 1 = \rho^3 + R \quad .... \quad \text{(III)}$

Em (II), $N = (\rho + 1)^3 \quad .... \quad \text{(IV)}$

Substituindo (IV) em (III), teremos

$(\rho + 1)^3 - 1 = \rho^3 + R$, desenvolvendo, teremos:

$\rho^3 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 - 1 = \rho^3 + R$, logo, $R = 3\rho^2 + 3\rho \quad ....$ c. q. d

Colocando ρ em evidência, teremos: $\mathbf{R = 3\rho \cdot (\rho + 1)}$

9.10 Raiz Cúbica de Frações Ordinárias

1º caso: Os termos são cubos perfeitos

Nesse caso, devemos extrair a raiz de cada termo:

Ex.: $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{3}{5}$

2º caso: Apenas o denominador é um cubo perfeito

Nesse caso, extrai-se a raiz do denominador e, em seguida, extrai-se a do numerador com aproximação de uma unidade.

Ex.: $\sqrt[3]{\dfrac{13}{343}} = \dfrac{\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{343}} = \dfrac{2}{7}$

3º caso: O denominador não é um cubo perfeito

Nesse caso, basta transformarmos o denominador num cubo perfeito e, conseqüentemente, iremos recair no caso precedente.

Ex.: $\sqrt[3]{\dfrac{3}{17}} = \dfrac{\sqrt[3]{3 \times 17 \times 17}}{17 \times 17 \times 17} = \dfrac{\sqrt[3]{3 \times 17 \times 17}}{17 \times 17 \times 17} = \dfrac{\sqrt[3]{867}}{\sqrt[3]{17^3}} = \dfrac{9}{17}$

9.11 Raiz Cúbica de Números Decimais

Basta transformarmos os números decimais em frações decimais.

Exemplos:

a) Extrair a raiz cúbica de $0,343$

$0,343 = \frac{343}{1.000}$ $\sqrt[3]{0,343} = \sqrt[3]{\frac{343}{1.000}} = \frac{\sqrt[3]{7^3}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{7}{10} = 0,7$

b) Extrair a raiz cúbica de $13312,053$

$13312,053 = \frac{13.312.053}{1.000} = \frac{237^3}{10^3}$, logo, $\sqrt[3]{13312,053} = \sqrt[3]{\frac{13.312.053}{1.000}} = 2,37$

Obs.: Devemos sempre igualar o número de casas decimais a um número múltiplo de 3.

c) Extrair a raiz cúbica de $0,2$

$0,2 = 0,200 = \frac{200}{1.000} = \frac{200}{10^3}$

$\sqrt[3]{0,2} = \sqrt[3]{\frac{200}{10^3}} = \frac{5}{10} = 0,5$ (por falta).

9.12 Extração da Raiz Cúbica de um Número N com uma Aproximação n/d de Unidade

Extrair a raiz cúbica de um número N*, com uma aproximação* n/d *de unidade, significa obter o maior número de vezes que* n/d *está contido na raiz de* N.

1º caso: A aproximação é de uma fração ordinária, cujo numerador é a unidade

Ex.: Seja extrair a raiz cúbica de 4 com aproximação igual a $1/6$ de unidade.

$4 = \frac{4 \times 6^3}{6^3} = \frac{4 \times 216}{6^3} = \frac{864}{6^3}$

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{864}{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{864}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

2º caso: A aproximação é de uma fração ordinária qualquer

Ex.: Extrair a raiz cúbica de 215 com uma aproximação igual a 2/3 de unidade.

Obs.: $\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3/2}$

$$215 = \frac{215 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \frac{215 \times \dfrac{9}{4}}{\dfrac{9}{4}} = \frac{483,75}{\dfrac{9}{4}} = 483,75 \times \frac{4}{9} = \frac{1.935}{9}\text{, daí,}$$

$$\sqrt[3]{215} = \sqrt[3]{\frac{1.935}{9}} = \frac{\sqrt[3]{1.935}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}$$

Regra:

1º) *Multiplica-se o número* N *pelo cubo inverso da fração de aproximação*;
2º) *Extrai-se, com aproximação de uma unidade, a raiz cúbica do produto*;
3º) *Multiplica-se a raiz encontrada pela fração de aproximação.*

3º caso: A aproximação é de uma fração decimal

Ex.: Seja extrair a raiz cúbica de 5 com aproximação decimal e determinar também o resto.

$$5 = \frac{5 \times 10^3}{10^3} = \frac{5.000}{10^3}\text{, donde, } \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\frac{5.000}{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{5.000}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{17}{10} = 1,7$$

Resto: $5 - 1,7^3 = 5 - 4,913 = 0,087$

Ex$_2$.: Extrair a raiz cúbica de 43,7 com aproximação centesimal

$$43,7 = \frac{43,7 \times 1.000 \times 100 \times 100}{100 \times 100 \times 100} = \frac{43.700.000}{100^3}$$

$$\sqrt[3]{43,7} = \sqrt[3]{\frac{43.700.000}{100}} = \frac{\sqrt[3]{43.700.000}}{\sqrt[3]{100^3}} = \frac{352}{100} = 3,52$$

Resto: $43,7 - 3,52^3 = 43,7 - 43,61420 = 0,085792$

9.13 Exercícios Propostos

1) Calcule, por decomposição em fatores primos, a $\sqrt[3]{3,375}$.

2) A raiz cúbica de um número N é 6,25. Calcule a raiz sexta desse número.

3) Ao extrair a raiz cúbica de um número natural N, verificou-se que o resto era o maior possível e igual a 126. Qual é a soma dos algarismos de N?

4) O número $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $1+\sqrt{7}$ b) $1+\sqrt{6}$ c) $1+\sqrt{5}$ d) $1+\sqrt{3}$ e) $1+\sqrt{2}$

5) O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está entre:

a) 1 e $1,5$ b) $1,5$ e 2 c) 2 e $2,5$ d) $2,5$ e 3 e) $3,5$ e 4

6) Qual é o menor número natural pelo qual se deve multiplicar o número 2.916, para se obter um número que seja, ao mesmo tempo, *quadrado perfeito* e *cubo perfeito*?

7) Extraia a raiz quadrada de $0,296296296\ldots$, deixando a resposta sob forma de número decimal.

Respostas

1) $1,5$
2) $2,5$
3) 9
4) d
5) c
6) 16
7) $0,666\ldots$

Capítulo 10

Sistema de Unidades de Medidas

10.1 Introdução

Durante séculos, diversas tentativas foram desenvolvidas a fim de obter-se medidas padrões entre vários países. Foram os franceses[1] que, nos séculos XVII e XVIII, deram o principal impulso, culminando tal iniciativa em 1.798.

10.2 Grandeza

É um ente pelo qual vale a operação *medir*.

10.3 Medição de Grandeza

Medir uma grandeza significa compará-la com outra conhecida e de mesma espécie, denominada *unidade*.

10.4 Unidade de Medida

É uma outra grandeza que serve como termo de comparação.

[1]Gaspar Monge, Condorcet, Borda, Delambre, Méchain, Laplace, Bertholet, Prony,...

10.5 Grandezas Homogêneas e Grandezas Heterogêneas

10.5.1 Grandezas Homogêneas

- São grandezas de mesma espécie.

10.5.2 Grandezas Heterogêneas

- São grandezas de espécies diferentes.

10.6 Prefixos

Os principais prefixos utilizados foram os *gregos* e os *latinos*.

a) *gregos*: utilizados para designar os múltiplos.
kilo (k) significa *mil* (1.000)
hecto (h) significa *cem* (100)
deca (da) significa *dez* (10)

b) *latinos*: utilizados para designar os submúltiplos
deci (d) significa décimo ($0,1$ ou $\frac{1}{10}$)
centi (c) significa centésimo ($0,01$ ou $\frac{1}{100}$)
mili (m) significa milésimo ($0,001$ ou $\frac{1}{1000}$)

10.7 Medidas de Comprimento

São medidas que servem para avaliar a linha.

10.7.1 Unidade Fundamental ($\mathsf{U.F}$)

Várias foram as definições do *metro linear* [2]até hoje. Para simplificar, será enunciada a primeira (1.799) e a mais recente (1.979).

a) *Primeira definição*: É a décima milionésima parte $\left(\frac{1}{10.000.000}\right)$ de $\frac{1}{4}$ do arco do meridiano terrestre;

[2]Do latim *metrum*, que significa *medida*.

b) *Definição mais recente*: É o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo igual a $\frac{1}{299.792.458}$ de segundo.

10.7.2 Múltiplos e Submúltiplos

a) múltiplos $\begin{cases} \text{quilômetro } (km) = 1.000\, m \\ \text{hectômetro } (hm) = 100\, m \\ \text{decâmetro } (dam) = 10\, m \end{cases}$

b) submúltiplos $\begin{cases} \text{decímetro } (dm) = 0{,}1\, m \\ \text{centímetro } (cm) = 0{,}01\, m \\ \text{milímetro } (mm) = 0{,}001\, m \end{cases}$

10.7.3 Resumo

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

10.8 Medidas de Superfície

São medidas que servem para avaliar regiões limitadas por uma linha fechada não entrelaçada.

10.8.1 Unidade Fundamental

Metro Quadrado (m^2) - *é a superfície equivalente a um quadrado com* 1 *metro de lado.*

10.8.2 Múltiplos e Submúltiplos

a) múltiplos $\begin{cases} \text{quilômetro quadrado } (km^2) \\ \text{hectômetro quadrado } (hm^2) \\ \text{decâmetro quadrado } (dam^2) \end{cases}$

b) submúltiplos $\begin{cases} \text{decímetro quadrado } (\mathrm{dm}^2) \\ \text{centímetro quadrado } (\mathrm{cm}^2) \\ \text{milímetro quadrado } (\mathrm{mm}^2) \end{cases}$

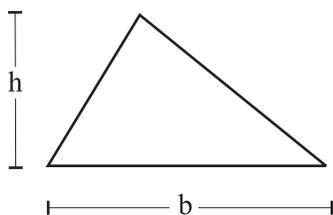
10.8.3 Resumo

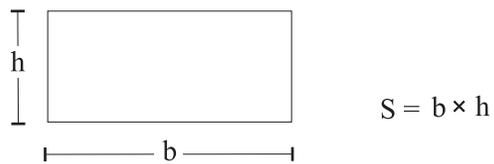
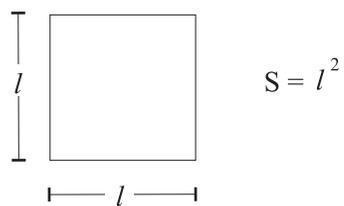
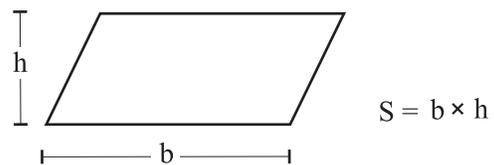
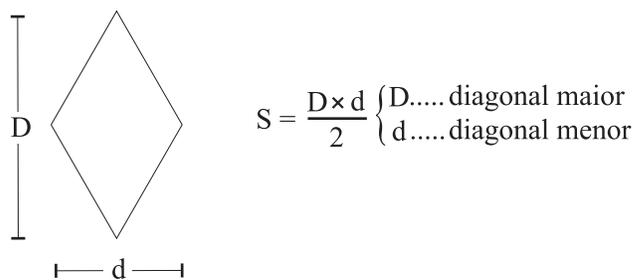
Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

10.8.4 Área

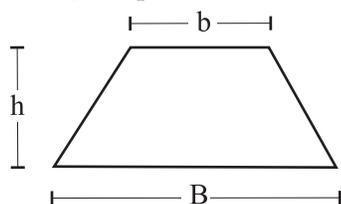
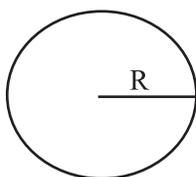
É a medida de qualquer superfície, expressa através da unidade fundamental ou por um de seus múltiplos ou submúltiplos.

10.8.5 Área das principais figuras planas

a.1) Triângulo

$$S = \frac{b \times h}{2} \begin{cases} b \ldots\ldots \text{base} \\ h \ldots\ldots \text{altura} \end{cases}$$

a.2) Retângulo

a.3) Quadrado

a.4) Paralelogramo

a.5) Losango

a.6) Trapézio

a.7) Círculo

R

$$S = \pi R^2 \begin{cases} \pi \ldots\ldots = 3{,}14 \\ R \ldots\ldots \text{raio} \end{cases}$$

10.9 Medidas de Volume

São medidas que servem para avaliar três dimensões, ou seja: o *comprimento*, a *largura* e a *altura*.

Obs: A altura também está associada à *profundidade*.

10.9.1 Unidade Fundamental

Metro cúbico (m^3) - *é o volume equivalente a um hexaedro (cubo) com* 1 m *de aresta*.

10.9.2 Múltiplos e submúltiplos

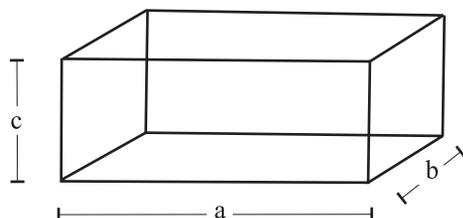
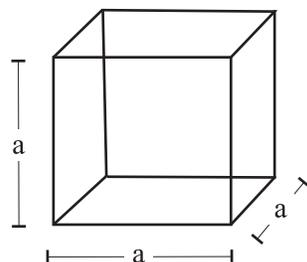
$$\text{a) múltiplos} \begin{cases} \text{quilômetro cúbico } (km^3) \\ \text{hectômetro cúbico } (hm^3) \\ \text{decâmetro cúbico } (dam^3) \end{cases}$$

$$\text{b) submúltiplos} \begin{cases} \text{decímetro cúbico } (dm^3) \\ \text{centímetro cúbico } (cm^3) \\ \text{milímetro cúbico } (mm^3) \end{cases}$$

10.10 Resumo

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

10.10.1 Volume (V) dos Principais Sólidos

b.1) Paralelepípedo retângulo

b.2) Hexaedro[3] (cubo)

3

10.11 Medidas Agrárias

São medidas que servem para avaliar áreas agricultáveis, assim como: sítios, florestas, vinhedos, prados, etc.

10.11.1 Unidade fundamental

Are (a) - *É a superfície equivalente a um quadrado com* $10\,m$ *de lado.*

[3]Hexa - seis; edro - face

Área: $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}^2$
Conclusão: $1\mathrm{a} = 100\,\mathrm{m}^2$

10.11.2 Múltiplos e Submúltiplos

a) múltiplos $\begin{cases} \text{quiloare}\,(\mathrm{ka}) \\ \text{hectare}\,(\mathrm{ha}) \\ \text{decare}\,(\mathrm{da}) \end{cases}$

b) submúltiplos $\begin{cases} \text{deciare}\,(\mathrm{da}) \\ \text{centiare}\,(\mathrm{ca}) \\ \text{miliare}\,(\mathrm{ma}) \end{cases}$

Obs_1:
1ª) $10\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{dam} \to 1\,\mathrm{a} = 1\,\mathrm{dam}^2$
2ª) $1\,\mathrm{ha} = 100\,\mathrm{dam}^2 \to 1\,\mathrm{ha} = 1\,\mathrm{hm}^2$
3ª) $1\,\mathrm{ca} = 0,01\,\mathrm{dam}^2 \to 1\,\mathrm{ca} = 1\,\mathrm{m}^2$

Obs_2: O *quiloare*, o *decare*, o *deciare* e o *miliare* não formam quadrados de lados decimais, conseqüentemente, não são utilizados na prática.

Obs_3: *Alqueire* - medida agrária equivalente a:
- 48.400 m^2 em MG, GO e RJ;
- 24.200 m^2 em SP;
- 27.225 m^2 no nordeste do Brasil.

10.11.3 Resumo

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
ka	ha	daa	a	da	ca	ma

10.12 Medidas de Capacidade

São medidas que servem para avaliar líquidos e grãos,[4] *em geral.*

[4] Arroz, farinha, milho,...

10.12.1 Unidade Fundamental: litro (abreviatura: l)

Litro - *é a capacidade equivalente a um cubo com* 1 dm *de aresta.*
$1\,l = 1\,dm^3$

10.12.2 Múltiplos e Submúltiplos

a) múltiplos
- quilolitro (kl)
- hectolitro (hl)
- decalitro (dal)

b) submúltiplos
- decilitro (dl)
- centilitro (cl)
- mililitro (ml)

10.12.3 Resumo

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml

10.13 Medidas de Massa

São medidas que avaliam a quantidade de matéria dos corpos.

10.13.1 Unidade Fundamental

Quilograma[5](kg) - *é a massa de um decímetro cúbico de água pura.*

10.13.2 Múltiplos e Submúltiplos

a) múltiplos
- quilograma (km)
- hectograma (hg)
- decagrama (dag)

b) submúltiplos
- decigrama (dg)
- centigrama (cg)
- miligrama (mg)

[5]Para efeito de subdivisão, coloca-se "g"(antiga) em vez de kg (atual).

10.13.3 Resumo

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Obs$_1$: Uma tonelada (1 t) é igual a 1.000 kg;
Obs$_2$: Um quilate tem massa igual a 2 dg ou 0, 2 g.
Obs$_3$: Arroba - Massa equivalente a 15 kg.
Obs$_4$: 1 l de $H_2O \cong 1$ kg.

10.14 Quadro Sinóptico

Medidas	Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
Comprimento	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Superfície	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Volume	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
Agrária	ka	ha	daa	a	da	ca	ma
Capacidade	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
Massa	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

10.15 Unidades Norte Americanas

a) Comprimento

Nomes		Abreviaturas	Sistema Métrico Decimal
Inglês	Português		
1 yard	1 jarda	yd	91, 44018 cm
1 foot	1 pé	ft	30, 48006 cm
1 inch	1 polegada	in	2, 540005 cm
1 mile	1 milha	mi	1.609, 3472 m

b) Superfície

Nomes		Abreviaturas	Sistema Métrico Decimal
Inglês	Português		
1 square yard	1 jarda quadrada	sq.yd	$0,8361307\,m^2$
1 square foot	1 pé quadrado	sq.ft	$929,0341\,cm^2$
1 square inch	1 pol. quadrada	sq.in	$6,451626\,cm^2$
1 square mile	1 milha quadrada	sq.mi	$2,589998\,km^2$

c) Volume

Nomes		Abreviaturas	Sistema Métrico Decimal
Inglês	Português		
1 cubic yard	1 jarda cúbica	cu.yd	$0,7645594\,m^3$
1 cubic foot	1 pé cúbico	cu.ft	$28,317016\,dm^3$
1 cubic inch	1 pol. cúbica	cu.in	$16,387162\,cm^3$

d) Capacidade

Nomes		Abreviaturas	Sistema Métrico Decimal
Inglês	Português		
1 liquid quart	1 quarta-feira	liq.qt	$0,946333\,l$
1 gallon	1 galão	gal	$3,785332\,l$

e) Massa

Nomes		Abreviaturas	Sistema Métrico Decimal
Inglês	Português		
1 avoir ounce	1 onça	oz.avdp	$28,349527\,g$
1 avoir pound	1 libra	ld.avdp	$453,592427\,g$
1 short ton	1 tonelada	tn.sh	$907,18486\,kg$
1 long ton	1 tonelada	tn.l	$1016,04704\,kg$

Observação:

Milha Náutica (M) - *É o comprimento de* 1´ *de grau sexagesimal do meridiano terrestre*

$$1\,\mathrm{M} = \frac{40.000\mathrm{km}}{360 \times 60} \cong 1.852\mathrm{m}$$

Milha Terrestre -A origem milha terrestre, sistema de medida utilisada nos Estados Unidos e na Inglaterra, é bastante curiosa. O exército romano tinha uma unidade de comprimento chamada mille assus - mil passadas dadas por um centurião, comandante de uma das tropas. os passos eram duplos, mais largos que os normais. Uma milha corresponde a $1609,344$ metros.

10.16 Exercícios Propostos

1) Complete:

a) $7.308\,\mathrm{m} =$ ....hm
b) $871\,\mathrm{mm} =$ ....m
c) $308\,\mathrm{cm} =$ ....hm
d) $50\,\mathrm{cm} =$ ....dm
e) $7\,\mathrm{dam} =$ ....km

2) Complete:

a) $61\,\mathrm{m}^2 =$ ....dam^2
b) $3.030\,\mathrm{km}^2 =$ ....hm^2
c) $3\,\mathrm{mm}^2 =$ ....dm^2
d) $0,0058\,\mathrm{hm}^2 =$ ....dam^2
e) $0,49\mathrm{m}^2 =$ ....hm^2

3) Complete:

a) $62\,\mathrm{a} =$ ....dm^2
b) $0,77\,\mathrm{ha} =$ ....km^2
c) $0,8130\,\mathrm{m}^2 =$ ....ha
d) $84.000\,\mathrm{a} =$ ....km^2
e) $0,37\,\mathrm{a} =$ ....ha

4) Complete:

a) $14\text{m}^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{dam}^3$
b) $0,879\,\text{cm}^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{dm}^3$
c) $3,09\,\text{t} = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{kg}$
d) $0,000.009\,\text{km}^3 = \ldots\ldots\ldots\text{hm}^3$

5) Complete:

a) $6.041\,\text{dm}^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{ml}$
b) $47,2\,\text{m}^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{l}$
c) $194\,\text{g} = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{cg}$
d) $407\,\text{kg} = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{t}$
e) $8.000\,\text{l} = \ldots\ldots\ldots\ldots\text{dal}$

6) Complete:

a) $4\,\text{hg} = \ldots\ldots\ldots\text{g}$
b) $6\,\text{m} = \ldots\ldots\ldots\text{cm}$
c) $1\,\text{l} = \ldots\ldots\ldots\text{cl}$
d) $2\,\text{m}^2 = \ldots\ldots\ldots\text{dam}^2$
e) $6\,\text{dm}^3 = \ldots\ldots\ldots\text{dam}^3$

7) Calcule:

a) $960\,\text{m}^2 \div 80\,\text{m}^2$
b) $108\,\text{m}^2 \div 9\,\text{m}$
c) $625\,\text{m}^3 \div 5\,\text{m}^3$
d) $44\,\text{m} \times 7$

8) Resolva e apresente o resultado em metros cúbicos:

a) $0,4\,\text{m} \times 2\,\text{mm} \times 100\,\text{dam}$
b) $0,002\,\text{km} \times \frac{5}{8}\,\text{dam}^2 \div 125$
c) $1\,\text{m} \times 1\,\text{m} \times 1\,\text{m}$
d) $45\,\text{m}^3 \div 160\,\text{m}^2 \times 4\,\text{m} \times 200\text{m}$
e) $22\,\text{cm} \times 1,2\,\text{dm} \times 0,06\,\text{m}$

9) Preencha as lacunas convenientemente:

a) $7,845\,\text{m} = \ldots\ldots\text{dm} = \ldots\ldots\text{cm} = \ldots\ldots\text{dam} = \ldots\ldots\text{mm}$

b) $6.440\,\mathrm{m} = ...\mathrm{dam} = ...\mathrm{mm}$
c) $7\,\mathrm{dam} = ...\mathrm{m} = ...\mathrm{hm} = ...\mathrm{dm}$
d) $8.247,3\,\mathrm{dm} = ...\mathrm{hm} = ...\mathrm{cm} = ...\mathrm{m}$
e) $6,5\,\mathrm{dam} \times 3 = ...\mathrm{m}$
f) $9,405\,\mathrm{hm} \times 3 = ...\mathrm{dm}$
g) $\frac{6}{5}$ de $5,84\,\mathrm{km} = ...\mathrm{dam}$
h) $5,32\,\mathrm{dm} - .....\mathrm{mm} = 9,7\,\mathrm{cm}$
i) $28,9\,\mathrm{km} - .....\mathrm{hm} = 8.207\,\mathrm{m}$
j) $1.260\,\mathrm{m} + ...\mathrm{dam} = 2,57\,\mathrm{km}$
k) $0,00457\,\mathrm{km} = ...\mathrm{cm}$
l) $4,31\,\mathrm{dam} = ...\mathrm{mm}$
m) $3.875\,\mathrm{m} = ...\mathrm{km}$

10) Complete:

a) $34\,\mathrm{hm}^2 = ...\mathrm{m}^2 = ...\mathrm{cm}^2$
b) $0,0056\,\mathrm{hm}^2 = ...\mathrm{dm}^2 = ...\mathrm{dam}^2$
c) $51\,\mathrm{m}^2 = ...\mathrm{dm}^2 = ...\mathrm{dam}^2$
d) $0,79\,\mathrm{m}^2 = ...\mathrm{cm}^2 = ...\mathrm{dam}^2$
e) $1\,\mathrm{mm}^2 = ...\mathrm{m}^2 = ...\mathrm{dm}^2$
f) $0,030\,\mathrm{km}^2 = ...\mathrm{cm}^2 = ...\mathrm{hm}^2$
g) $5,32\,\mathrm{hm}^2 - 32,40\,\mathrm{m}^2 = ...\mathrm{dam}^2$
h) $\frac{3}{4}\,\mathrm{dam}^2 = ...\mathrm{m}^2$
i) $1.228\,\mathrm{m}^2 + 1.234\,\mathrm{cm}^2 = ...\mathrm{dm}^2$
j) $0,3040\,\mathrm{m}^2 + 40\,\mathrm{dam}^2 \div 80 - 360\,\mathrm{cm}^2 \times 25 = ...\mathrm{dm}^2$
k) $64\,\mathrm{m}^2 + 48\,\mathrm{dam}^2 \div 25 = ...\mathrm{m}^2$
l) $10\,\mathrm{ha} = ...\mathrm{a} = ...\mathrm{dm}^2$
m) $32\,\mathrm{a} = ...\mathrm{dam}^2 = ...\mathrm{dm}^2$
n) $513\,\mathrm{a} = ...\mathrm{m}^2 = ...\mathrm{ha}$
o) $34\,\mathrm{dam}^2 = ...\mathrm{ca}$
p) $0,47\,\mathrm{ha} = ...\mathrm{ca} = ...\mathrm{hm}^2$
q) $87.000\,\mathrm{a} = ...\mathrm{ha} = ...\mathrm{km}^2$
r) $307\,\mathrm{a} + 0,39\,\mathrm{ha} - 3.000\,\mathrm{ca} = ...\mathrm{dam}^2$
s) $30,4\,\mathrm{ca} + 0,45\,\mathrm{hm}^2 = ...\mathrm{a}$
t) $3.754\,\mathrm{hm}^2 - 60\,\mathrm{a} = ...\mathrm{m}^2$
u) $0,27\,\mathrm{dam}^2 + 2,71\,\mathrm{ha} = ...\mathrm{m}^2$

11) Complete:

a) $2,4217\,\mathrm{m}^3 = ...\mathrm{cm}^3$
b) $2\frac{2}{5}$ do $\mathrm{m}^3 = ...\mathrm{dm}^3$
c) $3.824\,\mathrm{cm}^3 = ...\mathrm{m}^3$
d) $7,438\,\mathrm{m}^3 = ...\mathrm{dm}^3$
e) $6,1113\,\mathrm{dm}^3 = ...\mathrm{cm}^3$
f) $0,779\,\mathrm{cm}^3 = ...\mathrm{dm}^3 = ...\mathrm{mm}^3$
g) $\frac{3}{8}\,\mathrm{dm}^3 + 0,038\,\mathrm{m}^3 : 100 = ...\mathrm{dm}^3$
h) $0,356\,\mathrm{m}^3 - 14.500\,\mathrm{cm}^3 = ...\mathrm{dm}^3$
i) $3451\,\mathrm{dm}^3 + 385.000\,\mathrm{cm}^3 + 2,31\,\mathrm{m}^3 = ...\mathrm{dm}^3$
j) $1\,\mathrm{m}^3 = ...\mathrm{dm}^3 = ...\mathrm{l}$
k) $1,72\,\mathrm{hl} = ...\mathrm{dl} = ...\mathrm{cm}^3$
l) $204\,\mathrm{l} = ...\mathrm{h\,l} = ...\mathrm{m\,l}$
m) $1\,\mathrm{cm}^3 = ...\mathrm{m\,l}$
n) $\frac{3}{5}$ de $2,5\,\mathrm{h\,l} = ...\mathrm{dm}^3$
o) $400\,\mathrm{l} = ...\mathrm{h\,l} = ...\mathrm{dal}$

12) Converta em $\mathrm{g/cm}^3$:

a) $4,5\,\mathrm{kg/dm}^3$
b) $3,8\,\mathrm{t/m}^3$
c) $6,7\,\mathrm{kg/m}^3$
d) $3,5\,\mathrm{kg/m}^3$
e) $5,2\,\mathrm{kg/dm}^3$
f) $1,8\,\mathrm{t/m}^3$
g) $2,5\,\mathrm{kg/m}^3$
h) $3\,\mathrm{kg/dm}^3$
i) $2,5\,\mathrm{t/m}^3$

13) Exprima em $\mathrm{kg/dm}^3$

a) $2,5\,\mathrm{g/cm}^3$
b) $230\,\mathrm{kg/m}^3$
c) $2\,\mathrm{t/m}^3$
d) $35\,\mathrm{dg/cm}^3$
e) $20\,\mathrm{hg/dm}^3$
f) $0,5\,\mathrm{dg/cm}^3$

g) $3,5\,t/m^3$
h) $9,4\,kg/m^3$
i) $6,8\,g/cm^3$

14) Complete:

a) $3,5\,g/m^3 = ...kg/dm^3 = ...t/m^3$
b) $15\,g/cm^3 = ...kg/dm^3 = ...t/m^3$
c) $5\,kg/dm^3 = ...g/dm^3 = ...g/cm^3$
d) $6\,t/m^3 = ...g/m^3 = ...g/cm^3$

15) Durante uma corrida rústica, o atleta percorreu 326 dam. Esta distância corresponde a:
a) $32,6\,km$ b) $326\,hm$ c) $3,26\,km$ d) $0,326\,km$

16) Uma superfície de $3\,km^2$ é igual a:

a) $3\,ha$ b) $30\,ha$ c) $3.000\,ha$ d) $300\,ha$

17) O resultado, em decâmetros, da expressão $3,7\,km + 0,8\,hm + 425\,cm$ é:

a) $378,425$ b) $382,25$ c) $450,425$ d) $45,425$

18) O decímetro cúbico vale:

a) $1/10$ do m^3 b) $1/1.000$ do m^3 c) $1/10.000$ do m^3 d) $1/100$ do m^3

19) Calcule em m^2 o valor de: $35,4a, hm^2 + (8.189,7\,m^2 - 235.200\,dm^2) + 0,12\,km^2$

a) $4.798,377$ b) $47.983,77$ c) $479.837,7$ d) $4.079.837,7$

20) Um centiare é igual a:

a) $1\,mm^2$ b) $1\,cm^2$ c) $1\,m^2$ d) $1\,dam^2$

21) Efetue a seguinte operação, dando a resposta em metros: $(2\,km + 3\,m + 4\,dm) : 6$

a) $331,9$ b) $333,9$ c) $334,5$ d) $335,4$

22) Calcule $36,256m + 124,5\,cm + 12,8132\,dam + 1,72\,dm + 0,34295\,hm$

a) $20\,\mathrm{km}$ b) $20\,\mathrm{hm}$ c) $200\,\mathrm{m}$ d) $174,63215\,\mathrm{cm}$

23) Efetuando $100\mathrm{dm} \times 0,1\,\mathrm{dam} \times 100\,\mathrm{mm}$, obtemos:

a) $0,010\,\mathrm{m}^3$ b) $10\,\mathrm{m}^3$ c) $100\,\mathrm{m}^3$ d) $1\,\mathrm{m}^3$ e) $0,100\,\mathrm{m}^3$

24) Um arquiteto planejou uma caixa d'água de base quadrada com 2.000 litros de capacidade, com altura igual ao dobro do lado. Na execução da obra, o construtor fez o lado igual a altura planejada. Sabendo-se que a caixa d'água continuou com a mesma capacidade, a nova altura mede:

a) $0,7\,\mathrm{m}$ b) $2\,\mathrm{m}$ c) $1\,\mathrm{m}$ d) $1,5\,\mathrm{m}$ e) $0,5\,\mathrm{m}$

25) Uma sala de $0,007\,\mathrm{km}$ de comprimento, $80\,\mathrm{dm}$ de largura e $400\,\mathrm{cm}$ de altura e tem uma porta de $2,40\,\mathrm{m}^2$ de área e uma janela de $2\,\mathrm{m}^2$. Sabe-se que com 1 litro de tinta pinta-se $0,04\,\mathrm{dam}^2$. Indique a opção que contém a quantidade de tinta necessária para pintar a sala toda, inclusive o teto.

a) $59,4$ litros b) $35,9$ litros c) 44 litros d) 440 litros e) $42,9$ litros

26) Uma tartaruga percorreu num dia $6,05\,\mathrm{hm}$. No dia seguinte, percorreu mais $0,72\,\mathrm{km}$ e, no terceiro dia, mais $12.500\,\mathrm{cm}$. Podemos dizer que ela percorreu nos três dias uma distância de:

a) $1.450\,\mathrm{m}$ b) $12.506,77\,\mathrm{m}$ c) $14,500\,\mathrm{m}$ d) $12,506\,\mathrm{m}$

27) Sejam as sentenças:

I) $1/2\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{mm}$
II) $3,5\,\mathrm{m}^2 = 35\,\mathrm{dm}^2$
III) $5\,\mathrm{dm}^3 = 5$ litros
IV) $400\,\mathrm{m}^2 = 4\,\mathrm{ha}$

a) todas são falsas
b) todas são verdadeiras
c) apenas III é verdadeira
d) apenas IV é falsa
e) apenas I e II são falsas

28) Um tanque pode acondicionar 420 litros de água. Quantos baldes de $35\,\mathrm{dm}^3$ serão suficientes para enchê-lo?

a) 9 b) 9,5 c) 10 d) 11 e) 12

29) Se fizermos uma pilha de tábuas de madeira com 20 mm de espessura e outra com tábuas de 63 mm, o menor número utilizado das últimas tábuas, para que as duas pilhas tenham a mesma altura é de:

a) 20 tábuas b) 63 tábuas c) 40 tábuas d) 12 tábuas e) 120 tábuas

30) Ao redor de um canteiro retangular, pretende-se fazer um cimentado, com largura constante. As dimensões do canteiro são 3 m e 5 m. O material disponível é suficiente apenas para cobrir superfícies de até 16 m^2 de área. Usando todo o material, a largura máxima, em metros, do cimentado será de:
(Considere: $\sqrt{2} \cong 3,14$)

a) 6 m b) 1 m c) 0,8 m d) 0,6 m e) 0,1 m

31) Imagine um arame colocado ao longo do Equador terrestre. Depois, aumente em 10 metros o comprimento desse arame, de forma que a distância entre eles e a Terra seja constante. Considere o Equador como uma circunferência de 40.000 km e π igual a 3,14. O que pode ser construído entre o arame e a Terra é um(a):

a) torre de 20 m de altura
b) edifício de 10 pavimentos
c) casa de 2 pavimentos
d) barraca de acampamento de 1,50 m de altura
e) guarita de 2 m de altura

32) Uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo, de 4 dm de largura de 10 dm de comprimento, comporta exatamente 80 litros de água. Encontre o volume de outra caixa, que tenha a forma de um cubo, sabendo-se que a sua aresta é equivalente à altura da primeira caixa.

a) 16 litros b) 8 litros c) 12 litros d) 6 litros e) 10 litros

33) Com excessivo calor, a água gelada não foi suficiente para atender a todos no almoço. O dono da casa, para resolver o problema, colocou 20 cubos de gelo num recipiente em forma de paralelepípedo retângulo. As dimensões internas desse recipiente são: 1 dm, 6 dm e 2 dm. Cada cubo de gelo tem 2 cm de

aresta. Depois de derretidos os cubos, que fração do recipiente a água produzida ocupou, aproximadamente?

a) $2/5$ b) $3/4$ c) $7/10$ d) $1/20$ e) $1/30$

34) Uma cisterna cujas dimensões são $1\,m$, $2\,m$ e $3\,m$ contém água até $2/3$ de sua capacidade. Nessa cisterna há:

a) 40 litros b) 4.000 litros c) 400 litros
d) 2.000 litros e) 3.000 litros

35) Quantos azulejos devem ser usados para compor uma parede retangular de $5\,m$ de comprimento por $3\,m$ de altura, sabendo-se que cada azulejo tem a forma de um quadrado de $25\,cm$ de lado?

a) 240 b) 2.000 c) 20.000 d) 250 e) 33.000

36) Um homem pode perder até $1/3$ do seu sangue. A essa perda, a medula óssea responde aumentando a sua atividade, de modo a substituir rapidamente o sangue perdido. Paulo doa $1/4$ litro de seu sangue duas vezes por mês. Se cada receptor utiliza $1,5\,dm^3$ do sangue doado, quantos receptores Paulo ajudará, após 12 meses de doação?

a) 6 b) 3 c) 2 d) 8 e) 4

37) A cisterna de um edifício comporta $21.000\,l$ d'água. Quantos baldes de $17,5\,dm^3$ de volume serão necessários para enchê-los?

a) 24 b) 240 c) 1.200 d) 2.100 e) 2.400

38) Numa sala de aula, o quadro negro, que mede $6\,m$ por $0,9\,m$, vai ser adaptado para permitir construções de gráficos. Essa adaptação cobrirá 30% de sua área. Quantos metros quadrados restarão para utilização convencional?

a) $16,2\,m^2$ b) $3,78\,m^2$ c) $2,7\,m^2$ d) $4,02\,m^2$ e) $1,62\,m^2$

39) Para asfaltar uma rua de $190\,m$ de comprimento com $500\,cm$ de largura são necessários $380\,kg$ de asfalto. Quantos metros serão asfaltados com $930kg$ do mesmo asfalto, aumentando a largura para $600\,cm$?

a) $387,5$ b) 558 c) $646,9$ d) 932 e) 390

40) Um vendedor de refresco acondiciona o seu produto numa caixa de isopor com as seguintes dimensões internas: $1\,m \times 60\,cm \times 40\,cm$. Cada copo de refresco de $300\,ml$ é vendido por $R\$0,40$. Nessas condições, ao término de um dia de trabalho, pela venda de uma quantidade de refresco correspondente a 3/4 da capacidade da caixa, o vendedor apurou:

a) $R\$360,00$ b) $R\$300,00$ c) $R\$270,00$ d) $R\$330,00$ e) $R\$240,00$

41) Num determinado dia da semana, a venda do jornal "O Globo"equivale a 6 vezes a altura do Pão de Açúcar, que é de $386\,m$. Tomando esta informação como hipótese, e sabendo que cada exemplar tem uma espessura aproximada de $1,5\,cm$, a tiragem deste jornal neste dia é de, em média:

a) 25.733 exemplares b) 145.000 exemplares c) 154.400 exemplares
d) 15.440 exemplares e) 14.500 exemplares

42) Qual é o número de troncos de árvores de $3\,m^3$ de volume necessários para fazer-se palitos de fósforos a serem acondicionadas em 200 containers, cada um com 12.000 pacotes, cada pacote com 10 caixas de 40 palitos, cada?

Obs.: Volume de cada palito: $200\,mm^3$

43) Um pacote de papel "A4"para copiadoras e impressoras Laser e Jato de tinta possui as seguintes características, segundo dados transcritos em um pacote de 500 folhas:

$A_4/210 \times 297\,mm//75g/m^2$

Sabendo-se que a espessura de pacote é igual a $5\,cm$, determine a espessura (em milímetros) de cada folha.

Respostas

1)

a) $73,08$
b) $0,871$
c) $0,030.8$
d) 5
e) $0,07$

2)

a) $0,61$

b) 303.000

c) 0, 000.3

d) 0, 58

e) 0, 000.049

3)

a) 620.000

b) 0, 007.7

c) 0, 000.081.3

d) 8, 4

e) 0, 003.7

4)

a) 0, 014

b) 0, 000.879

c) 3.090

d) 0, 009

5)

a) 6.041.000
b) 47.200
c) 19.400
d) $0,407$
e) 800

6)

a) 400
b) 600
c) 100
d) $0,02$
e) $0,000.006$

7)

a) 12
b) $12\,m$
c) 125
d) $308\,m$

8)
a) $0,16\,m^3$
b) $1\,m^3$
c) $1\,m^3$
d) $225\,m^3$
e) $0,001.548\,m^3$

9)

a) $78,45; 784,5; 0,7845; 7845$
b) $644; 6.440.000$
c) $70; 0,7; 700$
d) $8,2473; 82473; 824,73$
e) 195
f) 28.215
g) 438
h) 435
i) $206,93$

- **j)** 131
- **k)** 457
- **l)** 43.100
- **m)** $3,875$

10)

- **a)** $340.000; 3.400.000.000$
- **b)** $0,56; 560.000; 56$
- **c)** $5.100; 0,51$
- **d)** $7.900; 0,007.9$
- **e)** $0,000\,001; 0,0001$
- **f)** $300.000.000; 3$
- **g)** $531,676$
- **h)** 75
- **i)** $122.812,34$
- **j)** $4.940,4$
- **k)** 256
- **l)** $1.000; 10.000.000$
- **m)** $32; 320.000$
- **n)** $51.300; 5,13$
- **o)** 3.400
- **p)** $4.700; 0,47$
- **q)** $870; 8,7$
- **r)** 316
- **s)** $45,304$
- **t)** 37.534.000
- **u)** 27.127

11)

- **a)** 2.421.700
- **b)** 2.400
- **c)** $0,003.824$
- **d)** 7.438
- **e)** $6.111,3$
- **f)** $0,000779; 779$
- **g)** $0,755$
- **h)** $341,5$

- **i)** 6.146
- **j)** 1.000; 1.000
- **k)** 1.720; 172.000
- **l)** 2, 04; 204.000
- **m)** 1
- **n)** 150
- **o)** 4; 40

12)

- **a)** 4, 5
- **b)** 0, 38
- **c)** 0, 006.7
- **d)** 0, 003.5
- **e)** 5, 2
- **f)** 0, 18
- **g)** 0, 002.5
- **h)** 3
- **i)** 0, 25

13)

- **a)** 2, 5
- **b)** 0, 23
- **c)** 2
- **d)** 3, 5
- **e)** 2
- **f)** 0, 05
- **g)** 3, 5
- **h)** 0, 009.4
- **i)** 6, 8

14)

- **a)** 0, 000.003.5; 0, 000.003.5
- **b)** 15; 15
- **c)** 5.000; 5
- **d)** 6.000.000; 60

15) c

16) d

17) a
18) b
19) c
20) c
21) b
22) c
23) d
24) e
25) e
26) a
27) c
28) e
29) a
30) c
31) d
32) b
33) e
34) b
35) a
36) e
37) c
38) b
39) a
40) e
41) a
42) 384
43) $0,1\,mm$

Capítulo 11

Arredondamento, Notação Científica e Ordem de Grandeza

11.1 Arredondamento

É a *aproximação* que se faz em *um* ou *mais* algarismos na *mantissa* de um número decimal e o mesmo poderá *modificar, ou não*, o algarismo da esquerda daquele que foi abandonado.

11.1.1 Critérios de Arredondamento

São regras que nos permitem fazer as aproximações desejadas. Tais aproximações podem ser: *decimais, centesimais, milesimais, ...*

1º critério - Se o algarismo a ser abandonado for menor que o 5, conserva-se o algarismo da esquerda.

Ex.: $2,473 \approx 2,47$ (aproximação centesimal)

2º critério - Se o algarismo a ser abandonado for maior que o 5, soma-se 1 ao algarismo da esquerda.

Ex.: $2,4376 \approx 2,438$ (aproximação milesimal)

3º critério - Se o algarismo a ser abandonado for 5 e, após o mesmo existir um outro, diferente de zero, soma-se 1 ao algarismo da esquerda.

Ex.: $18,3500001 \approx 18,4$ (aproximação decimal)

4º critério - Se o algarismo a ser abandonado for 5 e, após ele, existir um ou mais zeros, devemos:

a) somar 1 ao algarismo da esquerda, se o mesmo for ímpar.

Ex.: $3,475000...... \approx 3,48$ (aproximação centesimal)

b) conservar o algarismo da esquerda, se o mesmo for par.

Ex.: $3,2765000..... \approx 3,276$ (aproximação milesimal)

11.2 Exercícios Propostos

1) Faça o arredondamento dos números seguintes, dando-lhes uma aproximação decimal:

a) $2,347$
b) $60,743$
c) $2,853$
d) $3,316\ldots$
e) $0,5477$
f) $0,2449$
g) $8,15$
h) $7,2$
i) $2,050001$

2) Faça o arredondamento dos números a seguir, com uma aproximação centesimal:

a) $4,3478$
b) $3,141516$
c) $2,236$
d) $2,44948$
e) $2,645$
f) $5,1967$
g) $8,4261$
h) $10,6301$
i) $12,5299$

Respostas

1)	**a)**	$2,4$	**2)**	**a)**	$4,35$
	b)	$60,7$		**b)**	$3,14$
	c)	$2,9$		**c)**	$2,24$
	d)	$3,3$		**d)**	$2,45$
	e)	$0,5$		**e)**	$2,64$
	f)	$0,2$		**f)**	$5,20$
	g)	$8,2$		**g)**	$8,43$
	h)	$7,2$		**h)**	$10,63$
	i)	$2,1$		**i)**	$12,53$

11.3 Notação Científica

Denomina-se *notação científica* a qualquer número expresso da forma

$a \times 10^n$, onde: $a \leq 10$ e $n \in \mathbb{Z}^*$

Ex.: 3×10^5; $2,0 \times 10^{-3}$; $-4,0 \times 10^{-7}$; $6,02 \times 10^{23}$

Obs.: O número a poderá ser um número *inteiro* (*diferente de zero*) ou um número *decimal*. Se for um decimal, convém deixá-lo com certa *aproximação* e a mesma irá depender do *arredondamento* desejado.

Exemplos

1) Coloque sob forma de *notação científica* os seguintes números, dando-lhes uma *aproximação decimal*:

Resolução:

a) $14.000.000$
$= 1,4 \times 10.000.000 = 1,4 \times 10^7$

b) $0,0000072$
$= 7,2 \times 10^{-6}$

c) $0,00015 \times 0,0015$
$= 1,5 \times 10^{-4} \times 1,5 \times 10^{-3}$
$= 1,5 \times 1,5 \times 10^{-4} \times 10^{-3}$
$= 2,25 \times 10^{-7}$ ou $2,3 \times 10^{-7}$

d) $2 \times 10^{-5} + 3 \times 10^{-4}$
$= 2 \times 10^{-1} \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-4}$
$= 0,2 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-4}$
$= (0,2 + 3) \times 10^{-4}$
$= 3,2 \times 10^{-4}$

e) $3 \times 10^{-5} + 4 \times 10^{-6}$

$1^{\underline{o}}$) modo: Colocando-se 10^{-5} em evidência, teremos:
$10^{-5}(3 + 4 \times 10^{-1})$
$= 34 \times 10^{-6}$
$= 3,4 \times 10 \times 10^{-6}$
$= 3,4 \times 10^{-5}$

$2^{\underline{o}}$) modo: Colocando-se 10^{-5} em evidência, teremos:
$10^{-5}(3 + 4 \times 10^{-1})$
$= 10^{-5}(3 + 0,4)$
$= 3,4 \times 10^{-5}$

2) Se $A = 2.345.678.912$ e $B = 16.789.345$, determinar o número de dígitos do produto gerado por $A \times B$.

Resolução:

$2,3 \times 10^9 \times 1,6 \times 10^7 < A \times B < 2,4 \times 10^9 \times 1,7 \times 10^7$

Fazendo $A \times B = P$, teremos:

$3,68 \times 10^{16} < P < 4,08 \times 10^{16}$

Nos dois membros dessa desigualdade vê-se que a característica tem apenas 1 dígito e o expoente do 10 é o 16. Somando $1 + 16$ teremos a resposta, ou seja, 17 dígitos.

11.4 Exercícios Propostos

1) Coloque sob forma de notação científica os seguintes números:

a) 200
b) 3.000
c) 70.000
d) 0,3

e) $0,05$
f) $0,008$
g) $7.000.000$
h) $(0,01)^2 \times (0,001)^{-1}$
i) $\dfrac{3}{1.000}$
j) $2 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3}$
k) $9 \times 10^9 \times \dfrac{10^{19}}{(10^{-2})^2}$
l) $2 \times 10^{-3} \times 2 \times 0,5 \times 0,5$
m) $\dfrac{1,4 \times 10^{-4} - 0,2 \times 10^{-4}}{2}$
n) $\dfrac{9,8 \times (6,37 \times 10^6)^2}{6,37 \times 10^{11}}$
o) $\dfrac{10^{-8} \times 4 \times 10^4 + 4 \times 10^{-8} \times 1,5 \times 10^4}{0,25 \times 10^{-8} + \frac{1}{4} \times 10^{-8}}$
p) $\dfrac{\frac{9 \times 10^9}{3} \times 200 \times \frac{1}{3 \times 10^9} \times 30 \times 10^{-10}}{(10 \times 10^{-2})^2}$
q) $9 \times 10^9 \times \dfrac{2 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-8}}{(3 \times 10^{-2})^2}$
r) $\dfrac{9 \times 10^{-20} \times 8 \times 10^{24}}{(12 \times 10^6)^2}$
s) $\dfrac{12 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-3}}{13 \times 10^3 - 4 \times 10^3}$
t) $6,2 \times 10^{-4} - 4,2 \times 10^{-4}$

2) Coloque sob forma de notação científica, com uma aproximação decimal:
a) 2.300
b) $0,027$
c) $0,0000084$
d) $(0,02)^5$
e) $0,00666\ldots$
f) $0,08222\ldots$
g) $0,000567$

h) $0,0045$

i) $0,0000085$

j) $\dfrac{10^{-10} \times 1000}{10 \times 0,5}$

k) $\dfrac{6 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-8}}$

l) $\dfrac{28 \times 6 \times 10^{23}}{56}$

m) $\dfrac{1000 \times 6 \times 10^{24}}{18}$

n) $\dfrac{0,03 \times 6 \times 10^{28}}{12}$

o) $9 \times 10^{9} \times \dfrac{4 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-2}}$

p) $9 \times 10^{9} \times \dfrac{3 \times 10^{-8}}{6 \times 10^{-2}}$

q) $\dfrac{7 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{30}}{(12 \times 10^{6})^{2}}$

r) $\dfrac{28 \times 6,02 \times 10^{23}}{22,4}$

s) $\dfrac{48 \times 6,02 \times 10^{23}}{16}$

t) $\dfrac{40 \times 2,408 \times 10^{25}}{6,02 \times 10^{23}}$

u) $\dfrac{1,204 \times 18 \times 10^{22}}{6,02 \times 10^{23}}$

v) $\dfrac{4 \times (1,2)^{2} \times 9 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{9} \times 4}$

w) $\dfrac{9,8 \times (637 \times 10^{6})^{2}}{9 \times 10^{9} \times 4}$

x) $\dfrac{24}{1,6 \times 10^{-19}}$

y) $\dfrac{0,2 \times 0,000082 \times 350}{4,1}$

z) $\dfrac{0,15 \times 0,000000164 \times 700}{4,1}$

3) Ponha sob forma de notação científica, com uma aproximação decimal:

a) $7 \times 10^{-4} - 6,2 \times 10^{-4}$
b) $(7 \times 10^{-5}) \div (2 \times 10^{3})$
c) $3 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-4}$
d) $0,005 \times 0,07$
e) $2 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4}$
f) $2 \times 10^{-5} + 10^{-6}$
g) $(10^{-3})^2 + (10^{-2})^3$
h) $0,0012 \times 0,0013$
i) $2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$
j) $14 \times 10^{-4} + 45 \times 10^{-3}$
k) $7,5 \times 10^{-6} - 75 \times 10^{-8}$
l) $4,3 \times 10^{-5} - 3,4 \times 10^{-5}$
m) $3,2 \times 10^{-6} \times 3,5 \times 10^{-6}$

4) Coloque sob forma de notação científica, com uma aproximação centesimal:

a) $\dfrac{64}{6,02 \times 10^{23}}$

b) $\dfrac{29,4 \times 7 \times 6,02 \times 10^{23}}{98}$

c) $\dfrac{2,84 \times 10^{12}}{(3 \times 10^{10})^2}$

d) $\dfrac{2,5 \times 10^{13}}{8 \times 10^{3}}$

e) $\dfrac{2,14 \times 15 \times 10^{-3}}{7,58 \times 10^{3}}$

f) $9 \times 10^{9} \times \dfrac{27 \times 10^{-9}}{(6 \times 10^{-2})^2}$

5) Coloque as grandezas físicas abaixo, sob forma de notação científica, deixando-as com a aproximação indicada:

a) *Velocidade da luz no vácuo* $= 300.000\,\mathrm{km/s}$ (aproximação decimal)

b) *Número de Avogadro* $= 602.000.000.000.000.000.000.000\,\mathrm{ml}$ (aproximação centesimal)

c) *Massa daTerra* $= 5.983.000.000.000.000.000.000.000\,\mathrm{kg}$ (aproximação milesimal)

d) *Massa do elétron em repouso* $= 0,000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.911\,\mathrm{kg}$ (aproximação centesimal)

e) *Massa do próton em repouso* $= 0,000.000.000.000.000.000.000.000.001.67\,\mathrm{kg}$ (aproximação centesimal)

f) *Distância média da Terra ao Sol* = 150 milhões de quilômetros (aproximação decimal)

6) Marie Curie, que pesquisou e esclareceu os mecanismos de radiatividade, concluiu que um curie equivale a $3,7 \times 10^{10}$ desintegrações por segundo. A CNEN informa que a bomba de césio destruída em Goiânia tinha uma atividade total, provavelmente em 1.971, quando foi fabricada, de cerca de 2.000curies. Por ocasião de sua abertura incidental (set/87), a fonte representava, então, as seguintes características: "atividade estimada em (set/87): 1370curies".

Pergunta-se: quantos átomos de césio, em notação científica, desintegraram-se por segundo em set/87?

7) Se $A = 3.659.893.456.789.325.678$ e $B = 342.937.498.379.256$, quantos dígitos tem o produto gerado por $A \times B$?

a) 36 b) 35 c) 34 d) 33 e) 32

8) Quantos dígitos têm a potência gerada por $(2.222.222.222)^4$?

9) Quantos dígitos se obtêm efetuando o produto

$$5.123.456 \times 4.134.567 \times 44.311.207?$$

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

Respostas

1)

a) 2×10^2
b) 2×10^3
c) 2×10^4
d) 3×10^{-1}
e) 5×10^{-2}
f) 8×10^{-3}
g) 7×10^6
h) 10^{-1}
i) 3×10^{-3}
j) 5×10^{-3}
k) 9×10^{-6}
l) 10^{-3}
m) $1,2 \times 10^{-7}$
n) $6,2 \times 10^2$
o) 2×10^4
p) 6×10^{-5}
q) 6×10^{-3}
r) 5×10^{-9}
s) 2×10^{-6}

2)

a) $2,3 \times 10^{3}$
b) $2,7 \times 10^{-2}$
c) $8,4 \times 10^{-6}$
d) $3,2 \times 10^{-9}$
e) $6,7 \times 10^{-3}$
f) $8,2 \times 10^{-2}$
g) $5,7 \times 10^{-4}$
h) $4,5 \times 10^{-3}$
i) $8,5 \times 10^{-6}$
j) $2,0 \times 10^{-8}$
k) $1,5 \times 10^{4}$
l) $3,0 \times 10^{23}$
m) $3,3 \times 10^{26}$
n) $1,5 \times 10^{21}$
o) $7,2 \times 10^{3}$
p) $4,5 \times 10^{3}$
q) $2,4 \times 10^{6}$
r) $1,05 \times 10^{23}$
s) $1,8 \times 10^{24}$
t) $1,6 \times 10^{3}$
u) $3,6 \times 10^{-1}$
v) $1,4 \times 10^{-12}$
w) $1,1 \times 10^{8}$
x) $1,5 \times 10^{20}$
y) $1,4 \times 10^{-3}$
z) $4,2 \times 10^{-6}$

3)

a) $8,0 \times 10^{-5}$
b) $3,5 \times 10^{-8}$
c) $1,5 \times 10^{-6}$
d) $3,5 \times 10^{-4}$
e) $2,3 \times 10^{-3}$
f) $2,1 \times 10^{-5}$
g) $2,0 \times 10^{-6}$
h) $1,6 \times 10^{-6}$
i) $2,3 \times 10^{-1}$
j) $4,6 \times 10^{-4}$
k) $6,8 \times 10^{-6}$
l) $9,0 \times 10^{-6}$
m) $1,1 \times 10^{-11}$

4)

a) $1,06 \times 10^{-22}$
b) $1,26 \times 10^{24}$
c) $3,16 \times 10^{-9}$

d) $3,12 \times 10^9$
e) $6,28 \times 10^{-6}$
f) $6,75 \times 10^4$

5)

a) $3,0 \times 10^5\ km/s$
b) $6,02 \times 10^{23}\ moles$
c) $5,983 \times 10^{24}\ kg$
d) $9,11 \times 10^{-31}\ kg$
e) $1,67 \times 10^{-27}\ kg$
f) $1,5 \times 10^8\ km$

6) c

7) c

8) c

11.5 Ordem de Grandeza

11.5.1 Introdução

Às vezes nos deparamos com vários números representados sob forma de *potenciação*.

Ex.: $2^3, 5^4, 10^7, 10^{-9}, \ldots$

Ao compararmos *duas ou mais potenciações* expressas da forma a^m e, de mesma base, podemos facilmente perceber, sem efetuar os cálculos, quem é maior, bastando para isso verificar qual é o *maior dos expoentes*.

Ex.: $2^5 > 2^3,\ 3^{0,5} > 3^{0,2},\ 10^{\frac{1}{2}} < 10$

Quando tivermos fatores diferentes multiplicando, separadamente, a mesma potência, o maior número será aquele que possuir o *maior fator*.

Ex.: $3 \times 10^4 > 2 \times 10^4\ (3 > 2)$

O modo de escrevermos esses números e, ainda, compará-los, facilita-nos determinar ao que chamamos *ordem de grandeza*.

11.5.2 Definição

Denomina-se *ordem de grandeza* (O.G) a *maior potência de* 10 *mais próxima da grandeza dada.*

Para determinarmos a O.G, temos, entretanto, que seguir os seguintes passos:

1º) colocar o número dado sob a forma de notação científica, ou seja, $a \times 10^m$

2º) se $a \leq 3,1622776\ldots \rightarrow$ O.G $= 10^m$, e, se $a > 3,1622776\ldots \rightarrow$ O.G $= 10^{m+1}$

Obs.:

Na *notação científica* convencionou-se que $1 \leq a < 10$. Como $1 = 10^0$ e $10 = 10^1$, tem-se que $10^0 \leq 10^{\frac{1}{2}} < 10^1$.

Sendo $\dfrac{1}{2}$ a *média aritmética simples* dos graus multiplicativos das potências 10^0 e 10^1, pode-se afirmar que $10^0 < 10^{\frac{1}{2}} < 10^1$. Como $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, então, $a \cong 3,1622776\ldots$

11.6 Exercícios Resolvidos

1) Supondo que cada grão de areia seja uma esfera com $0,05\,mm$ de diâmetro. Qual a *ordem de grandeza* do número de grãos que podem ser colocados em um recipiente equivalente a *um* litro?

Considerar: $\pi \cong 3,14$

1º) Cálculo do número de grãos (nº g)

$$\text{nº } g = \frac{1l}{\frac{4}{3}\pi(R_g)^3} = \frac{1\,dm^3}{\frac{4}{3} \times 3 \times \left(\frac{0,05}{2}\,mm\right)^3} = \frac{1\,000\,000\,mm^3}{\frac{4 \times (5 \times 10^{-2})^3\,mm^3}{8}} =$$
$$= 1,6 \times 10^{10}$$

2º) Como $1,6 < 3,1622776\ldots$, então a O.G é igual a 10^{10} grãos.

2) Admita que $\dfrac{1}{4}$ do volume de um planeta X, esférico, seja constituído apenas de grãos de areia. Calcular a *ordem de grandeza* do número de grãos desse planeta.

Dados:
1º) raio do planeta X: $6.400\,km$
2º) raio de uma esfera qualquer: $\frac{4}{3}\pi R^3$
3º) diâmetro de um grão: $0,05\,mm$

Resolução:

Basta calcularmos $\frac{1}{4}$ do volume desse planeta e dividirmos o resultado pelo volume de 1 (um) grão, portanto:

$$\frac{1}{4} \times \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times (R_X)^3}{\frac{4}{3}\pi (R_g)^3} = \frac{1}{4} \times \frac{(6\,400\,km)^3}{\left(\frac{5}{100}\,mm\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(64 \times 10^8\,mm)^3}{\frac{5^3}{2^3 \times 10^6}\,mm^3} = \frac{1}{4} \times \frac{64^3 \times 10^{24} \times 2^3 \times 10^6}{5^3} =$$

$$= 5,2 \times 10^{33} \Rightarrow \text{O.G.} = 10^{34}$$

11.7 Exercícios Propostos

1) Qual é a ordem de grandeza de 15% do número de mulheres brasileiras?

a) 10^4 b) 10^5 c) 10^6 d) 10^7 e) 10^8

2) A nave espacial "Voyager", lançada para explorar o nosso sistema solar, é a nave mais rápida já fabricada pelo homem, com uma velocidade de $12\,km/s$. Qual a *ordem de grandeza* da distância, em km, percorrida pela nave durante um ano?

a) 10^8 b) 10^9 c) 10^{10} d) 10^{11} e) 10^{12}

3) O resultado final do segundo turno da eleição para a prefeitura do Rio de Janeiro mostrou que 104.119 votos separaram o vencedor da perdedora. Qual a *ordem de grandeza* desse número de votos?

a) 10^4 b) 10^5 c) 10^6 d) 10^7 e) 10^8

4) O rio Amazonas injeta, a cada hora, 680 bilhões de litros de água no oceano Atlântico. Esse volume corresponde a cerca de 17% de toda a água doce que

chega aos oceanos do planeta, no mesmo intervalo de tempo. A *ordem de grandeza* do volume total de água doce, em litros, que chega aos oceanos a cada hora é, então:

a) 10^7 b) 10^9 c) 10^{11} d) 10^{13} e) 10^{14}

5) Foram obtidas as seguintes medidas aleatórias:

I - $3,28 \times 10^3$ m^2
II - $2,89 \times 10^2$ g
III - $8,21 \times 10^4$ cm
IV - $0,0006$ m^3
V - $0,0091$ m^2

As *ordens de grandeza* são, respectivamente:

a) 10^3; 10^2; 10^4; 10^{-5}; 10^{-4}
b) 10^2; 10^2; 10^2; 10^{-5}; 10^{-4}
c) 10^1; 10^1; 10^1; 10^{-5}; 10^{-4}
d) 10^3; 10^2; 10^5; 10^{-5}; 10^{-4}
e) 10^4; 10^2; 10^5; 10^{-3}; 10^{-2}

6) Supondo a terra uma esfera perfeita de raio aproximadamente igual a $6,0 \times 10^6$ m, qual é a *ordem de grandeza* do número de voltas que uma espaçonave daria, se fosse possível viajar à velocidade da luz ($3,0 \times 10^8$ m/s), em $1,0$ seg, em vôo rasante à superfície?

Obs.: Suponha $\pi \cong 3,0$.

a) 10^{-1} b) 10^0 c) 10^1 d) 10^2 e) 10^3

7) A distância média da Lua à Terra é de 384 mil quilômetros. Qual a *ordem de grandeza*, em segundos, do tempo que a luz leva para percorrer esta distância?

Obs.: Velocidade da luz: $3,00 \times 10^8$ m/s.

a) 10^{-6} b) 10^{-3} c) 10^0 d) 10^1 e) 10^3

8) Uma partida de vôlei masculino, no último campeonato mundial, teve duração de 2 horas e 35 minutos. A ordem de grandeza da partida, em segundos, foi de:

a) 10^1 b) 10^2 c) 10^3 d) 10^4 e) 10^5

9) Em $1.967 - 1.968$, a erupção de um vulcão no Havaí, produziu $84 \times 10^6\ m^3$ de lava ao longo de 8 meses. Qual a *ordem de grandeza* da produção mensal média?

a) 10^3 b) 10^4 c) 10^5 d) 10^6 e) 10^7

10) Em 1.969, Lampert e outro cientista mediram a massa seca das partículas do vírus do herpes simples (cadeia 11.140) através de um microscópio eletrônico, onde a região a região central pesou 2×10^{-11} g e o envoltório $1,3 \times 10^{-15}$ g. Qual a *ordem de grandeza* da massa, em gramas, dessas duas partículas?

11) Qual é a *ordem de grandeza* da altura de um indivíduo adulto, em metros?

a) 10^0 b) 10^2 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^4

12) Qual é a *ordem de grandeza* do número de habitantes no Brasil em 2.000?

a) 10^6 b) 10^7 c) 10^8 d) 10^9 e) 10^{10}

13) Qual é a *ordem de grandeza* do número de habitante no planeta Terra no ano 2.000?

a) 10^6 b) 10^7 c) 10^8 d) 10^9 e) 10^{10}

14) A biblioteca de certa Universidade contém 2×10^5 livros. Qual é a *ordem de grandeza*, expressa em metros, do comprimento de prateleiras ocupado pelos livros?

a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4 d) 10^5 e) 10^6

15) Alguns experimentos realizados por virologistas demonstram que um bacteriófago (vírus que parasita e se multiplica no interior de uma bactéria) é capaz de formar 100 novos vírus em apenas 30 minutos. Se introduzirmos 1.000 bacteriófagos em uma colônia suficientemente grande de bactérias, qual será a ordem de grandeza do número de vírus existentes após 2 horas?

a) 10^7 b) 10^8 c) 10^9 d) 10^{10} e) 10^{11}

16) Qual é a *ordem de grandeza*, em *volts*, da tensão disponível nas tomadas da rede elétrica de uma residência?

a) 10^0 b) 10^1 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^4

17) No campeonato mundial de futebol, disputado nos Estados Unidos em 1.994, a *ordem de grandeza* de expectadores presentes em cada um dos jogos do Brasil foi:

a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4 d) 10^5 e) 10^6

18) Cada exemplar de um jornal é lido, em média, por três pessoas. Num grupo de 7.500 leitores, a *ordem de grandeza* da quantidade de exemplares necessários corresponderá a:

a) 10^0 b) 10^1 c) 10^2 d) 10^3 e) 10^4

Respostas

1) e
2) b
3) b
4) d
5) e
6) d
7) c
8) d
9) e
10) 10^{11}
11) a
12) c
13) e
14) c
15) e
16) c
17) d
18) d

Capítulo 12

Razões e Proporções

12.1 Razão

Razão[1] é a *comparação de dois números ou duas grandezas* (numa mesma unidade).

Essa comparação pode ser: por *subtração* ou por *divisão*. As *razões por subtração* são ditas *razões aritméticas*, cujo resultado é uma *diferença* e, as *razões por divisão*, são ditas *razões geométricas*, cujo resultado é um *quociente*.

A razão aritmética tem por objeto saber em quanto um número *excede* outro, e a razão geométrica indica em quantas vezes um número *contém ou está contido* em outro.

Obs.: *A razão aritmética de duas grandezas homogêneas é outra grandeza homogênea, enquanto que a razão geométrica é um número abstrato.*

12.1.1 Notação

$a - b$ ou $a \cdot b$ ...... *razão aritmética*

$\dfrac{a}{b}$ ou $a : b$ ...... *razão geométrica*

Obs.: $a \cdot b$ ou $a : b$, lê-se: a está para b.

Nessas razões a e b são denominados *termos*, onde o a é dito primeiro termo ou *antecedente* e b, segundo termo ou *conseqüente*.

[1] Razão = Ratio = Divisão

Ex$_1$.: Determinar a razão aritmética dos números 5 e 3.

$5 - 3 = 2$, onde 2 é a diferença.

Ex$_2$.: Determinar a *razão geométrica* de $3\,m$ para $5\,m$

$\frac{3\,m}{5\,m} = \frac{3}{5}$ ou $0,6$ (quociente)

Ex$_3$.: Determinar a razão, por divisão, de $2\,dm^3$ para $5\,l$

$\frac{2\,dm^3}{5\,l} = \frac{2\,l}{5\,l} = \frac{2}{5}$ ou $0,4$ (quociente).

12.1.2 Exercícios de Fixação

1) Determine as razões por divisão:

a) 10 e 2

b) 4 e 10

c) 14 e 3

d) 9 e $0,3$

e) $3,6$ e $\frac{3}{5}$

f) $\frac{1}{2}$ e 2

g) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$

h) $\frac{1}{10}$ e 1,2

i) $1,444\ldots$ e $0,222\ldots$

j) $2\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$

k) $3\frac{2}{5}$ e $5\frac{2}{5}$

l) $4,2\,m$ e $32\,cm$

m) $3,5\,m^2$ e $3,5a$

n) $0,725\,m^3$ e $5.000\,dm^3$

Respostas

a) 5

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{14}{3}$

h) $\frac{1}{12}$

i) $\frac{13}{2}$

j) $\frac{15}{2}$

d) 30 **k)** $\frac{17}{27}$

e) 6 **l)** $\frac{105}{8}$

f) $\frac{1}{4}$ **m)** $\frac{1}{100}$

g) $\frac{2}{3}$ **n)** $\frac{29}{200}$

12.2 Escala

É a razão, geométrica, da medida de um desenho para a sua medida real .

12.2.1 Notação

a) escala .... E
b) medida do desenho .... d
c) medida real .... D

De acordo com a definição, temos: $E = \frac{d}{D}$

Ex.: Determinar a escala de uma planta, onde se deseja representar um muro de $5\,m$ deseja-se representar por $5\,cm$.

Resolução:

$E = \frac{d}{D}$

$E = \frac{5\,cm}{500\,cm}$

$E = \frac{1}{100}$

Resp.: $1 : 100$.

12.2.2 Exercícios Propostos

1) Qual deve ser a escala de uma planta de uma parede de $50\,m$, que está representada por um segmento de $5\,cm$?

2) A distância entre a cidade de Petrópolis e Vassouras é de $50\,\text{km}$ e está representada em uma planta por $5\,\text{cm}$. Determine a escala da mesma.

3) A extensão de uma estrada de ferro é de $560\,\text{km}$. Qual foi a escala usada, se a mesma foi representada por $8\,\text{cm}$?

4) Sabe-se que um terreno tem $5.000\,\text{m}^2$. Para representá-lo por um retângulo de $10\,\text{cm}$ por $5\,\text{cm}$, que escala deveremos representar?

5) Quer-se indicar em uma planta a distância real de $820\,\text{m}$ através de um segmento de $37\,\text{cm}$. Qual a escala que deverá ser utilizada?

6) Num mapa, um segmento de $18\,\text{cm}$ está representando uma distância de $18\,\text{km}$. Qual deverá ser a escala desse mapa?

Respostas

1) $1 : 1.000$
2) $1 : 1.000.000$
3) $1 : 7.000.000$
4) $1 : 1.000$
5) $1 : 2.216,2$
6) $1 : 100.000$

12.3 Razões Iguais

Duas ou mais razões, aritmética ou geométrica, dizem-se iguais, quando gerarem o mesmo número ou a mesma grandeza.

Ex.: $6 - 4 = 8 - 6 = 4 - 2 = \cdots = 2$ ou $6 \cdot 4 : 8 \cdot 6 : 4 \cdot 2 = \cdots = 2$.

Ex.: $6 : 2 :: 12 : 4 :: 9 : 3 :: ... = 3$

12.3.1 Teorema

Se duas ou mais razões geométricas forem iguais, a soma de todos os antecedentes está para a soma de todos os conseqüentes, assim como cada antecedente está para o seu respectivo conseqüente.

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = (k)\ ^{2} \qquad \text{........} \quad \text{(I)}$$

[2] $a : c : e : \cdots = b : d : f : \ldots$

$b \times k = a$
$d \times k = c$
$f \times k = e$

Somando-se, membro a membro, as últimas igualdades, teremos:

$b \times k + d \times k + f \times k + \cdots = a + c + e + \ldots$

Colocando-se k em evidência, tem-se:

$k \times (b + d + f + \cdots) = a + c + e + \ldots$

$$k = \frac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots}$$

Substituindo k em (I) convenientemente, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = \frac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots}$$

ou

$$\frac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots \quad \text{c.q.d.}$$

Ex.: Determinar a, b e c, sabendo-se que $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ e $a + b + c = 234$.

Fazendo $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \rightarrow 2k + 3k + 4k = 234$

$9k = 234 \therefore k = 26$

Se, $k = 26 \rightarrow a = 52,\ b = 78$ e $z = 104$.

12.3.2 Exercícios Propostos

1) Calcule os valores de x e y, sabendo que:

a) $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$ e $x + y = 42$.

b) $\frac{5}{8} = \frac{x}{y}$ e $x + y = 52$.

c) $\frac{x}{y} = \frac{7}{2}$ e $x - y = 40$.

d) $\frac{12}{5} = \frac{x}{y}$ e $x - y = 35$.

e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{8}$ e $x + y = 55$.

f) $\dfrac{7}{x} = \dfrac{10}{y}$ e $x + y = 51$.

g) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$ e $x \times y = 54$.

h) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5}$ e $x^2 \times y^2 = 18.225$.

i) $\dfrac{x^2}{5} = \dfrac{y^2}{2}$ e $x^2 - y^2 = 84$.

j) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3}$ e $x^3 + y^3 = 728$.

k) $x - y = 41$ e $\dfrac{x}{y} = \dfrac{56}{15}$.

2) Calcule x, y e z, sabendo que $x + y + z = 40$ e que $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5}$.

3) Sendo $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5}$ e $x \times y \times z = 480$, calcule x, y e z.

4) Sendo $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{7}$ e que $3x + 2y - z = 22$, calcule os valores de x, y e z.

5) Sabendo que $x + 6y + z = 120$ e $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{6}$, calcule x, y e z.

6) Sabe-se que $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{12}$ e que $a \times b \times c = 0,162$. Calcule o valor de a.

7) Calcule x, y e z, sabendo que $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{y} = \dfrac{4}{z}$ e ainda, $x + 2y + 3z = 60$.

8) Sendo $\dfrac{x}{0,666\ldots} = \dfrac{y}{0,1666\ldots} = \dfrac{z}{0,75}$ e que $x + y + z = 38$, calcule x, y e z.

9) Na série de razões $\dfrac{a}{18} = \dfrac{b}{1,5} = \dfrac{x}{y}$, sabe-se que $a + b = 13$ e $y - x = 1$. Calcule $x + y$.

10) Divida 184 em três parte a, b e c tais que, $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3}$ e $\dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{7}$.

11) Sabendo-se que $5xy = 2yz = 8xz$, calcule x, y e z, sendo $x + y + z = 150$.

12) Nas razões $\dfrac{6}{a} = \dfrac{3}{b} = \dfrac{9}{c} = \dfrac{12}{d}$, sabe-se que $3a + b + 2d = 60$. Calcule $a + b + c + d$.

13) Sendo $\frac{3}{a} = \frac{15}{b} = \frac{6}{c} = \frac{9}{d}$ e ainda, $a \times b \times c \times d = 7.680$, qual é o valor de a.

14) Calcule x, y, z e w, sabendo que $\frac{5}{x} = \frac{3}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{w}$ e que $x+y+z+w = 48$.

15) Sendo $\frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} = \frac{d}{12} = \frac{c}{15}$, calcule a, b, c, d e e, sendo que $b+d = 24$.

16) Calcule $x+y+z$, sabendo que $\frac{x}{z-6} = \frac{y}{z-8} = \frac{z}{x-10} = 3$.

a) 24 b) 30 c) 32
d) 36 e) 40

17) Se $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$, onde x, y e z são inteiros positivos e diferentes, então $\frac{x}{y}$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{5}{3}$ e) 2

Respostas

1)

a) 15 **e** 27
b) 20 **e** 32
c) 56 **e** 16
d) 60 **e** 25
e) 15 **e** 40
f) 21 **e** 30
g) 6 **e** 9
h) 9 **e** 15
i) 10 **e** 4
j) 8 **e** 6
k) 4 **e** 10

2) 8; 12 **e** 20

3) 6; 8 **e** 10

4) 8; 6 **e** 14

5) $12; 15$ e 18

6) $0,3$

7) $6; 9$ e 12

8) $16; 4$ e 18

9) 5

10) $40; 60$ e 84

11) $20; 80$ e 50

12) 40

13) 4

14) $15; 9; 21$ e 3

15) $4; 8; 12; 16$ e 20

16) **d**

17) e

12.4 Proporção

É a igualdade de duas ou mais razões.

12.4.1 Proporção Aritmética

É a igualdade de duas ou mais razões aritméticas.

Ex.: $5 - 3 = 8 - 6 = 7 - 5 = \dots$

12.4.2 Proporção Geométrica

É a igualdade de duas ou mais razões geométricas.

Ex$_1$.: $\dfrac{1\,\text{m}}{2\,\text{m}} = \dfrac{4\,\text{m}}{8\,\text{m}}$

Ex$_2$.: $\dfrac{1\,\text{cm}}{3\,\text{cm}} = \dfrac{2\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} = \dfrac{3\,\text{cm}}{9\,\text{cm}}$

12.5 Proporção Contínua

É uma série de razões iguais, aritméticas ou geométricas, em que o conseqüente de cada uma é igual ao antecedente da seguinte.

Exs.: a) $8 - 6 = 6 - 4 = 4 - 2 = \dots$

b) $16 : 8 = 8 : 4 = 4 : 2 = \dots$

Obs.: Quando os *meios* não forem iguais, podemos chamá-la de *descontínua*.

12.6 Estudo das Proporções com Quatro Termos

12.6.1 Proporção Aritmética

É a igualdade de duas razões aritméticas.

$$a - b = c - d \quad \text{ou} \quad a \cdot b : c \cdot d$$

Obs.: Lê-se: a está para b assim como c está para d.

12.6.2 Propriedade Fundamental

Em toda proporção aritmética, a soma dos meios é igual a soma dos extremos ou vice-versa.

Demonstração:

Somando-se $b + d$ aos dois membros da igualdade anterior, teremos:

$(a - b) + (b + d) = (c - d) + (b + d)$, donde:

$a + d = b + c$ .... c. q. d.

12.6.3 Proporção Geométrica

É a igualdade de duas razões geométricas.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a : b :: c : a$$

-os termos a e d são os *extremos* da proporção.

-os termos b e c são os *meios* da proporção.

Obs.:

Ex$_1$.: $\dfrac{8^m}{2^m} = \dfrac{12^m}{3^m}$

Ex$_2$.: $2^{cm} : 4^{cm} :: 4^{cm} : 8^{cm}$

12.6.4 Propriedade Fundamental

Em toda proporção geométrica com quatro termos, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos ou vice-versa.

Se $a : b : c : d \Rightarrow b \times c = a \times d$ ou $a \times d = b \times c$

Ex$_1$.: $\dfrac{1\,m}{2\,m} = \dfrac{2\,m}{4\,m} \Rightarrow 2 \times 2 = 4 \times 1$

Ex$_2$.: $3\,cm : 4\,cm :: 9\,cm : 12\,cm \Rightarrow 4 \times 9 = 3 \times 12$

12.6.5 Exercícios Resolvidos

1) Determinar o valor de x em cada proporção:

a) $4 \cdot x : 8 \cdot 6$

$4 - x = 8 - 6 \Rightarrow x = 2$

b) $x : 2 :: 12 : 3$

$3x = 24 \Rightarrow x = 8$

c) $\dfrac{4-\sqrt{5}}{11} = \dfrac{x}{4+\sqrt{5}}$

$\left(4-\sqrt{5}\right) \times \left(4+\sqrt{5}\right) = 11 \cdot x$

$11 \cdot x = (4)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$

$x = \dfrac{16-5}{11} \rightarrow x = 1$

d) $\left(4+\sqrt{3}\right) \cdot 4 : x \cdot \left(4-\sqrt{3}\right)$

$4 + x = \left(4+\sqrt{3}\right) + \left(4-\sqrt{3}\right)$

$4 + x = 8$

$x = 4$

2) Uma estrada está representada por $15\,cm$, em uma planta cuja escala é $1:20.000$. Determinar o comprimento real dessa estrada, em quilômetros.

Resolução:

Sabemos que $E = \dfrac{d}{D}$

$$\frac{1}{20.000} = \frac{15\,cm}{D}$$

$D = 15\,cm \times 20.000$
$D = 300.000\,cm \therefore D = 3\,km$

3) Numa planta de um edifício em construção, cuja escala é $1:50$, e onde as dimensões de uma sala retangular são $10\,cm$ e $8\,cm$, calcular a área real da sala projetada.

Resolução:

$$E = \frac{d}{D}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{d}{D}$$

$D = 50 \times d$

Para $d = 10\,cm \Rightarrow D_1 = 50 \times 10\,cm \therefore D_1 = 500\,cm = 5\,m$

Para $d = 8\,cm \Rightarrow D_2 = 50 \times 8\,cm \therefore D_2 = 400\,cm = 4\,m$

Sendo S a área real, teremos:

$S = 5\,m \times 4\,m$
$S = 20\,m^2$

4) Um automóvel de $4,5\,m$ de comprimento é representado em uma escala por um modelo de $3\,cm$ de comprimento. Determinar a altura do modelo, que representa na mesma escala, uma casa com $3,75\,m$ de altura.

Resolução:

Em relação ao automóvel, tem-se:

1º) $D = 4,5\,cm$ e $d = 3\,cm$

Se $E = \frac{d}{D} \Rightarrow E = \frac{3\,cm}{4,5\,m}$

$E = \frac{3\,cm}{450\,cm}$

$E = \frac{1}{150}$

2^{o}) Como a altura (h) do modelo é a mesma que a da altura da casa, então podemos escrever que:

$\frac{1}{150} = \frac{h}{3.75\,m}$

$h = \frac{375\,cm}{150}$

$h = 2,5\,cm$

Resp.: A altura será de $2,5\,cm$.

12.6.6 Exercícios Propostos

1) Calcule o valor desconhecido nas seguintes proporções:

a) $\dfrac{x}{26} = \dfrac{8}{13}$

b) $8 : x :: 4 : 15$

c) $\dfrac{10}{6} = \dfrac{x}{3}$

d) $10 : 2 :: 5 : x$

e) $\dfrac{x}{\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5}$

f) $6 : x :: \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{3}$

g) $\dfrac{x}{\frac{3}{8}} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}$

h) $3 : x :: \dfrac{2}{9} : \dfrac{3}{5}$

i) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{x}$

j) $0,4 : 0,03 :: 1,2 : x$

k) $\dfrac{4-x}{3} = \dfrac{4}{6}$

l) $3 : 6 :: 5 : 3x+1$

n) $5 : 3 :: (x+4) : x$

o) $\dfrac{16}{x} = \dfrac{x}{9}$

p) $(x-1) : 4 :: 2 : (x+1)$

q) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{6}{x-2}$

r) $1,28 : (3x-1) :: (3x+1) : 8$

s) $\dfrac{x}{10} = \dfrac{14,4}{2}$

t) $\left(8 + \dfrac{x}{5}\right) : 36 :: (x-14) : 18$

u) $\dfrac{a}{5} = \dfrac{3,1999...}{a}$

v) $\dfrac{1-\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}-1} : \dfrac{7}{8} :: \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} : x$

w) $\dfrac{(2-\sqrt{3})}{x} = \dfrac{3}{2+\sqrt{3}}$

x) $(4+\sqrt{2}.x :: 7 : (4\sqrt{2})$

y) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \dfrac{5-\sqrt{21}}{x}$

m) $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{5}{3x-1}$

z) $(9-x)^2 : (9+x)^2 :: 4 : 16$

Respostas

a) 16
b) 30
c) 5
d) 1
e) $\frac{4}{25}$
f) $\frac{16}{3}$
g) $\frac{9}{20}$
h) $\frac{81}{10}$
i) $\frac{5}{18}$
j) $0,09$
k) 2
l) 3
m) 7
n) 6
o) 12
p) 3
q) 4
r) 5
s) 72
t) 20
u) 4
v) $\dfrac{7}{16}$
w) $\dfrac{1}{3}$
x) 2
y) 2
z) 3

2) Calcule x nas seguintes proporções:

a) $x \cdot 4 : 6 \cdot 2$

b) $6 \cdot x : 9 \cdot 6$

c) $8 \cdot x : x \cdot 6$

d) $7 \cdot 4 : 12 \cdot x$

e) $x \cdot \frac{1}{2} : \frac{3}{2} \cdot 1$

f) $x \cdot 0,222\ldots 3 \cdot 0,777\ldots$

g) $(x-2) \cdot 4 : 6 \cdot (x+2)$

Respostas

a) 8
b) 6
c) 7
d) 9
e) 1
f) $\frac{22}{9}$
g) 7

3) O comprimento de uma sala mede $7,5\,\mathrm{m}$ e a largura $67,5\,\mathrm{dm}$. A razão entre a largura e o comprimento, é igual a:

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{10}{9}$ c) 0,25 d) $\frac{1}{9}$

4) A razão por divisão dos números a e b é 1,6. A razão de b para a é igual a:

a) $1,6$ b) $6,1$ c) $0,25$ d) 0,625

5) Numa planta elaborada na escala de $\frac{1}{100}$, a sala de jantar está com as seguintes dimensões: $5,8\,\mathrm{cm}$ e $0,75\,\mathrm{dm}$. Calcule a área da sala considerando o seu tamanho natural.

6) Quantos ladrilhos de $49\,\mathrm{cm}^2$, serão necessários para ladrilhar uma sala quadrada de $9,8\,\mathrm{cm}^2$ na escala de $\frac{1}{1.000}$?

7) Em um mapa de escala $1 : 7.500.000$, a distância entre duas cidades é de $10\,\mathrm{cm}$. Qual será a escala de um outro mapa, no qual estas mesmas cidades distem $2\,\mathrm{cm}$ entre si?

8) Num desenho cuja escala é $1 : 500$, tem-se um comprimento de $9\,\mathrm{cm}$, que no natural mede 45 metros. Calcule, em centímetros, o mesmo comprimento do desenho na escala $1 : 200$.

9) Numa planta na escala $1 : 1.000$, que dimensões (em m) devem ser atribuídas, a um compartimento de $5\,\mathrm{cm}$ por $6\,\mathrm{cm}$?

10) Qual o comprimento que devemos representar numa planta, cuja escala é $1 : 10.000$, uma rua de $800\,\mathrm{m}$ de comprimento?

11) Qual o comprimento que devemos representar uma avenida de $3\,\mathrm{km}$ de comprimento, ao desenhar a planta de um bairro, na escala de $1:10.000$?

12) Num mapa, uma rua mede $43\,\mathrm{cm}$. Calcule o comprimento natural da rua, sabendo-se que o mapa foi desenhado na escala de $1:1.000$.

13) Um dormitório quadrado de $4,5\,\mathrm{m}$ de lado, deve ser desenhado em uma planta, cuja escala é $1:100$. Qual deverá ser a sua dimensão?

14) Num mapa, a distância entre dois pontos é de $7,5\,\mathrm{cm}$. Sabendo-se que o mesmo foi desenhado na escala de $1:3.000.000$, qual, em km, a distância real?

15) Num mapa, cuja escala é de $1:5.000$, a distância entre dois pontos é $5\,\mathrm{cm}$. Calcule a distância real em metros.

16) A distância entre duas estações ferroviárias na planta de uma cidade, cuja escala é $1:8.000$, é de $15\,\mathrm{cm}$. Determine a distância real (em quilômetros) entre as duas estações.

17) Na planta de um apartamento cuja escala é $1:50$, um quarto tem $5\,\mathrm{cm}$ de largura e $7\,\mathrm{cm}$ de comprimento. Determine as dimensões naturais do quarto, em metros.

18) Um muro de $17,1\,\mathrm{m}$ está representado num desenho na escala $1:90$. O comprimento do muro desenhado, é:

a) $9\,\mathrm{m}$ b) $9\,\mathrm{cm}$ c) $19\,\mathrm{cm}$ d) $19\,\mathrm{m}$ e) $19\,\mathrm{dm}$

19) Calcule $\dfrac{3}{5}$ da área de um terreno, que na escala de $1:300.000$ tem $1,5\,\mathrm{dm}$ de largura por $20\,\mathrm{cm}$ de comprimento.

Obs.: Dê resposta em m^2

20) Uma fotografia foi ampliada, obedecendo a escala de $1/4$. Qual a superfície da nova fotografia se a primitiva tinha $15\,\mathrm{cm}$ de largura por $1,8\mathrm{dm}$ de comprimento?

21) Qual a distância entre Goiás e Anápolis, sabendo-se que num mapa do Estado de Goiás, cuja a escala é $1:10.000.000$, essa distância é representada por $1,5\,\mathrm{cm}$?

22) Um mapa geográfico foi desenhado na escala $1 : 2.000$. Qual o comprimento no desenho que representa $25\,m$ do terreno?

a) $1\,cm$ b) $1,25\,cm$ c) $1,5\,cm$ d) $1,75\,cm$ e) $2,5\,cm$

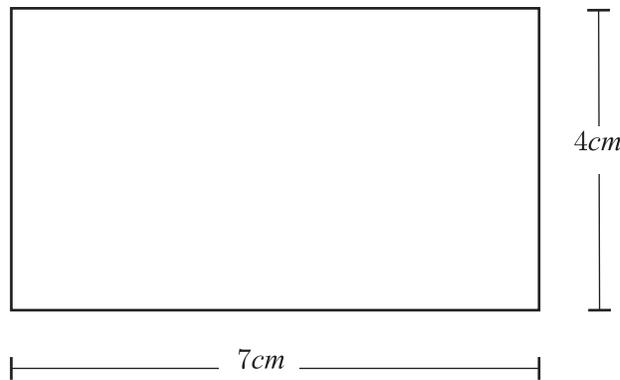
23) Uma distância de $8\,km$ no terreno, corresponde num mapa construído na escala $1 : 100$ ao comprimento de:

a) $0,08\,m$ b) $0,8\,m$ c) $8\,m$ d) $80\,m$ e) $800\,m$

24) Num mapa de escala $1 : 2.000.000$, a distância entre duas cidades é de $10\,cm$. Qual a distância entre as cidades?

a) $10\,km$ b) $20\,km$ c) $100\,km$ d) $200\,km$

25) Um prédio está desenhado na escala $1 : 50$. Qual é o perímetro e a área de uma sala, que no desenho mede $8\,cm \times 6\,cm$?

26) A figura seguinte representa a planta de uma sala e foi desenhada na escala $1 : 100$. A área da sala é:

a) $20\,m^2$ b) $28\,m^2$ c) $2.850\,m^2$ d) $28,5\,m^2$ e) $80,4\,m^2$

27) A partir de 1987, a Força Aérea Brasileira concebeu o primeiro avião AMX. Em prospecto de divulgação do projeto, os responsáveis pela construção desse avião, desenharam um modelo na escala $1 : 40$, onde o comprimento e a altura são, respectivamente, $34\,cm$ e $11,5\,cm$. O comprimento e a altura reais do AMX são, nessa ordem:

a) $13,06\,m$ e $4,06\,m$

b) $13,60\,m$ e $4,60\,m$
c) $34 \times 10^{-1}\,m$ e $11,5 \times 10^{-1}\,m$
d) $1360\,dm$ e $460\,dm$
e) $34\,m$ e $11,5\,m$

28) Numa carta geográfica, a distância entre as cidades A e B é de $10\,cm$. A distância real entre elas é de $500\,km$. Qual é a escala da carta?

a) $1 : 100.000$ b) $1 : 500.000$ c) $1 : 1.000.000$ d) $1 : 5.000.000$

29) Qual a maior escala em que poderá ser desenhado um quadrado com $68,75\,m$ de lado, num papel retangular que mede $55\,cm$ por $65\,cm$?

30) A planta de um edifício foi desenhada na escala $1 : 250$. Qual a área (em metros quadrados) de uma sala de formato retangular, em cuja planta está representado por $4\,cm \times 6\,cm$?

31) A miniatura de um foguete balístico foi desenhada na escala $1 : 400$, e o comprimento real do foguete é $116\,m$. Qual é, em centímetros, o comprimento do mesmo em miniatura?

Respostas

3) a
4) d
5) $43,5\,m^2$
6) 200
7) $1 : 375.000.000$
8) $22,5\,cm$
9) $50\,m$ e $60\,m$
10) $8\,m$
11) $30\,cm$
12) $430\,m$
13) $4,5\,cm$
14) $225\,km$
15) $250\,m$
16) $1,2\,km$
17) $2,5\,m$ e $3,5\,m$
18) d

19) $2.700\,km^2$
20) $1.620\,km^2$
21) $150\,km$
22) b
23) b
24) d
25) $14\,m$ e $12\,m^2$
26) b
27) b
28) d
29) $1 : 125$
30) $150\,m^2$
31) $29\,cm$

12.7 Proporção Contínua com Quatro Termos

É toda proporção cujos meios ou extremos são iguais.

$a \cdot b : b \cdot d$ ou $a \cdot b : c \cdot a$
$a : b :: b : d$ ou $a : b :: c : a$

Exemplos

a) $6 - 4 = 4 - 2$
b) $2 : 6 :: 6 : 18$

12.8 Média Diferencial

É o termo igual de uma proporção aritmética contínua.

De acordo com a definição, se a e b são dois números dados, podemos ter:

$a \cdot x : x \cdot b$ ou $x \cdot a : b \cdot x$, portanto:

$x + x = a + b$

$2 \cdot x = a + b \therefore x = \dfrac{a + b}{2}$

Vê-se que a *média diferencial* é igual a *semi-soma* dos outros dois termos.

12.9 Média Proporcional

É o termo igual de uma proporção geométrica contínua.

De acordo com a definição e supondo a e b duas grandezas, tem-se:

$a : x :: x : b$

Aplicando a propriedade fundamental, teremos:

$x^2 = a \times b \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a \times b}$

Vê-se que a *média proporcional* é igual a raiz quadrada do produto obtido entre as grandezas dadas.

Ex.: Determinar a média proporcional entre $4\,cm$ e $9\,cm$.

$x = \sqrt{4\,cm \times 9\,cm} \Rightarrow x = \sqrt{36\,cm^2} \therefore x = 6\,cm$

12.10 Terceira Proporcional

É cada um dos termos não iguais de uma proporção contínua.

Supondo a e b dois números ou duas grandezas, temos então dois casos a considerar:

1º) caso: A proporção é aritmética

Se $a - b = b - x \rightarrow x - b = b - a \therefore x = 2b - a$

2º) caso: A proporção é geométrica

Se $a : b :: b : x \rightarrow x : b :: b : a \therefore x = \dfrac{b^2}{a}$

Exemplos

1) Determinar a *terceira proporcional aritmética* dos números 6 e 4.

$6 - 4 = 4 - x$
$6 + x = 4 + 4 \Rightarrow x = 8 - 6 \therefore x = 2$

2) Determinar a terceira proporcional geométrica entre $4\,m$ e $6\,m$.

$4\,m : 6\,m :: 6\,m : x$
$4\,m \cdot x = 6\,m \times 6\,m$
$x = \dfrac{36\,m^2}{4\,m}$
$x = 9\,m$

12.11 Quarta Proporcional

É o quarto termo de uma proporção não contínua.

Supondo a, b e c três números ou três grandezas dadas, a quarta proporcional nessa ordem, será:

a) $a - b = c - x$, se a proporção for aritmética;
b) $a : b :: c : x$, se a proporção for geométrica.

Exemplos

1) Determinar a quarta proporcional "aritmética" dos números $8; 6$ e 4.

$8 - 6 = 4 - x$
$8 + x = 6 + 4$
$x = 10 - 8$
$x = 2$

2) Determinar a quarta proporcional "geométrica" das grandezas: $2\,m$, $3\,m$ e $4\,m$.

$2\,m : 3\,m :: 4\,m : x$
$2\,m \cdot x = 3\,m \cdot 4\,m$
$x = \dfrac{12\,m^2}{2\,m}$
$x = 6\,m$

12.12 Relações entre Grandezas

É o resultado da comparação (por divisão) da medida de uma grandeza, com outra tomada como unidade.

Dentre as relações importantes temos:

a) Velocidade média (V_m)
É a relação da variação da distância (Δs) *percorrida por um móvel, pelo tempo levado para percorrê-la* (Δt).

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

b) Massa específica (μ)
É a relação da massa (M) *para o volume* (V).

$$\mu = \frac{M}{V}$$

c) Peso específico (ρ)
É a relação do peso (P) *para o volume* (V).

$$\rho = \frac{P}{V}$$

d) Vazão (Q)
É a relação do volume (V), *pelo tempo* (t).

$$Q = \frac{V}{t}$$

e) Pressão (p)
É a relação da força ($\vec{F}$) *peso para a área.*

$$p = \frac{\vec{F}}{A}$$

12.13 Exercícios Propostos

1) Determine a média diferencial dos números:

a) 3 e 4;
b) $4,7$ e $3,3$
c) $0,(1)$ e $0,(8)$
d) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$

2) Calcule a terceira proporcional "aritmética"dos números:

a) 2 e 3;
b) $3,1$ e $4,3$

3) Calcule a quarta proporcional "aritmética"dos números:

a) $6; 4$ e 2;
b) $a; b$ e c

4) Calcule a densidade, em g/cm^3, sabendo que:

a) $m = 4\,kg$ e $v = 0,5\,m^3$
b) $m = 6t$ e $v = 1,5\,m^3$
c) $m = 18\,kg$ e $v = 36\,l$

5) *Trinta e seis litros* de um líquido pesam $18\,g$. Calcule a densidade desse líquido em g/cm^3.

6) Determine a vazão em l/s, sendo:

a) $V = 1\,m^3$ e $t = 5\,s$
b) $V = 100\,dm^3$ e $t = 20\,s$
c) $V = 1.000\,cm^3$ e $t = 4\,s$

7) Um tanque tem duas torneiras para enchê-lo. A primeira tem uma vazão de 6 litros por minuto e a segunda, de 4 litros por minuto. Se *metade* do tanque é enchida pela $1^{\underline{a}}$ torneira num certo tempo t_1 e o restante pela segunda em certo tempo t_2, qual deveria ser a vazão, em litros, por minuto, de uma única torneira para encher completamente o tanque no tempo $t_1 + t_2$?

a) $4,5$ b) $4,8$ c) $5,0$
d) $5,2$ e) $5,8$

8) Uma torneira enche um tanque de capacidade "p" à razão de "q" litros por minuto e uma outra o esvazia à razão de "r" litros por minuto. Se o tanque estiver cheio e abrirmos as duas, quantos minutos levarão para esvaziá-lo?

a) $\dfrac{p}{r-q}$ b) $\dfrac{p-q}{r}$ c) $\dfrac{p}{q-r}$
d) $\dfrac{r-p}{q}$ e) $\dfrac{r-1}{p}$

Respostas

1)

a) $3,5$
b) $4,0$
c) $0,5$
d) $0,14666\ldots$

2)

a) 4
b) $5,8$

3)

a) 0
b) $b+c-a$

4)

a) $0,008\,g/cm^3$
b) $4\,g/cm^3$
c) $0,5\,g/cm^3$

5) $0,005\,g/cm^3$

6)

a) $200\,l/s$
b) $5\,l/s$
c) $0,5\,l/s$

7) **b**

8) **a**

Capítulo 13

Divisão Proporcional e Regra de Sociedade

13.1 Divisão Proporcional

Duas sucessões biunívocas de números ou grandezas:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \text{ e } B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$

são ditas:

a) *diretamente proporcionais*[1], quando:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

b) *inversamente proporcionais*, quando:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}} = \cdots = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}$$

ou simplesmente $a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = a_3 \times b_3 = \cdots = a_n \times b_n$.

Essas razões geram, independentemente, um número k denominado de *constante* ou *coeficiente de proporcionalidade*.

Ex$_1$.: As sucessões biunívocas $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$ são diretamente proporcionais, pois, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ e $k = \frac{1}{2}$

[1] Ou simplesmente proporcionais.

Obs.: Se uma grandeza A for diretamente proporcional à outra B, podemos escrever:

$$\frac{A}{B} = k \text{ ou simplesmente } A = k \cdot B$$

Ex$_2$.: As sucessões biunívocas $A = \{2, 4, 10\}$ e $B = \{10, 5, 2\}$ são inversamente proporcionais, pois $2 \times 10 = 4 \times 5 = 10 \times 2$ e $k = 20$

Obs.: Se uma grandeza A for inversamente proporcional à outra B, podemos escrever:

$$A \times B = k, \ \frac{A}{\frac{1}{B}} = k \text{ ou simplesmente } A = k \cdot \frac{1}{B}$$

13.2 Propriedades

$1^{\underline{a}}$) *Quando uma grandeza* A *for proporcional a duas outras* B *e* C*, ou mais, será também proporcional ao produto dessas outras.*

- Seja a o valor da grandeza A, quando B e C assumirem os valores b e c.
- Seja a' o valor da grandeza A, quando B e C assumirem os valores b' e c'.
- Seja também a'' o valor da grandeza A, quando B e C assumirem os valores b' e c, respectivamente:

Assim sendo, teremos:

$A \quad B \quad C$

$a \quad b \quad c$ .... (I)

$a' \quad b' \quad c'$ .... (II)

$a'' \quad b' \quad c$ .... (III)

Comparando (I) com (III), teremos:

$$\frac{a}{a''} = \frac{b}{b'} \quad \text{........} \quad \text{(IV)}$$

Comparando (III) com (II), teremos:

$$\frac{a''}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{........} \quad \text{(V)}$$

Multiplicando membro a membro, (IV) e (V), teremos:

$$\frac{a}{a''} \times \frac{a''}{a'} = \frac{b}{b'} \times \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b \times c}{b' \times c'}$$ ou ainda,

$$\frac{a}{b \times c} = \frac{a'}{b' \times c'}$$

2ª) *Quando duas grandezas* A *e* B *forem proporcionais a* a *e* a' *e* b *e* b'*, ao mesmo tempo, elas serão proporcionais aos produtos* $a \times b$ *e* $a' \times b'$*, respectivamente.*

Seja uma terceira grandeza C proporcional a a e a', simultaneamente, quando as duas primeiras A e B forem a b e b' também, portanto:

$A \quad a \quad b$ .... (I)

$B \quad a' \quad b'$ .... (II)

$C' \quad a \quad b'$ .... (III)

Comparando (I) com (II), teremos:

$$\frac{A}{C} = \frac{b}{b'} \quad .... \quad (IV)$$

Comparando (III) com (II), teremos:

$$\frac{C}{B} = \frac{a}{a'} \quad .... \quad (V)$$

Multiplicando (IV) por (V), vem:

$$\frac{A}{C} \times \frac{C}{B} = \frac{b}{b'} \times \frac{a}{a'} \text{ ou } \frac{A}{B} = \frac{a \times b}{a' \times b'} \text{ ou ainda } \frac{A}{a \times b} = \frac{B}{a' \times b'} \quad ... \quad \text{c.q.d.}$$

13.3 Divisão em Partes Diretamente Proporcionais

Dividir um número ou uma grandeza N em partes diretamente proporcionais a $a, b, c, \ldots$ significa determinar $x, y, z, \ldots$, tais que:

$$\begin{cases} x + y + z + \cdots = N \quad ...... \quad (I) \\ \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \; ..... \quad (II) \end{cases}$$

- Cálculo de $x, y, z, \dots$

Aplicando 1.3.2 em (II), podemos escrever que:

$\dfrac{x+y+z+\cdots}{a+b+c+\cdots} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} =$ ..... e fazendo $x+y+z+\cdots = N$, teremos:

$\dfrac{N}{a+b+c+\cdots} = \dfrac{x}{a}$ ou $x = \dfrac{N}{a+b+c+\cdots} \times a$ ..... (III)

$\dfrac{N}{a+b+c+\cdots} = \dfrac{y}{b}$ ou $y = \dfrac{N}{a+b+c+\cdots} \times b$ ..... (IV)

$\dfrac{N}{a+b+c+\cdots} = \dfrac{z}{c}$ ou $z = \dfrac{N}{a+b+c+\cdots} \times c$ ..... (V)

Fazendo $\dfrac{N}{a+b+c+\cdots} = k$, teremos:

$x = k \times a$
$y = k \times b$
$z = k \times c$
$\vdots$

Ex.: Desejando dividir R\$117,00 entre os três artilheiros de um time de futebol de salão, um técnico definiu que a mesma fosse diretamente proporcional ao número de gols. Sabendo-se que os artilheiros fizeram $2, 3$ e 4 gols, respectivamente, calcular a parte que recebeu cada um.

Resolução:

Chamando de x, y e z a parte de cada um, tem-se:

$x = \dfrac{117}{2+3+4} \times 2; \quad k = \dfrac{117}{9} = 13$

$x = k \times 2 \rightarrow x = 13 \times 2 \therefore x = \text{R\$ } 26,00$

$y = k \times 3 \rightarrow y = 13 \times 3 \therefore y = \text{R\$ } 39,00$

$z = k \times 4 \rightarrow z = 13 \times 4 \therefore z = \text{R\$ } 52,00$

13.4 Divisão em Partes Inversamente Proporcionais

Dividir um número, ou uma grandeza N*, em várias partes* $x, y, z, \dots$ *inversamente proporcionais a* $a, b, c, \dots$ *significa obter* $x, y, z, \dots,$ *tal que:*

$$\begin{cases} x + y + z + \cdots = N \\ \dfrac{x}{\frac{1}{a}} = \dfrac{y}{\frac{1}{b}} = \dfrac{z}{\frac{1}{c}} = \ldots \end{cases}$$

- Cálculo de $x, y, z, \ldots$

De modo análogo ao que foi desenvolvido em (13.3), chegaremos à conclusão que:

$$x = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots} \times \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots} \times \frac{1}{b}$$

$$z = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots} \times \frac{1}{c}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Fazendo $\dfrac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots} = k$, teremos:

$$x = k \times \frac{1}{a}$$

$$y = k \times \frac{1}{b}$$

$$z = k \times \frac{1}{c}$$

$$\vdots$$

Ex$_1$.: Ao dividir R\$234,00 entre seus três filhos, um pai o fez inversamente proporcional às idades de cada um. Sabendo-se que as idades eram $2, 3$ e 4 anos, calcular a parte de cada um.

Resolução:

Designando as partes de cada um por x, y e z, tem-se:

$$x = \frac{234}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \times \frac{1}{2}; \quad k = \frac{234}{\frac{11}{12}} = 108$$

$$x = k \times \frac{1}{2} \to x = 108 \times \frac{1}{2} \therefore x = \text{R\$ } 54,00$$

$y = k \times \frac{1}{3} \rightarrow y = 108 \times \frac{1}{3} \therefore y = \text{R\$ } 36,00$

$z = k \times \frac{1}{4} \rightarrow z = 108 \times \frac{1}{4} \therefore z = \text{R\$ } 27,00$

Ex$_2$.: Para incentivar com a quantia de R$600,00 três jogadores A, B e C, o presidente de um Clube determinou que a mesma fosse diretamente proporcional ao número de gols e inversamente proporcional ao número de faltas. Sabendo-se que A, B e C fizeram, 2, 3 e 4 gols, e 4, 2 e 3 faltas, respectivamente, calcular, em reais, quanto receberá cada um deles.

Resolução:

De acordo com os dados, pode-se escrever que:

$$k = \frac{600}{2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3}} \Rightarrow k = \frac{600}{\frac{2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}} \therefore k = 180$$

Portanto: $A = 180 \times \frac{1}{2} = 90$; $B = 180 \times \frac{3}{2} = 270$ e $C = 180 \times \frac{4}{3} = 240$

Resp.: $A = \text{R\$ } 90,00$, $B = \text{R\$ } 270,00$ e $C = \text{R\$ } 240,00$

13.5 Exercícios Resolvidos

1) Uma grandeza x é diretamente proporcional à grandeza y, e assume o valor 40 quando y for 8. Achar o valor de x para y igual a 12.

Resolução:

1º) $x = k \cdot y \Rightarrow 40 = k \cdot 8 \therefore k = 5$

2º) $x = 5 \times 12 \therefore x = 60$

2) Uma grandeza y é inversamente proporcional à grandeza x, e quando x for 4 o valor de y é 48. Determinar y para x igual a 10.

Resolução:

1º) $y = \frac{k}{x} \Rightarrow 48 = \frac{k}{4} \therefore k = 192$

2º) $y = \frac{192}{10} \therefore y = 19,2$

3) Uma grandeza x varia diretamente proporcional em relação à grandeza y e inversamente proporcional à grandeza z. Quando y for 15 e z for 6, x assume o valor 10. Calcular o valor de x para z igual a 2.

Resolução:

1º) $x = k \cdot \dfrac{y}{z}$

$$10 = \frac{k \times 15}{6} \Rightarrow k = 4$$

2º) $x = \dfrac{4 \times 8}{2} \therefore x = 16.$

4) Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B e C, e A recebe o valor 9 quando B e C forem, respectivamente, 5 e 7. Determinar o valor de A, quando B for igual a 3 e C for igual a 2.

Resolução:

1º) $A = k \times B \times C$

$$9 = k \times 5 \times 7 \Rightarrow k = \frac{9}{35}$$

$$A = \frac{9}{35} \times 3 \times 2 \therefore A = \frac{54}{35}\cdot$$

5) Escrever a sentença seguinte, utilizando a constante k:

"A força de atração $\vec{F}$ entre duas massas m_1 e m_2 varia diretamente proporcional ao produto dessas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre elas".

Resolução:

De acordo com a sentença podemos simplesmente escrever:

$$\vec{F} = k \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}\cdot$$

6) Uma grandeza X é diretamente proporcional às grandezas P e T, e inversamente proporcional ao quadrado da grandeza W. Quando aumentarmos a grandeza P de 60% e diminuirmos a grandeza T de 10%, haverá uma variação na grandeza W. Determinar essa variação.

Resolução:

De acordo com o enunciado podemos escrever:

$X = k \times \dfrac{P \times T}{W^2}$ .... (I)

$X = k \times \dfrac{1,6 \times P \times 0,9 \times T}{(W \times \alpha)^2}$

$X = k \times \dfrac{1,44 \times P \times T}{(W^2 \times \alpha^2)}$ .... (II)

Para que (I) seja igual a (II), devemos ter:

$\alpha^2 = 1,44 \therefore \alpha = 1,2$

Como W foi multiplicado por α , teremos:

$W \times 1,2 = W + 0,2W = W + 20\% \times W.$

Portanto, a grandeza W aumenta de 20%.

13.6 Exercícios Propostos

1) Para cada sentença, escreva a equação empregando a constante k de proporcionalidade:

a) O comprimento C de uma circunferência varia diretamente proporcional ao seu diâmetro d;

b) Uma força constante $\vec{F}$ atuando sobre um corpo, produz uma aceleração a que é diretamente proporcional a sua força e é inversamente proporcional à massa m do corpo;

c) O período T de vibração de um pêndulo é diretamente proporcional à raiz quadrada de seu comprimento l;

d) A intensidade I de uma onda sonora, varia proporcionalmente ao quadrado da freqüência n, ao quadrado de amplitude r, à velocidade v do som e à densidade d de um meio sem interferência;

e) O calor H desenvolvido por um condutor de resistência R *ohms*, por onde passa uma corrente de I *ampéres*, varia diretamente proporcional ao quadrado da corrente, à resistência do condutor e ao tempo t de duração que o condutor puxa a corrente.

f) À temperatura constante, o volume V e a massa dada de um gás ideal, variam inversamente proporcional à pressão p à qual o gás é submetido.

2) Uma grandeza M é inversamente proporcional a N. Sabe-se que quando $N = 9$, o valor de M é 28. Quanto valerá N, se $M = 42$?

3) Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais. Quando o valor de x for $1,5$, o valor de y é $2,4$. Se o valor de x for 2, qual será o valor correspondente a y?

4) A pressão do vento sobre um veleiro varia diretamente proporcional a área da vela, assim como ao quadrado da velocidade do vento. A pressão em $1\,m^2$ é igual a 1 libra quando a velocidade for 16 milhas por hora. Qual será a velocidade do vento, quando a pressão numa "vela"de $9\,m^2$ for 36 libras?

5) Seja y a soma de duas partes: uma proporcional a x e a outra proporcional a $\frac{1}{x^2}$. Sabe-se que para $x = 1$, $y = 6$, e que para $x = 2$, $y = 5$. Determine o valor de y para $x = \frac{1}{2}$.

6) Divida o número 930 em partes que sejam, ao mesmo tempo, diretamente proporcionais aos números $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{2}$, e inversamente proporcionais aos números $2, 4$ e 1, respectivamente.

7) Sabendo-se que a, b e c são inversamente proporcionais a $3, 4$ e 5, respectivamente, e que $a + b = 70$, calcule $a - b + c$.

8) Dividindo-se 660 em partes inversamente proporcionais aos números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, obtém-se que números?

9) Dividindo-se o número 316 em partes diretamente proporcionais a $11; 9$ e $7, 5$, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais a $18, 12$ e 9, respectivamente, qual é a diferença entre a parte maior e a menor?

10) Em uma sociedade de três irmãos a, b e c, os capitais que cada um investiu são diretamente proporcionais aos números $2, 3$ e 5, respectivamente. Se, no final de 1 mês, a sociedade apresentar um lucro de $R\$1.000.000, 00$, qual será o lucro daquele que investiu menos?

11) Certo concreto é obtido misturando-se uma parte de cimento, dois de areia e quatro de pedra. Qual será (em m^3) a quantidade de areia a ser empregada, se o volume a ser concretado é 378 m^3?

12) Divide-se R\$105,00 em três partes a, b e c, que são diretamente proporcionais a $3, 2$ e 5, e inversamente proporcionais a $5, 3$ e 6, respectivamente. Qual é a menor dessas partes?

13) A herança de R\$30.000,0 deve ser repartida entre Antonio, Bento e Carlos. Cada um deve receber em partes diretamente proporcionais a $3, 5$ e 6, respectivamente, e inversamente proporcionais às idades de cada um. Sabendo-se que Antonio tem 12 anos, Bento tem 15 e Carlos 24, qual será a parte recebida por Bento?

14) Os números x, y e z são diretamente proporcionais a a, b e c, onde $x < y < z$. Sabe-se que o maior é a soma dos outros dois e que o menor é *um quinto* do maior. Assim sendo x, y e z são, nessa ordem, diretamente proporcionais a que números?

15) Um conjunto P é formado por três elementos respectivamente proporcionais a $2, 3$ e 7. Sabendo-se que o menor mais o triplo do maior, menos o dobro do outro, é igual a 34, qual é a soma desses três elementos?

16) Sendo $x+y+z = 201$, onde x é diretamente proporcional a 2 e inversamente proporcional a 5; y é diretamente proporcional a e z inversamente proporcional a $\dfrac{1}{2}$, qual é o menor desses números?

17) Uma herança P foi dividida por dois herdeiros com idades iguais a n e m, em partes diretamente proporcionais ao quadrado de suas idades. Qual foi a parte da herança recebida pelo herdeiro de idade n?

18) Suponha que s varie diretamente com t e inversamente com r^2. Se $s = 5$, então $r = 1$ e $t = 2$. Qual é o valor de s quando $r = \sqrt{3t}$?

19) Se q varia diretamente a $\sqrt{h}$ e h varia inversamente a j^3, então q varia inversamente a j^n. Qual é o valor de n?

20) Suponha que y varie diretamente com o quadrado de x e inversamente com a raiz quadrada de z, e $y = 20$ quando $x = 4$ e $z = 9$. Ache y quando $x = 5$ e $z = 16$.

21) Se w varia diretamente a x, y e ao quadrado de z, que variação ocorre com x quando w, y e z forem multiplicados por 2?

22) A resistência elétrica de um fio varia diretamente ao seu comprimento e inversamente ao quadrado do seu diâmetro. Se um fio for reposto por outro do mesmo tipo, cujo comprimento seja 60% maior e cujo diâmetro seja 20% menor, então, a resistência do segundo fio é quantas vezes a resistência do primeiro?

23) A força (F) de atração de um planeta sobre seu satélite varia proporcionalmente à massa (M) do planeta e inversamente proporcional ao quadrado da distância (D). O quadrado do tempo (T) de uma revolução de um satélite varia proporcionalmente à distância (D) e inversamente proporcional à força da atração (F). De acordo com essas afirmações, ache o tempo de uma revolução de uma das luas de Júpiter, cuja distância desse planeta á igual à distância de nossa Lua à Terra, como 35 está para 31.

Obs.: A massa de Júpiter é 343 vezes a da Terra, e o período de revolução da lua terrestre é de 27 dias.

Respostas

1)

a) $C = k \times d$

b) $a = k \times \frac{\vec{F}}{m}$

c) $T = k\sqrt{l}$

d) $I = kn^2r^2vd$

e) $H = kI^2Rt$

f) $V = k \times \frac{1}{p}$

2) $3,2$

3) 32

4) $32m.p.h$

5) 17

6) $300; 180$ e 450

7) 34

8) $30; 20$ e 10

9) 6

10) R$200.000, 00; R$300.000, 00 **e** R$500.000, 00

11) $108\,m^3$

12) R$30, 00

13) R$12.000, 00

14) 1; 4 **e** 5

15) 24

16) 36

17) $\dfrac{Pn^2}{m^2+n^2}$

18) $\dfrac{5}{9}$

19) $\dfrac{3}{2}$

20) $\dfrac{375}{16}$

21) Ficará dividido por 4**.**

22) $\dfrac{5}{2}$

23) 1 **dia e** 18 **minutos.**

13.7 Regra de Sociedade

Ao constituir uma *sociedade de capitais*, os componentes da mesma devem, inicialmente, definir a divisão dos lucros ou prejuízos, que provavelmente haverá após certo período (ano(s), mês (es), dia(s)).

A divisão proporcional dá-nos condição de determinar as partes $x, y, z, \ldots$ de um certo numerário N a ser dividido. Analisemos as hipóteses e o cálculo das mesmas:

1ª hipótese: Capitais diferentes $(C_1, C_2, C_3, \ldots)$ durante o mesmo tempo (t)

$$x = \frac{N}{C_1 \times t + C_2 \times t + C_3 \times t \ldots} \times C_1 \times t \text{ ou } x = \frac{N}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots} \times C_1$$

$$y = \frac{N}{C_1 \times t + C_2 \times t + C_3 \times t \ldots} \times C_2 \times t \text{ ou } y = \frac{N}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots} \times C_2$$

$$z = \frac{N}{C_1 \times t + C_2 \times t + C_3 \times t \dots} \times C_3 \times t \text{ ou } z = \frac{N}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots} \times C_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

2ª hipótese: Capitais iguais ($C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C$) e tempos diferentes ($t_1 \neq t_2 \neq t_3, \dots$)

$$x = \frac{N}{C \times t_1 + C \times t_2 + C \times t_3 + \dots} \times C \times t_1 \text{ ou } x = \frac{N}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots} \times t_1$$
$$y = \frac{N}{C \times t_1 + C \times t_2 + C \times t_3 + \dots} \times C \times t_2 \text{ ou } y = \frac{N}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots} \times t_2$$
$$z = \frac{N}{C \times t_1 + C \times t_2 + C \times t_3 + \dots} \times C \times t_3 \text{ ou } x = \frac{N}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots} \times t_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

3ª hipótese: Capitais diferentes ($C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq \dots$) e tempos diferentes ($t_1 \neq t_2 \neq t_3, \dots$)

$$x = \frac{N}{C_1 \times t_1 + C_2 \times t_2 + C_3 \times t_3 + \dots} \times C_1 \times t_1$$
$$y = \frac{N}{C_1 \times t_1 + C_2 \times t_2 + C_3 \times t_3 + \dots} \times C_2 \times t_2$$
$$z = \frac{N}{C_1 \times t_1 + C_2 \times t_2 + C_3 \times t_3 + \dots} \times C_3 \times t_3$$
$$\vdots$$

4ª hipótese: Capitais iguais ($C_1 = C_2 = \cdots = C$) e tempos iguais
($t_1 = t_2 = \cdots = t$)

$x = y = z = \cdots = \dfrac{N}{C \times t + C \times t + C \times t + \dots} \times C \times t$, onde o número de termos $C \times t$ do denominador é igual ao número de partes em que o capital foi dividido.

5ª hipótese: Capitais e tempo variando

	1ª aplicação		2ª aplicação	
Pessoas	Capital	tempo	Capital	tempo
1ª	C_1	t_1	k_1	t_2
2ª	C_2	t_2	k_2	t_4

Obs.: As duas primeiras hipóteses constituem a regra de sociedade simples e, a última, regra de sociedade composta.

Ex.: Duas pessoas constituíram uma sociedade. A primeira entrou com R\$2.000,00 e a segunda com R\$2.500,00. Após 8 meses, a primeira aumentou seu capital para R\$3.500,00, enquanto que a segunda diminuiu para R\$1.500,00. Sabendo-se que após 18 meses o "balanço"revelou um lucro de R\$688,00, calcular o lucro de cada um?

1ª *Resolução*:

1º passo: Decorridos 8 meses, os capitais aplicados por eles foram:

1ª pessoa: $R\$2.000,00 \times 8 = R\$16.000,00$
2ª pessoa: $R\$2.500,00 \times 8 = R\$20.000,00$

2º passo: Como nos 10 meses restantes $(18-8)$ as duas pessoas variaram seus capitais, teremos ainda:

1ª pessoa: $R\$3.500,00 \times 10 = R\$35.000,00$

2ª pessoa: $R\$1.500,00 \times 10 = R\$15.000,00$

3º passo: Total aplicado

1ª pessoa: $R\$16.000,00 + R\$35.000,00 = R\$51.000,00$

2ª pessoa: $R\$20.000,00 + R\$15.000,00 = R\$35.000,00$

4º passo: Dividindo-se proporcionalmente o lucro, teremos:

1ª pessoa: $\dfrac{R\$\ 688,00}{R\$\ 51.000,00 + R\$\ 35.000,00} \times R\$\ 51.000,00 = R\$\ 408,00$

2ª pessoa: $\dfrac{R\$\ 688,00}{R\$\ 51.000,00 + R\$\ 35.000,00} \times R\$\ 35.000,00 = R\$\ 280,00$

2ª *Resolução*:

1ª pessoa:

$$\frac{R\$\ 688,00}{\underbrace{R\$\ 2.000,00 \times 8 + R\$\ 3.500,00}_{R\$\ 51.000,00} + \underbrace{R\$\ 2.500,00 \times 8 + R\$\ 15.000,00 \times 10}_{R\$\ 35.000,00}}$$

$\times R\$\ 51.000,00$

$$\frac{R\$\ 688,00}{R\$\ 51.000,00 + R\$\ 35.000} \times R\$\ 51.000,00 =$$

$$\frac{R\$\ 688,00}{R\$\ 86.000,00} \times$$

R\$ 51.000,00 = R\$ 408,00

2ª pessoa: R\$ 688,00 − R\$ 408,00 = R\$ 280,00.

13.8 Exercícios Propostos

1) João e Pedro associaram-se em certo negócio. João entrou com R\$1.200,00 e Pedro com R\$1.300,00. Se perderem R\$5.000,00, qual será o prejuízo que caberá a cada um?

2) Tânia iniciou um negócio com R\$5.000,00 e, três meses depois admitiu Sérgio como sócio, de modo que o capital dele fosse o mesmo que o seu no início desse negócio. Um ano após haver iniciado um negócio, verificou-se um lucro de R\$8.400,00. Qual é a parte de cada sócio?

3) Três amigos A, B e C formaram uma sociedade para a qual A entrou com R\$4.000,00, B com R\$6.000,00 e C com R\$7.000,00. Sabendo-se que houve um lucro de R\$51000,00, quanto receberá cada um?

4) Três pessoas formaram uma sociedade em que a primeira entrou com R\$18.000,00, a segunda com R\$24.000,00 e a terceira com R\$42.000,00, todos ao mesmo tempo. No final do primeiro ano, houve um lucro de R\$35.000,00. Que parte deve tocar a cada um?

5) José e Pedro constituíram uma sociedade onde José entrou com R\$2.000,00 e Pedro com R\$2.500,00. Após 8 meses, José aumentou seu capital para R\$3.500,00 e Pedro diminuiu para R\$1.500,00. No fim de 1 ano e 6 meses, houve um lucro de R\$344,00. Qual é a parte do lucro que coube a José?

6) Uma empresa fundada por três pessoas com participação de R\$1.610,00, R\$2.070,00 e R\$2.530,00, respectivamente, apresentou, 9 meses após, um lucro de R\$13.770,00. Quanto coube a cada pessoa?

7) Numa sociedade fundada por três pessoas, a primeira participa com R\$24.200,00, a segunda com R\$36.300,00 e a terceira com R\$60.500,00. No fim de 1 ano e 7 meses de atividade a firma acusa em balanço um lucro de R\$30.000,00. Calcule os lucros a ser distribuídos entre os sócios.

8) Uma empresa apresentou um lucro de R$90.420,00 em 1 ano e 3 meses de atividades. Quanto coube a cada sócio fundador se participaram respectivamente na abertura da sociedade com R$2.280,00; R$2.850,00; R$3.420,00 e R$3.990,00?

9) Três pessoas A, B e C participam de uma sociedade com capitais iguais. No fim de 1 ano e 4 meses de atividade, a firma obteve um lucro de R$52.700,00. Qual foi o lucro de cada sócio, sabendo-se que A fundou a firma e admitiu B e C como sócios 4 e 10 meses após?

10) Duas pessoas constituíram uma sociedade: a primeira entrou com um capital de R$2.500,00 e a segunda com R$6.000,00. Um ano depois, admitiram um terceiro sócio, que entrou com um capital de R$10.000,00. Decorridos 18 meses desde o início da sociedade, a firma teve um lucro de R$12.900,00. Qual é a parte do lucro que coube ao terceiro sócio?

Respostas

1) R$2.400,00 **e** R$2.600,00

2) R$4.800,00 **e** R$3.600,00

3) R$12.000,00; R$18.000,00 **e** R$21.000,00

4) R$7.500,00; R$10.000,00 **e** R$17.500,00

5) R$204,00

6) R$3.750,00; R$4.590,00 **e** R$5.610,00

7) R$6.000,00; R$9.000,00 **e** R$15.000,00

8) R$16.440,00; R$20.550,00; R$24.660,00 **e** R$28.770,00

9) R$24.800,00; R$18.600,00 **e** R$9.300,00

10) R$3.633,80

Capítulo 14

Médias

14.1 Introdução

Dados N números ou N grandezas, $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, numa certa ordem (crescente ou decrescente), denomina-se "média" a um certo número ou grandeza x tal que $n_1 < x < n_k$.

Dentre as *principais médias* a serem estudadas, veremos: as *médias simples* e as *médias ponderadas*.

14.2 Médias Simples

São certas operações efetuadas entre números ou grandezas dadas. As médias simples são: a *aritmética*, a *geométrica* e a *harmônica*.

14.2.1 Média Aritmética Simples ($M_{a.s}$)

É o quociente da soma dos números dados pelo total de parcelas.

$$M_{a.s} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k}{N}$$

14.2.2 Média Geométrica Simples ($M_{g.s}$)

É a raiz de índice N do produto dos N números dados.

$$M_{g.s} = \sqrt[N]{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k}$$

Obs$_1$.: $M_{g.s}(n_1, n_2) = \sqrt[2]{n_1 \times n_2}$

Obs$_2$.: $M_{g.s}(n_1, n_2, n_3) = \sqrt[3]{n_1 \times n_2 \times n_3}$

Na observação 1, e apenas nela, a *média geométrica* pode ser chamada, também, de *média proporcional*.

14.2.3 Média harmônica simples ($M_{h.s}$)

É o inverso da média aritmética do inverso dos números dados.

$$M_{h.s} = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} + \cdots + \dfrac{1}{n_k}}{N}}$$

Ex.: Demonstrar que a média harmônica de dois números n_1 e n_2, diferentes de zero, é igual ao dobro do produto deles, dividido pela soma dos mesmos.

Resolução:

Aplicando a definição, tem-se:

$$M_{h.s}(n_1, n_2) = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}{2}} = \frac{2}{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 \times n_2}} \therefore M_{h.s}(n_1, n_2) = \frac{2 \times n_2 \times n_2}{n_1 + n_2}$$

14.2.4 Relação entre as médias simples de dois números

O produto da média aritmética (M_a) *pela média harmônica* (M_h) *é igual ao quadrado da média geométrica* $(M_g)^2$.

Sejam x e y dois números dados.

$M_a = \dfrac{x + y}{2}$ .... (I)

$M_h = \dfrac{2xy}{x + y}$ .... (II)

$M_g = \sqrt{xy}$ ou $(M_g)^2 = xy$ .... (III)

Multiplicando-se (I) por (II), teremos:

$M_a \times M_h = \dfrac{(x + y)}{2} \times \dfrac{2xy}{(x + y)} \therefore M_a \times M_h = xy$ .... (IV)

Comparando-se (III) com (IV), teremos:

$$M_a \times M_h = (M_g)^2 \quad \text{... c.q.d.}$$

14.3 Médias Ponderadas

São certas operações efetuadas com N números $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ ou grandezas dadas, em correspondência biunívoca com outras $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k)$, também dadas, denominadas *pesos*.

As *médias ponderadas* são três: a *aritmética ponderada*, a *geométrica ponderada* e a *harmônica ponderada*.

14.3.1 Média aritmética ponderada $(M_{a.p})$

É o quociente obtido pela fração, onde o numerador é a soma dos produtos dos números dados pelos seus respectivos pesos, e o denominador é a soma desses pesos.

$$M_{a.p} = \frac{n_1 \times p_1 + n_2 \times p_2 + n_3 \times p_3 + \cdots + n_k \times p_k}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k}$$

14.3.2 Média geométrica ponderada $(M_{g.p})$

É a raiz de um radical, onde o índice é igual a soma dos pesos e o radicando é igual ao produto das potências dos números dados elevadas aos seus respectivos pesos.

$$M_{g.p} = \sqrt[i]{n_1^{p_1} \times n_2^{p_2} \times n_3^{p_3} \times \cdots \times n_k^{pk}}$$

onde $i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k$.

14.3.3 Média harmônica ponderada $(M_{h.p})$

É o quociente obtido pela fração, onde o numerador é a soma dos pesos e o denominador é a soma dos quocientes desses pesos dividida pelos respectivos números dados.

$$M_{h.p} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k}{\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + \frac{p_3}{n_3} + \cdots + \frac{p_k}{n_k}}$$

14.4 Tópicos Complementares

14.4.1 Média e Extrema Razão - Número de Ouro

I) *Média e Extrema Razão*

Diz-se que um ponto P *divide internamente um segmento* AB*, em média e extrema razão, somente quando o segmento maior* AP[1] *for igual a média proporcional entre o segmento menor* PB *e o segmento dado* AB.

De acordo com a definição, podemos escrever que:

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AB} \times \overline{PB}}$.

Substituindo $\overline{AP}$ por x, $\overline{AB}$ por a e $\overline{PB}$ por $a - x$, teremos:

$x = \sqrt{a \times (a - x)}$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, tem-se:

$x^2 = a \times (a - x)$ ou

$x^2 + ax - a^2 = 0$.

Resolvendo essa equação, teremos: $x = \dfrac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$

Como $x > 0$ e $\sqrt{5} \cong 2,236$, então $x \cong 0,618a$

II) *Número de Ouro*

Denomina-se *número de ouro* ao quociente φ gerado pela *razão* do segmento AB para o *segmento áureo* AP.

Pela definição, podemos escrever: $\varphi = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{a}{0,618a} \therefore \cong 1,618$

Obs.: $1,618$ é dito *número de ouro*.

14.4.2 Seqüência de Fibonacci

É a seqüência de números naturais em que cada termo (F_k) é definido por $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para todo $k > 2$, onde $F_1 = F_2 = 1$.

Ex.: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$

[1] $\overline{AP}$ é dito segmento áureo.

14.4.3 O Número de Ouro e a Seqüência de Fibonacci

Dividindo-se, sucessivamente, cada termo dessa seqüência pelo seu antecedente, verifica-se que os quocientes encontrados aproximam-se cada vez mais do *número de ouro*.

Observe que:

$$\frac{F_2}{F_1} = 1,000$$

$$\frac{F_3}{F_2} = 2,000$$

$$\frac{F_4}{F_3} = 1,500$$

$$\frac{F_5}{F_4} = 1,666\ldots$$

$$\frac{F_6}{F_5} = 1,600$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = 1,618$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$\dfrac{F_{k-1}}{F_{k-2}} = 1,618033989\ldots \cong 1,618$, que é o *número de ouro*.

14.5 Exercícios Resolvidos

1) Calcular as médias aritmética simples ($M_{a.s}$), geométrica simples ($M_{g.s}$) e harmônica simples ($M_{h.s}$), entre os números 2 e 3.

Resolução:

$$M_{a.s} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,50$$

$$M_{g.s} = \sqrt[2]{2 \times 3} = \sqrt[2]{6} \cong 2,45$$

$$M_{h.s} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2+3} = \frac{12}{5} = 2,40$$

2) Calcular a média aritmética simples dos 100 primeiros números naturais, excluindo zero.

Resolução:

$$M_{a.s} = \frac{1+2+3+\cdots+98+99+100}{100} \quad \begin{cases} 1+100=101 \\ 2+99=101 \\ 3+98=101 \\ \vdots \\ 50+51=101 \end{cases}$$

Como existem 50 pares cuja soma é igual a 101, teremos

$$\underbrace{101+101+\cdots+101}_{\text{50 parcelas}}, \quad \text{ou seja, } \frac{50\times 101}{100} = 50,5$$

Resp.: $M_{a.s} = 50,5$.

3) Determinar, com uma aproximação centesimal, a média geométrica simples de todos os quadrados primos absolutos menores que 10.

Resolução:

Os primos absolutos menores que 10 são: $2, 3, 5$ e 7. Sendo assim, teremos:

$M_{g.s} = \sqrt[4]{2^2\times 3^2\times 5^2\times 7^2} = \sqrt[4]{420} \cong 10,49.$

4) A média aritmética simples de um conjunto com 11 números naturais é igual a 45. Se o número 8 for retirado desse conjunto, determinar a nova média dos elementos restantes.

Resolução:

Seja S_{11}, a soma dos 11 elementos desse conjunto. Portanto ...

$\frac{S_{11}}{11} = 45 \to S_{11} = 11\times 45 \therefore S_{11} = 495.$

Retirando-se o elemento 8 dessa soma, o novo conjunto ficará com 10 elementos, daí,

$S_{10} = \frac{495-8}{10} = \frac{487}{10} = 48,7.$

5) Calcular as médias aritmética ponderada, geométrica ponderada e harmônica ponderada entre os números $2, 3$ e 5, sendo os pesos $9, 6$ e 3, respectivamente.

Resolução:

$$M_{a.p} = \frac{2\times 9+3\times 6+5\times 3}{9+3+6} = \frac{18+18+15}{18} = \frac{61}{18} \cong 3,4$$

$$M_{g;p} = \sqrt[9+6+3]{2^9 \times 3^6 \times 5^3} = \sqrt[18]{2^9 \times 3^6 \times 5^3} = \sqrt[6]{2^3 \times 3^2 \times 5} = \sqrt[6]{360} \cong 1,7$$

$$M_{h.p} = \frac{9+6+3}{\frac{9}{2}+\frac{6}{3}+\frac{3}{5}} = \frac{18}{\frac{135+60+18}{30}} = \frac{18 \times 30}{213} = \frac{540}{213} \cong 2,4$$

6) Supondo M_a, M_g e M_h as médias, aritmética, geométrica e harmônica entre dois números x e y, provar que $M_a \geq M_g \geq M_h$.

Resolução:

$1^{\underline{o}}$) Sabemos que $M_a = \dfrac{x+y}{2}$, $M_g = \sqrt{xy}$ e $M_h = \dfrac{2xy}{x+y}$.

Sendo $(x-y)^2 \geq 0$, teremos:

$(x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ .... (I)

Logo $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ ou $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Logo, $M_a \geq M_g$ .... (II)

$2^{\underline{o}}$) Multiplicando-se os dois membros de (I) por xy, teremos:

$xy(x+y)^2 \geq 4x^2y^2$ ou

$$xy \geq \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2}$$

Daí $\sqrt{xy} \geq \dfrac{2xy}{x+y}$, ou seja, $M_g \geq M_h$ .... (III)

De (II) e (III) podemos afirmar que $M_a \geq M_g \geq M_h$ .... c.q.d.

Obs.: Se $x = y$, então, $M_a = M_g = M_h = x$.

14.6 Exercícios Propostos

1) Calcule a média aritmética entre:

a) $5; 12; 20$ e 13
b) $3,5; 4,12$ e $7,2$
c) $3\frac{1}{4}; 5\frac{2}{3}$ e $9\frac{4}{5}$

2) Calcule a média geométrica dos números:

a) 72 e 128;

b) $3, 8e9$
c) $0, 45$ e $7, 2$
d) $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{17}$
e) $1; 12$ e 18.

3) Calcule a diferença entre as médias aritmética e geométrica dos números 8 e 18.

4) Calcule a média harmônica entre:

a) 2 e 6
b) 3 e 6
c) $1; 2$ e 6

5) Calcule a média harmônica de dois números, sabendo que a sua média aritmética é 25, e a geométrica, 15.

6) Calcule a média geométrica de dois números, sabendo que a sua média aritmética é $12, 5$, e a harmônica, 8.

7) A média geométrica de dois números é 20 e, a harmônica, 16. Calcule a média aritmética desses dois números.

8) Sabendo-se que a média aritmética e a média harmônica entre dois números naturais valem, respectivamente, 10 e $\frac{32}{5}$, pode-se dizer que a média geométrica entre esses números é igual a:

a) $3, 6$ b) 6 c) $6, 4$ d) 8 e) 9

9) Determine a média aritmética de dois números, sabendo que a média geométrica entre eles é 5 e a média harmônica igual a 4.

10) Calcule a média aritmética ponderada entre os números $6, 8, 10$ e 18, tendo para pesos respectivos os números $1, 2, 3$ e 4.

11) A soma de dois números é igual a $\sqrt{12}$. Determine o produto desses números, sabendo-se que a média geométrica deles é igual à média harmônica dos mesmos.

12) Uma escola tem 19 professores. Um deles se aposentou e foi imediatamente substituído por um professor de 23 anos. Por esse motivo, a média das idades dos professores diminuiu 2 anos. A idade do professor que se aposentou é igual a:

a) 60 anos b) 58 anos c) 59 anos d) 57 anos e) 61 anos

13) A idade média dos professores das escolas A e B é 30 anos. Se a média das idades dos professores da escola A é 26 anos e da escola B é 35 anos, a razão do número de professores de A para o número de professores de B é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{2}{1}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{1}$ e) $\frac{4}{3}$

14) A média salarial de oito empregados é de três salários mínimos. Um novo empregado vai ser contratado. Qual é a menor quantidade de salários mínimos a ser paga mensalmente a este novo empregado, de modo que a média salarial ultrapasse a quatro salários mínimos?

15) Num certo colégio, a turma do $1^{\underline{o}}$ ano é distribuída em 5 salas. Num teste de Álgebra as médias das notas dos alunos por sala foram, respectivamente, $5,5; 5,2; 6,3; 7,1$ e $5,9$. A média das notas da turma é:

a) $5,9$ b) $6,0$ c) $6,15$ d) $6,5$
e) impossível de ser calculada com esses dados

16) Seja $M = \dfrac{xy}{x+y}$, onde x e y são reais positivos. Logo, M é:

a) o quociente da média geométrica pela média aritmética entre x e y;
b) a metade do quociente da média aritmética com a média geométrica entre x e y;
c) a média aritmética dos inversas entre x e y;
d) a média harmônica entre x e y;
e) a metade da média harmônica entre x e y.

17) A média aritmética simples de N números inteiros positivos é N, e a dos elementos de um subconjunto de N, que consiste de M números dados é M. Qual é a média aritmética simples dos $N - M$ números restantes?

18) Em uma cela iluminada de uma prisão há uma passagem secreta que conduz a um porão de onde partem três túneis. O primeiro túnel dá acesso à liberdade

em 1 hora; o segundo em 3 horas e o terceiro leva ao ponto de partida em 12 horas. Em média, os prisioneiros que descobrem os túneis, conseguem escapar da prisão em:

a) 4 h b) 5 h c) 6 h d) 7 h e) 8 h

Respostas

1)	**2)**	**3)** 1	**4)**
a) $12,5$	**a)** 96		**a)** 3
b) $4,84$	**b)** 6		**b)** 4
c) $\approx 6,32$	**c)** $1,8$		**c)** $1,8$
	d) $\frac{1}{3}$		
	e) 6		
5) 9	**6)** ≈ 10	**7)** 25	**8) d**
9) $6,25$	**10)** $12,4$	**11)** 3	**12) e**
13) a	**14)** 12	**15) e**	**16) e**
17) $M+N$	**18) c**		

Capítulo 15

Medidas Complexas e Medidas Incomplexas

15.1 Medidas Complexas

São aquelas expressas por duas ou mais unidades da mesma natureza.

A representação dessas medidas faz-se em ordem decrescente, de modo que os números apareçam acompanhados de suas respectivas unidades.

Exs.:
15 dias e 10 horas ou 15 d 10 h
10 graus, 20 minutos e 30 segundos ou $10^\circ\,20'\,30''$
3 horas 15 minutos e 7 segundos ou 3 h 15 min 7 s

15.2 Medidas Incomplexas

São aquelas que representam apenas uma única unidade.

Exs.: 10 dias, 20 horas, 15 quilômetros, 5° (cinco graus),...

15.3 Redução de Medidas

15.3.1 1º caso: De medidas complexas para incomplexas

Reduzir uma medida complexa noutra incomplexa, significa converter a mesma à menor unidade que essa unidade possui ou a uma fração de qualquer das outras superiores.

Ex.: Seja reduzir 3 horas e 15 minutos, em minutos.

1º) $3 \times 60\,\mathrm{min} = 180\,\mathrm{min}$

Somando $180\,\mathrm{min}$ aos $15\,\mathrm{min}$ do número dado, teremos:

2º) $180\,\mathrm{min} + 15\,\mathrm{min} = 195\,\mathrm{min}$

Obs.: Na prática, poderemos fazer o esquema seguinte:

$$\begin{array}{l} 60\,\mathrm{min} \\ \underline{\times 3} \\ 180\,\mathrm{min} \\ \underline{+15\,\mathrm{min}} \\ 195\,\mathrm{min} \end{array}$$

15.3.2 2º caso: De medidas incomplexas em complexas

Nessa redução, temos três itens a considerar:

a) *A medida incomplexa é uma fração ordinária*

Ex.: Transformar $\frac{8}{3}$ do ano em uma medida complexa.

$$\begin{array}{c|l} 8 \text{ anos} & 3 \\ \cline{2-2} -6 \text{ anos} & 2 \text{ anos } 8 \text{ meses} \\ \hline \underbrace{2 \text{ anos}}_{24 \text{ meses}} & \\ -24 \text{ meses} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b) *A medida incomplexa é um número decimal*

Ex.: Seja transformar $2,25$ horas em medida complexa.

$$2,25\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h} + 0,25\,\mathrm{h}$$
$$2,25\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h} + \underbrace{(0,25\,\mathrm{h} \times 60\,\mathrm{min})}_{15\,\mathrm{min}}$$

$2,25\,\text{h} = 2\,\text{h}\ 15\,\text{min}$

c) *A medida incomplexa refere-se à menor unidade do sistema*

Ex.: Traduza em medida complexa $8.124''$

Dividindo-se $8.124''$ por 60, obteremos minutos, ou seja:

$$\begin{array}{r|l} 8.124'' & \underline{60} \\ 24'' & 135' \end{array}$$

Como $135'$ é maior que $1°$ $(60')$, devemos dividi-lo por 60, isto é:

$$\begin{array}{r|l} 135' & \underline{60} \\ 15' & 2° \end{array}$$

Assim sendo $8.124''$ equivale a $2°\,15'\,24''$

15.4 Operações com Medidas Complexas

1ª) Adição

Regra:

-*escrevem-se as parcelas uma embaixo da(s) outra(s), de modo que haja correspondência das unidades da mesma ordem*;

- *a seguir somamos as unidades e, do total, extraímos as unidades imediatamente superiores, que somaremos à unidade seguinte e o resto deixamos sob essa unidade inferior*;

- *prossegue-se assim com as outras unidades até a última, cujo total se escreve sem alteração.*

Ex.: Seja somar $15\,\text{h}\ 40\,\text{min}\ 50\,\text{s}$ com $3\,\text{h}\ 25\,\text{min}\ 30\,\text{s}$

$$\begin{array}{rrr} 15\,\text{h} & 40\ \text{min} & 50\,\text{s} \\ +3\,\text{h} & 25\ \text{min} & 30\,\text{s} \\ \hline 18\,\text{h} & 65\,\text{min} & 80\,\text{s} \\ & +1\,\text{min} & \\ \hline 18\,\text{h} & 66\,\text{min} & 20\,\text{s} \\ +1\,\text{h} & & \\ \hline 19\,\text{h} & 6\,\text{min} & 20\,\text{s} \end{array}$$

Onde fizemos o seguinte:

1º) Como 80 s é maior que 60 s, devemos dividi-lo por 60, obtendo quociente 1 min e resto 20 s.

2º) Como 66 min é maior que 60 min devemos também dividi-lo por 60, obtendo quociente 1 h e resto 6 min.

2ª) Subtração

Regra:

- *escreve-se o subtraendo embaixo do minuendo e faz-se a subtração das unidades de mesma natureza*;
- *quando a subtração não for possível minuendo menor que o subtraendo, transfere-se uma unidade da espécie imediatamente superior, juntando a mesma a essa unidade inferior*.

Ex.: Seja subtrair $2^\circ\ 50'\ 55''$ de $5^\circ\ 5'\ 10''$

Tem-se, pois, $5^\circ\ 5'\ 10 - 2^\circ\ 50'\ 55''$

Como $10 \ll 55''$, somamos $1' = 60''$ (proveniente de $5'$) à $10''$, ou seja, $60'' + 10'' = 70''$

A nova subtração será $5^\circ\ 4'\ 70 - 2^\circ\ 50'\ 55''$. Como $4' < 50'$, somamos $1^\circ = 60'$ (proveniente de $4'$, ou seja, $60' + 4' = 64'$). Portanto,

$$\begin{array}{rl} & 4^\circ\ 64'\ 70'' \\ - & \underline{2^\circ\ 50'\ 55''} \\ & 2^\circ\ 14'\ 15'' \end{array}$$

3º) Multiplicação

No caso da multiplicação de dois fatores, temos duas hipóteses:

1ª) Apenas um fator é complexo;
2ª) Os dois fatores são complexos.

1º caso: Apenas um fator é complexo

Regra:

1 - *Multiplica-se o fator não complexo por cada uma das unidades da medida complexa*;
2 - *Reduz-se as unidades obtidas, convenientemente*.

Ex.: Seja multiplicar 10° 20′ 30" por 5

Operação:

10°	40′	50"
		×5
50°	100′	150"
	+2′	
50°	102′	30"
+1°		
50°	42′	30"

Onde fizemos o seguinte:

1º) Como 150" é maior que 60", devemos dividi-lo por 60, obtendo quociente 2′ e resto 30".

2º) Como 102′ é maior que 60′ devemos também dividi-lo por 60, obtendo quociente 1° e resto 42′.

2º caso: Os dois fatores são complexos.

Regra:

- *reduzimos as duas medidas complexas a duas frações mais convenientes*;
- *multiplicamos uma por outra e, em seguida*;
- *dividimos os termos pelos fatores que o reduzem à unidade imediatamente inferior*.

4º) Divisão

Nesse caso, também teremos três hipóteses:

1ª) apenas o dividendo é uma medida complexa;
2ª) o dividendo é incomplexo e o divisor complexo;
3ª) o dividendo e o divisor são medidas complexas.

Regra:

Como a *divisão é a operação inversa da multiplicação*, o procedimento será análogo à mesma. Vejamos os exemplos a seguir:

1ª hipótese: Apenas o dividendo é uma medida complexa

Ex_1**.:** Seja dividir 48° 35′ 20" por 8

$$\begin{array}{rrr|l}
48^\circ & 35' & 20'' & 8 \\ \cline{4-4}
0^\circ & & & 6^\circ\, 4'\, 25'' \\ \cline{1-2}
 & 35' & & \\
 & 3' & 20'' & \\ \cline{2-3}
 & & 200'' & \\
 & & 0'' &
\end{array}$$

Onde fizemos o seguinte:

1º) Dividimos 48° por 8, obtendo quociente 6° e resto 0.

2º) Dividimos $35'$ por 8, obtendo quociente $4'$ e resto $3'$.

3º) Agora, como $3'$ é menor que 8, transformamos $3'$ em segundos ou seja, $3 \times 60'' = 180''$ e somamos a $20''$ isto é, $180'' + 20'' = 200''$.

4º) Dividimos $200''$ por 8 obtendo quociente $25''$ e resto 0.

Tudo isto pode ser visto no próximo exemplo.

Ex_2**.:** Dividir $46^\circ\ 27'\ 14''$ por 4

$$\begin{array}{rcccrcccr|l}
46^\circ & & & & 27' & & & & 14'' & 4 \\ \cline{10-10}
2^\circ & \times & 60 & = & 120' & & & & & 11^\circ\ 36'\ 48'' \\
 & & & & 147' & & & & & \\
 & & & & 27' & & & & & \\
 & & & & 3' & \times & 60 & = & 180'' & \\ \cline{9-9}
 & & & & & & & & 194'' & \\
 & & & & & & & & 34'' & \\
 & & & & & & & & 3'' &
\end{array}$$

2ª hipótese: O dividendo é incomplexo e o divisor complexo.

Ex.: Seja dividir 164° por $5^\circ\ 7'\ 30''$

Transformando $5^\circ\ 7'\ 30''$ em graus, teremos:

$5^\circ = 5 \times 60' = 5 \times 60 \times 60'' = 18.000''$
$7' = 7 \times 60'' = 420''$

Total: $18.000'' + 420'' + 30'' = 18.450''$

Logo: $5^\circ\ 7'\ 30'' = \left(\dfrac{18.450''}{3600}\right)^\circ = \left(\dfrac{41}{8}\right)^\circ$

Dividindo 164° por $\left(\dfrac{41}{8}\right)^\circ$, teremos:

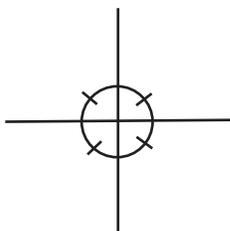
$164° \div \dfrac{41°}{8} = 164 \times \dfrac{8}{41} = 32$

15.5 Tópicos Complementares

15.5.1 Ângulo Plano

a) Unidade Fundamental: Ângulo Reto

- *É cada um dos ângulos adjacentes iguais, formado por duas retas que se intersectam.*

Fazendo essas retas passarem pelo centro de uma circunferência qualquer, a mesma ficará dividida em quatro arcos iguais e, conseqüentemente, *quatro ângulos adjacentes iguais.*

Como convencionalmente a circunferência tem $360°$, cada um desses ângulos será igual a:

$\dfrac{360}{4}$ ou seja, $90°$

$1\text{r} = 90°$

b) Grado (gr)
- *É o ângulo equivalente a centésima parte do ângulo reto.*

De acordo com a definição, podemos escrever:

$1\,\text{gr} = \dfrac{1}{100}\,\text{r}$ ou $1\,\text{gr} = 0,01\,\text{r}$

b.2) Múltiplos e submúltiplos

múltiplos $\begin{cases} \text{quilogrado (kgr)} \\ \text{hectogrado (hgr)} \\ \text{decagrado (dagr)} \end{cases}$

submúltiplos $\begin{cases} \text{decigrado } (\mathtt{dgr}) \\ \text{centigrado } (\mathtt{cgr}) \\ \text{miligrado } (\mathtt{mgr}) \end{cases}$

b.3) Resumo

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
kgr	hgr	dagr	gr	dgr	cgr	mgr

15.5.2 Unidade de Tempo

a) Unidade fundamental de tempo - segundo

- É o *intervalo de tempo* igual a $\dfrac{1}{86.000}$ do *dia solar médio*.

a.1) Múltiplos e submúltiplos

- Os *múltiplos* e *submúltiplos* do segundo não possuem designação própria. A seguir, veremos os múltiplos usuais em função do segundo.

1 minuto (min) $= 60$ segundos (seg)
1 hora (h) $= 60$ min $= 60 \times 60$ seg $= 3.600$ seg
1 dia $= 24$ h $= 24 \times 60$ min $= 24 \times 60 \times 60$ seg $= 86.400$ seg

a .2) Múltiplos do dia e suas equivalências, em dias.

Semana .... 7 dias
Mês .... $28, 29, 30$ ou 31 dias
Ano .... $360, 365$ ou 366 dias

Obs. O ano possui 12 meses.

O ano comercial (ou bancário) ..... 360 dias
O ano civil .... 365 dias
O ano civil e bissexto .... 366 dias

Nota: No ano civil, os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro, possuem 31 dias; os meses de abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias e, o mês de fevereiro, 28 dias. No caso do ano civil e bissexto , este mês possui 29 dias.

a.3) Nomeclatura dos numerais coletivos

Ano (s) *Numeral*

1 .... Anuênio
2 .... Biênio
3 .... Triênio
4 .... Quadriênio
5 .... Qüinqüênio
7 .... Setênio
10 .... Década ou Decênio
100 .... Século
1000 .... Milênio

Meses *Numeral*

2 .... Bimestre
3 .... Trimestre
4 .... Quadrimestre
6 .... Semestre
10 .... Decemestre

Obs.:

Semana ....7 dias
Quadrissemana .... 4 semanas

15.5.3 Unidades de Velocidade

a) Velocidade
É a relação (por divisão) da distância percorrida por um corpo, por uma das unidades de tempo.

a.1) Unidade principal: metro por segundo

- *Denomina-se metro por segundo, a velocidade de um corpo que, em movimento uniforme percorre a distância de* 1 *metro em* 1 *segundo.*

a.2) Notação (m/s) – Lê-se: metro por segundo

a.3) Submúltiplos

- metro por minuto (m/min)
- centímetro por segundo (cm/s)
- quilômetro por hora (km/h)

b) Velocidade das embarcações

- A velocidade das embarcações, tem para unidade fundamental o NÓ.

NÓ - *É a velocidade equivalente a distância percorrida de* 1 *milha náutica em* 1 *hora*.

Obs.: $1\,\mathsf{M} = 1.853,25\,\mathsf{m}$; $1\,\mathsf{hora} = 3.600\,\mathsf{s}$

$1\,\text{NÓ} = \dfrac{1.853,25}{3.600} = 0,5\,\mathsf{m/s}$

c) Velocidade angular

- *É o ângulo descrito por um móvel, numa certa unidade de tempo.*

c.1) Unidade fundamental: radiano por segundo

- *É a velocidade de um móvel, que animado de rotação uniforme, percorre um arco de circunferência igual ao raio, em* 1 *segundo*.

c.2) Notação: rd/s ou rad/s

- Além do radiano, a velocidade angular pode ser indicada também por: *rotação(ões) por minuto, (volta(s) por minuto)* ou *rotação(ões) por segundo (volta(s) por segundo)*.

c.3) Notações:
- rotação por minuto: r.p.m
- rotação por segundo: r.p.s

15.6 Exercícios Resolvidos

1) Suponha que um certo país tenha uma dívida (interna + externa) igual a 200 bilhões de dólares, e pague 10% de juro ao ano. Calcular o que se paga de juro, por segundo.

Resolução:
Consideração: o ano comercial

1U$ = R$2,24

1º) 10% de U$200.000.000.000=U$20.000.000.000,00
2º) 1 dia = 24 h
3º) 1 h = 60 min
4º) 1 min = 60 seg

5º) $1\ \text{dia} = 24 \times 60 \times 60 = 86.400\ \text{seg}$

6º) $365\ \text{dias} = 360 \times 86.400 = 31.104.000\ \text{seg}$

7º) $\text{Juro/seg} = \dfrac{\text{U\$}\,20.000.000.000}{31.104.000\ \text{seg}} = \text{U\$}\,643,00 \cong \text{R\$}1.440,00/\text{seg}$

2) Admitindo que os credores aceitem que a mesma seja paga com ouro, determinar o tempo que essa dívida será paga.

Resolução:

Dados: $1\,\text{g de ouro} = \text{U\$}10$

Obs$_1$: Supor que no pagamento da mesma;
- não haja reajuste sobre o saldo devedor;
- não haja despesa com a extração desse metal

Obs$_2$: Produção anual de ouro desse país: 60 toneladas

Resolução:

1º) Ouro U\$
$1\,\text{g}$ 10
$60\,\text{t}$................................. $600.000.000$

2º) U\$ Ano
$600.000.000$............................ 1
$200.000.000.000$ x

$x \cong 333\text{anos}$

15.7 Exercícios Propostos

1) Reduza a incomplexo: $6°\ 19'\ 20''$.

2) Determine o número complexo equivalente a $\dfrac{715}{36}$ do grau sexagesimal.

3) Efetue: $\dfrac{12°\ 44'' + 5°\ 18'\ 6''}{4}$

4) Qual é a quinta parte de $123°\ 52'\ 30''$?

5) Converta $60,467\ \text{gr}$ em graus, minutos e segundos.

6) Calcule a quinta parte do excesso de $180°$ sobre $94°\ 37'\ 25''$.

7) Um móvel em movimento retilíneo uniforme percorrendo $161,28\,\text{km}$ por hora, tem a velocidade de quantos metros por segundo?

8) Efetue: $5^\circ\ 28'\ 18'' \times \frac{5}{7}$

9) Calcule em graus, minutos e segundos o ângulo A, sabendo-se que:

$$\frac{35^\circ\ 13'\ 44'' - 22^\circ\ 47'\ 11''}{A} = \frac{3}{4}$$

10) Calcule 25% do ângulo $121^\circ\ 19'\ 20''$.

11) Calcule $\frac{3}{4}$ de $15^\circ\ 22'\ 10''$.

12) Exprima em horas, minutos e segundos, a sétima parte de um dia.

Respostas

1) $22.760''$

2) $19^\circ\ 51'\ 40''$

3) $4^\circ\ 19'\ 35''$

4) $24^\circ\ 46'\ 30''$

5) $54^\circ\ 25'\ 13,08''$

6) $17^\circ\ 4'\ 31''$

7) $124,88\,\text{m/s}$

8) $3^\circ\ 54'\ 30''$

9) $16^\circ\ 35'\ 24''$

10) $30^\circ\ 19'\ 45''$

11) $11^\circ\ 31'\ 37,5''$

12) $3\,\text{h}\ 25\,\text{min}\ 42\,\frac{6}{7}\,\text{seg.}$

Capítulo 16

Regra de Três

16.1 Conceito

É todo problema que envolve grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Existem dois tipos de regra de três: a *regra de três simples* e a *regra de três composta*.

I) Regra de Três Simples – *É a regra que envolve apenas duas grandezas.*

Ex.: Um automóvel consome 1 litro de combustível a cada 12 quilômetros. Achar o número de litros que consumirá para percorrer 100 quilômetros.

Veja que as duas grandezas relacionadas são: *litro* e *quilômetro*.

II) Regra de Três Composta – *É a regra que envolve mais de duas grandezas.*

Ex.: Cinco operários constroem um muro de 50 metros em 8 dias. Determinar o número de operários necessários para construírem outro muro com 80 metros.

Vemos agora que foram envolvidas três grandezas: *operários*, *comprimento* e *tempo*.

Obs.: Nos problemas de regra de três, a(s) grandeza(s) conhecida(s) é (são) denominada(s) de principal (is) e a grandeza desconhecida é dita relativa.

A regra de três simples pode ser: *direta* ou *inversa*

a)Direta – É aquela em que se *aumentando* ou *diminuindo* a *grandeza principal*, implicar em um *aumento* ou em uma *diminuição* da *grandeza relativa*;

b)Inversa – É aquela em que se *aumentando* ou *diminuindo* a *grandeza principal*, implicar em uma *diminuição* ou em um *aumento* da *grandeza relativa*;

16.2 Análise e Resoluções Teóricas com Regra de Três

As regras de três são analisadas comparando-se a grandeza relativa com a(s) principal(is).

1º caso: *Regra de três simples, diretamente proporcional*

Ex$_1$**.:** Certa quantidade (Q_1) de uma mercadoria custa-nos um preço (p_1). Determinar o novo preço (x) para uma outra quantidade (Q_2).

Resolução:

Quantidade	*Preço*
Q_1	p_1
Q_2	x

Como *quantidade e preço* são grandezas *diretamente proporcionais*, podemos escrever:

$$\frac{p_1}{x} = \frac{Q_1}{Q_2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{Q_2 \times p_1}{Q_1}$$

2º caso: *Regra de três simples, inversamente proporcional.*

Ex$_2$**.:** Um automóvel percorre certa distância com uma velocidade (V_1) num tempo (t_1). Determinar o tempo (x) que irá percorrer essa mesma distância com uma nova velocidade (V_2).

Resolução:

Vê-se que *velocidade e tempo* para percorrer uma mesma distância são inversamente proporcionais. Assim, de acordo com o enunciado, teremos:

Velocidade	*Tempo*
V_1	t_1
V_2	x

Comparando-as, de modo que as mesmas fiquem diretamente proporcionais, teremos:

$$\frac{t_1}{x} = \frac{V_2}{V_1} \quad \text{ou} \quad x = \frac{v_1 \times t_1}{v_2}$$

3º caso: *Regra de três composta*

- Nesse caso, as *grandezas principais* podem aparecer *direta ou inversamente proporcionais* à relativa.

Ex$_1$.: Certa quantidade (Q_1) de máquinas produzem (p_1) peças num tempo (t_1). Determinar o número de máquinas x necessárias para produzir (p_2) peças num tempo (t_2).

Resolução:

Vemos que a *grandeza relativa (máquinas)* é *diretamente proporcional* ao número de peças e *inversamente proporcional* ao tempo. Assim sendo,

Máquinas	*Peças*	*Tempo*
Q_1	p_1	t_1
x	p_2	t_2
	(dir)	(inv)

Como a *grandeza relativa (máquina)* é *diretamente proporcional* à grandeza *peça* e *inversamente proporcional* à grandeza *tempo*, poderemos escrever as seguintes proporções:

$\frac{Q_1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$ .... (I) e $\frac{x_1}{x} = \frac{1}{\frac{t_1}{t_2}}$ .... (II), onde x é a grandeza desejada.

Multiplicando-as, membro a membro, teremos:

$\frac{Q_1}{x_1} \times \frac{x_1}{x} = \frac{p_1}{p_2} \times \frac{1}{\frac{t_1}{t_2}}$ ou $\frac{Q_1}{x} = \frac{p_1}{p_2} \times \frac{t_2}{t_1}$, onde x pode ser facilmente determinado.

Ex$_2$.: M_1 máquinas trabalhando h horas por dia, fazem m_1 metros de peças de fazenda em t_1 dias. Determinar o número de horas, por dia, que deverão trabalhar M_2 máquinas, para fazerem m_2 metros de fazenda em t_2 dias.

Máquinas	*h/d*	*metros*	*dias*
M_1	h	m_1	t_1
M_2	x	m_2	t_2

Vê-se que apenas as grandezas máquinas e horas por dia são *inversamente proporcionais* à relativa (horas por dia), e as outras são *diretamente proporcionais*.

Analogamente ao que fizemos anteriormente, teremos:

$$\frac{h}{x_1} = \frac{1}{\frac{M_1}{M_2}} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{x_1} = \frac{M_2}{M_1} \text{ .... (I)}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_1}{m_2} \text{ .... (II)}$$

$$\frac{x_2}{x} = \frac{t_1}{t_2} \text{ .... (III)}$$

Multiplicando-se (I), (II) e (III) membro a membro, teremos:

$$\frac{h}{x_1} \times \frac{x_1}{x_2} \times \frac{x_2}{x} = \frac{1}{\frac{M_1}{M_2}} \times \frac{m_1}{m_2} \times \frac{t_1}{t_2}$$

$\frac{h}{x} = \frac{M_2}{M_1} \times \frac{m_1}{m_2} \times \frac{t_1}{t_2}$, onde x é facilmente encontrado.

Desses dois últimos exemplos, podemos concluir que:

Para calcularmos a grandeza desconhecida de uma regra de três composta, basta igualarmos a razão da grandeza relativa com o produto das outras (principais), de modo que essas sejam diretamente proporcionais à relativa.

16.3 Exercícios Resolvidos

1) Se R\$ 100,00 em certo tempo dá-nos R\$ 8,00 de rendimento, determinar o rendimento gerado por R\$ 250,00 nesse mesmo tempo.

Resolução:

De acordo com os dados, podemos escrever que:

Capital (R\$)	*Rendimento (R\$)*
100	8
250	x

Como o *capital* e o *tempo* são grandezas diretamente proporcionais, teremos:

$$\frac{8}{x} = \frac{100}{250} \Rightarrow x = \frac{8 \times 250}{100} \therefore x = 20$$

Resp.: $R\$\,20,00$

2) Determinar o número de baldes de 40 litros que serão necessários para construirmos uma laje cujas dimensões são: 8 metros de comprimento, 5 metros de largura e $0,07$ metros de espessura.

Resolução:

$8\,m = 80\,dm$

$5\,m = 50\,dm$

$0,07\,m = 0,7\,dm$

$V = 80\,dm \times 50\,dm \times 0,7\,dm = 2.800\,dm^3 = 2.800\,l$, logo, se:

balde(s)	*litro(s)*
1	40
x	2.800

Balde e *litros* são grandezas *diretamente proporcionais*, daí:

$$\frac{1}{x} = \frac{40}{2\,800} \therefore x = 70$$

Resp.: 70 baldes.

3) Sabe-se que um automóvel a 80 km/h percorre certa distância em 2 horas. Determinar o tempo para ele percorrer essa mesma distância, se a sua velocidade for 100 km/h.

Resolução:

Sabe-se que, velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais, daí,

km/h	*h*
80	2
100	x
(i)	

Tem-se então:

$$\frac{2}{x} = \frac{100}{80} \Rightarrow x = \frac{16}{10}\,h = 1\,h\;36\,min$$

Resp.: 1 hora e 36 minutos.

4) Uma pessoa tem ração suficiente para alimentar 5 galinhas durante 20 dias. No fim do 4º dia ela comprou mais 3 galinhas. Determinar o número de dias que ainda poderá alimentá-las.

Resolução:

galinhas	*dias*
5	20

No fim do quarto dia a pessoa ainda possui 5 galinhas, mas a ração será suficiente para apenas 16 dias, logo, tem-se,

galinhas	*dias*
5	16

Como a pessoa comprou 3 galinhas, ficará agora, é claro, com 8 galinhas, daí:

galinhas	*dias*
5	20
8	x

Como as grandezas anteriores são inversamente proporcionais, teremos:

$$\frac{16}{x} = \frac{8}{5} \Rightarrow 8 \times x = 5 \times 16 \Rightarrow x = \frac{80}{8} \therefore x = 10$$

Resp. 10 dias

5) Se R\$ 200,00 em 1 ano dá-nos um rendimento de R\$ 15,00, calcular o rendimento de R\$ 500,00 em 3 anos.

Resolução:

De acordo com os dados, teremos:

Capital	*Ano(s)*	*Rendimento*
200	1	15
500	3	x

Como o capital e o tempo são grandezas diretamente proporcionais ao rendimento, teremos:

$$\frac{15}{x} = \frac{200}{500} \times \frac{1}{3} \Rightarrow x = 112,5$$

Resp.: R\$ 112,50

6) Doze pedreiros fizeram 5 barracões em 3 dias, trabalhando 6 horas por dia. Determinar o número de horas, por dia, que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazerem 10 barracões em 20 dias.

Resolução:

Dispondo-se as grandezas convenientemente, teremos:

pedreiros	*barracões*	*h/d*
12	5	6
18	10	x

Vê-se que a grandeza "horas por dia"é *inversamente (I) proporcional* à grandeza pedreiros e *diretamente (D) proporcional* à grandeza barracões, daí:

pedreiros	*barracões*	*h/d*
12	5	6
18	10	x
(I)	(D)	

Comparando-se agora a grandeza relativa (horas por dia), diretamente proporcional ao produto das outras duas, teremos:

$$\frac{6}{x} = \frac{18}{12} \times \frac{5}{10}$$

Simplificando e resolvendo essa proporção, teremos: $x = 8$

Resp. 8 h/d

7) Vinte e um operários gastaram 15 dias de 8 horas para abrir 20 metros de um canal. Determinar o número de dias, de 9 horas, que 6 operários, que são duas vezes mais produtivos do que os primeiros, gastarão para abrir 18 metros de outro canal, sabendo-se que a dificuldade do primeiro trabalho está para a do segundo, como 3 está para 4.

Resolução:

Face ao que foi fornecido, podemos escrever:

Operários	*Dias*	*h/d*	*Metro(s)*	*Produção*	*Dificuldade*
21	15	8	20	1	3
6	x	9	18	2	4

Comparando a grandeza principal, dias, com as demais, teremos:

Operários	*Dias*	*h/d*	*Metro(s)*	*Produção*	*Dificuldade*
21	15	8	20	1	3
6	x	9	18	2	4
(i)		(i)	(d)	(i)	(d)

Daí, $\frac{15}{x} = \frac{6}{21} \times \frac{9}{8} \times \frac{20}{18} \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{4}$

Simplificando, convenientemente, virá: $\frac{1}{x} = \frac{1}{28} \therefore x = 28$

Resp.: 28 dias

8) Certo trabalho é feito por 16 tratores iguais em 10 dias, cada um deles trabalhando 10 horas por dia. Após dois dias de trabalho, 6 tratores apresentaram defeitos, não podendo mais serem utilizados. Determinar o número de horas por dia que deverão trabalhar os demais tratores, prevendo que ocorrerá um atraso de 8 dias para o término do trabalho.(*Colégio Militar*, RJ, 2.006.)

Resolução:

De acordo com os dados, podemos escrever:

Tratores	*Dias*	*h/d*
16	10	10

Após 2 dias, ainda temos 16 tratores trabalhando 10 h/d e apenas 8 dias $(10 - 2)$ para concluírem o trabalho. Portanto...

Tratores	*Dias*	*h/d*
16	8	10

Como 6 tratores ficaram com defeito e ocorreu um atraso de 8 dias, tem-se agora $10(16 - 6)$ tratores para concluírem o serviço em $16(8 + 8)$ dias. Resumindo:

Tratores	*Dias*	*h/d*
16	8	10
10	16	x

Como as grandezas principais são inversamente proporcionais à grandeza relativa, podemos escrever:

$\frac{10}{x} = \frac{10}{16} \times \frac{16}{8} \therefore x = 8$

Resp.: 8 h/d

9) Uma criação de 12 aves tipo A consome um saco de ração K em exatamente 30 dias e uma criação de 6 aves tipo B consome um saco de ração K, igual ao primeiro, em exatamente 10 dias. Inicialmente tem-se um saco de ração K para cada um dos tipos de aves mencionados. No fim do quinto dia, a ração disponível para as aves de tipo B estragou-se, obrigando a distribuição de toda a ração restante para os dois tipos de aves. Determinar o número de dias inteiros que vai durar a ração restante, para alimentar todos os animais na forma regular. (*Colégio Naval*, 2.006)

Resolução:

Tipo	*Aves*	*Saco de ração K*	*Dias*
A	12	1	30
B	6	1	10

Determinemos, inicialmente, o consumo dessas aves em 1 dia.

Tipo	*Aves*	*Saco de ração K*	*Dias*
A	12	$\frac{1}{30}$	1
B	6	$\frac{1}{10}$	1

Calculemos agora o consumo das duas aves em 1 dia.

$A + B = \frac{1}{30} + \frac{1}{10}$, ou seja, $\frac{2}{15}$.

Como a ração para as aves do tipo B estragou-se, vamos calcular o consumo da ração das aves do tipo A em 5 dias, para sabermos o que ainda falta para ser consumido. Se as aves do tipo A consomem em 1 dia $\frac{1}{30}$ então, em 5 dias consumirão $\frac{5}{30}$, ou seja, $\frac{1}{6}$.

Daí, a ração restante será $\frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Portanto...

Tipo	*Dias*	*Consumo*
$A + B$	1	$\frac{1}{30}$
$A + B$	x	$\frac{5}{6}$

Como as grandezas são diretamente proporcionais, teremos:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{25} \therefore x = 6,25$$

Resp.: 6 dias

16.4 Regra Conjunta

A *regra conjunta* é um caso particular da *regra de três composta* e apresenta a singularidade de serem os conseqüentes das suas proporções de mesma grandeza, os antecedentes da proporção seguinte.

Aplica-se a regra conjunta para se determinar o equivalente entre grandezas e principalmente para achar o equivalente entre moedas de dois países, indiretamente, através das relações que essas moedas mantêm com outros países. Nesse caso, a *regra conjunta* recebe o nome de *regra de câmbio*. Conhecendo-se, por exemplo, as relações entre os números ou grandezas A e B, B e C, C e D, é sempre possível determinar a relação entre A e D.

Seja:

$$\frac{A}{B} = \frac{a'}{b'}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{c'}{d'}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{e'}{f'}$$

Multiplicando membro a membro, teremos:

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} \times \frac{e'}{f'} \therefore \frac{A}{B} = \frac{a' \times c' \times e'}{b' \times d' \times f'}$$

Ex_1.: Se 25 abacaxis valem tanto quanto 30 mangas; 15 destas, tanto quanto 10 laranjas e 20 destas, tanto quanto 10 bananas, que se vendem a R\$ $2,00$ a dúzia. Determinar o preço de 75 abacaxis.

Resolução:

Chamemos abacaxis de A, mangas de M e laranjas de L. De acordo com o enunciado pode-se escrever:

$25A \Leftrightarrow 30M$

$15M \Leftrightarrow 18L$

$20L \Leftrightarrow 10B$

$12B \Leftrightarrow R\$\,2,00$

Daí

$25A \times 15M \times 20L \times 12B \Leftrightarrow 30M \times 18L \times 10B \times R\$\,2,00$

Simplificando convenientemente, teremos:

$25A \Leftrightarrow$ R\$ $3,00 \Rightarrow 75A \Leftrightarrow$ R\$ $9,00$

Resp.: R\$ $9,00$

16.5 Exercícios Propostos

1) Doze máquinas, trabalhando 8 horas por dia, fazem 9.000 m de fazenda, em 15 dias. Quanto quinze máquinas necessitarão trabalhar, por dia, para fazerem 6.000 m de fazenda em 10 dias?

2) Doze marinheiros pintaram o casco de um contratorpedeiro em 4 dias e 4 horas. Quantos marujos, de mesma capacidade de trabalho diário, serão necessários para pintar o mesmo casco em 6 dias e 6 horas?

3) Uma fábrica, funcionando 8 horas por dia, produz 75 toneladas de certo produto, em 9 dias. De quanto tempo deve ser prorrogado o trabalho diário, para que a mesma fábrica produza 65 toneladas do mesmo produto em 6 dias?

4) Um contratorpedeiro com uma guarnição de 300 homens necessita de 120.000 litros d'água para efetuar uma viagem de 20 dias. Aumentando-se a guarnição de 50 homens e a água de 6.000 litros, qual poderá ser a duração da viagem?

5) Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, fazem 40 cadeiras. Quantas horas por dia devem trabalhar 30 operários, para construírem 15 cadeiras no mesmo número de dias?

6) Certa máquina, que funciona 5 horas por dia, durante 6 dias produz, 3.000 unidades. Quantas horas e minutos deverá funcionar, por dia, para produzir 30.000 unidades em 40 dias?

7) Se 52 operários gastaram 6 dias de 8 horas para cavar 45 m de canal, quantos dias de 10 horas serão necessários para que 39 operários, que são duas vezes mais ativos que os primeiros, cavem 60 m de outro canal, sendo as dificuldades do trabalho proporcionais assim como 6 está para 5?

8) Um muro de 4 m de comprimento, 2 m de largura e 8 m de altura foi construído por 10 operários em 20 dias. Quantos dias serão necessários para

12 operários fazerem um muro de 6 m de comprimento, 1,5 m de largura e 6 m de altura?

9) Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 h por dia, fazem 36 m de tecido. Quantos dias 15 operários levarão para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, se trabalharem 6 horas por dia?

10) Seis operários gastaram 17 dias de 9 horas para cavar $9\mathrm{m}^3$ de um túnel. Quantos dias de 8 horas gastarão 5 operários, que são duas vezes mais ativos que os primeiros, para cavarem $10\mathrm{m}^3$ de outro túnel, sabendo-se que a dificuldade dos primeiros está para a dificuldade dos outros assim como 3 está para 4?

11) Uma lebre está adiantada em 60 pulos (de lebre) em relação a um cão que a persegue. Um pulo do cão vale dois de lebre e enquanto o cão dá 3 pulos, a lebre dá 5. Quantos pulos deverá dar o cão para alcançar a lebre?

12) Quinze operários, trabalhando 8 horas por dia, fizeram três quartos de uma obra em 14 dias. Tendo sido dispensados 7 operários, em quantos dias os outros terminarão a obra se trabalharem 7 horas por dia?

13) Um terreno retangular de 27 ares de área tem 3.000 cm de largura. Esse terreno deve ser cercado com um muro de dois metros de altura. Sabendo-se que cada metro quadrado do muro construído consome $300\mathrm{dm}^3$ de concreto, pergunta-se: quantos metros cúbicos de concreto serão consumidos no muro todo?

14) Para calçar um pátio de 0,75 km de comprimento e 400 dm de largura, 30 operários gastaram 45 dias. Quantos dias 50 operários levarão para calçar outro pátio de 11,5 dam de comprimento e 0,06 km de largura se a atividade da segunda turma é apenas três quintos da atividade da primeira e, ainda, a dificuldade do segundo trabalho é um terço maior que a do primeiro?

15) Doze operários, trabalhando 8 horas por dia, fazem 20 m de um muro em 10 dias. Quantas horas devem trabalhar por dia 16 operários, nas mesmas condições, para concluir em 6 dias 13 m do mesmo muro?

16) Vinte operários constróem um muro em 45 dias, trabalhando 6 horas por dia. Quantos operários serão necessários para construir a terça parte desse muro em 15 dias, trabalhando 8 horas por dia?

17) As dimensões de um terreno retangular são: $2,4$ km de comprimento e 3.200 cm de largura. Quanto custará este terreno, sabendo-se que o mesmo seja vendido a R\$ $200,00$ o are?

18) Em um pátio retangular de 500 dm por $0,4$ hm estão crianças em recreio. Havendo duas crianças por centiare, quantas crianças estão no pátio?

19) Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 300 metros. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construírem um muro de 225 metros?

20) Certa máquina, trabalhando 5 horas por dia, produz 1.200 peças em 3 dias. Quantas horas deveria trabalhar no 6º dia para produzir 1.840 peças, se o regime de trabalho fosse de 4 horas diárias?

21) Trinta operários gastaram 18 dias, trabalhando 10 horas por dia, para abrir um canal de 25 metros. Quantos dias de 12 horas de trabalho, 10 operários, que tenham o triplo da eficiência dos primeiros, gastarão para abrir um canal de 20 metros, sabendo-se ainda que a dificuldade do primeiro está para o segundo assim como 3 está para 4?

22) Em um problema de regra de três composta entre as variáveis X, Y e Z, sabe-se que quando o valor de Y aumenta, o de X também aumenta; mas quando Z aumenta, o valor de X diminui e que para $X = 1$ e $Y = 2$, $Z = 4$. Qual é o valor de X para $Y = 18$ e $Z = 3$?

23) Uma bicicleta tem uma roda de 40 cm de raio e a outra, 50 cm. Sabendo-se que a roda maior dá 120 voltas para certo percurso, quantas voltas dará a roda menor, para fazer $\frac{4}{5}$ do mesmo percurso?

24) Duas estradas de iguais dimensões começam simultaneamente a serem construídas por 15 operários cada uma. Entretanto, devido à dificuldade do terreno, percebe-se que, enquanto uma turma avança $\frac{2}{3}$ na sua obra, a outra avançou $\frac{4}{5}$. Quantos operários devem ser deslocados de uma turma para outra, afim de que as duas obras fiquem prontas ao mesmo tempo?

25) Antônio constrói 20 cadeiras em 3 dias em 4 horas de trabalho por dia. Severino constrói 15 cadeiras do mesmo tipo em 8 dias de 2 horas de trabalho

por dia. Trabalhando juntos, no ritmo de 6 horas por dia, em quantos dias produzirão 250 cadeiras?

26) Se K abelhas, trabalhando K meses do ano, durante K dias no mês e durante K horas por dia, produzem K litros de mel, qual é o número de litros de mel produzidos por W abelhas, trabalhando W horas por dia, em W dias, em W meses do ano?

27) Uma bomba eleva 240 litros de água em 8 minutos. Em 2 horas e 30 minutos, quantos litros elevará?

28) Dezesseis pedreiros, trabalhando 6 horas por dia, construíram um muro de 140 m de comprimento por 5 m de altura. Quantas horas por dia deverão 24 pedreiros trabalhar nas mesmas condições, para construírem 210 m de um muro de mesma altura, em 15 dias de trabalho?

29) Num livro de 315 páginas, há 40 linhas em cada página. Se em cada página houvesse 30 linhas, quantas páginas teria o livro?

30) Para ladrilhar $\frac{3}{4}$ de um salão, são necessários 240 ladrilhos de 25 cm por 25 cm. Quantos ladrilhos serão necessários para ladrilhar $\frac{4}{5}$ do mesmo salão?

31) As dificuldades de dois trabalhadores estão na razão de 3 para 4. Se um operário faz 20 metros do primeiro trabalho, quantos metros fará o segundo no mesmo tempo?

32) Um automóvel consome 1 litro de gasolina a cada 9 km rodados em uma estrada, a uma velocidade de 20 m/s. Ao término de 5 h 30 min de viagem, sem interrupção, o automóvel necessita ser abastecido. Quantos litros de gasolina gastará?

33) Duas rodas dentadas estão engrenadas entre si e possuem, respectivamente, 12 e 54 dentes. Quantas voltas darão a menor, enquanto a maior der 8 voltas?

34) A roda maior de uma engrenagem de 75 cm de raio dá 900 voltas, enquanto que a roda maior dá 1.000 voltas. Qual é o raio da roda menor?

35) Numa transmissão de correia, a polia maior tem 30 cm de diâmetro, e a maior, 18 cm. Qual será o número de rotações, por minuto, da polia menor, sabendo-se que a maior gira a 45 rotações por minuto?

36) Se $3,5\mathrm{m}^3$ de um metal pesam $21,7$ toneladas, qual é a massa de um bloco de $180\mathrm{dm}^3$ desse mesmo metal?

37) Uma indústria farmacêutica importa 600 litros de uma vacina e vai comercializá-la em ampolas de $25\mathrm{cm}^3$. Quantas ampolas serão necessárias para acondicionar essa vacina?

38) Deseja-se taquear uma sala retangular de 4 m de comprimento e 3 m de largura, usando-se tacos também retangulares de 15 cm de comprimento por 4 cm de largura. Quantos tacos serão necessários?

39) Um avião com uma velocidade de 580 km/h percorre certa distância em 4 horas. Que tempo, em horas, minutos e segundos, outro avião levará para percorrer a mesma distância com a velocidade de 720 km/h?

40) Um trem, com a velocidade constante de 18 m/s, percorre certa distância em $\frac{3}{5}$ da hora. Que tempo (horas e minutos) outro trem, com a velocidade de $7,2$ km/h, levará para fazer o mesmo trajeto?

41) A tripulação de um navio tem víveres para 15 dias. Apanhando um temporal em alto mar, retardou a viagem em 10 dias. A quantos da ração primitiva tiveram que reduzir a ração diária para cada tripulante?

42) Em um acampamento, 30 homens dispõem de víveres para 2 meses. Tendo chegado ao acampamento mais 90 homens, por quanto tempo o acampamento disporá de víveres?

43) Um grupo de soldados saiu para uma marcha com víveres para 12 dias. Entretanto, logo após a partida, resolveram prolongar a marcha por mais 6 dias. Para qual fração foi preciso reduzir a ração diária de cada soldado?

44) Um carro a 120 km/h consome 18 litros de gasolina para percorrer 180 km. A 80 km/h, quantos litros de gasolina consumirá para percorrer a mesma distância?

Obs.: Considere que o consumo de combustível seja proporcional à velocidade.

45) Se 6 homens montam 20 televisores em 20 dias, quantos televisores 9 homens montarão em 4 dias?

46) Dois satélites percorrem a mesma órbita em volta da Terra. O primeiro, com a velocidade de 50 km/h, gasta 1 h 20 min para dar uma volta. Se o segundo gastar apenas 50 minutos para completar a sua volta, qual deverá ser a sua velocidade?

47) Uma pessoa, que a cada minuto dá 54 passos, demora 25 minutos para percorrer certa distância. Quanto tempo levará, em minutos, para percorrer essa mesma distância, se a cada minuto der 45 passos?

48) Um ciclista precisa ir de uma cidade A até outra cidade B. Se a sua velocidade é de 18 km/h, ele leva 3 h 20 min para realizar a viagem. Em quanto tempo fará o mesmo percurso, se conseguir correr com uma velocidade igual a da velocidade primitiva?

49) Num internato, 35 pessoas gastam R$ 1.540,00 pelas refeições de 22 dias. Quanto gastariam 100 pessoas pelas refeições de 83 dias?

50) Trinta operários, trabalhando 10 horas por dia, durante 24 dias, fizeram 180 metros de fazenda. Quantos metros fariam 40 operários, trabalhando 9 horas por dia, durante 18 dias?

51) Um bloco de mármore de 3 m de comprimento, 1,50 m de largura e 0,60 m de espessura, pesa 4.320 kg. Quanto pesará outro bloco do mesmo mármore, cujas dimensões sejam 2,20 m de comprimento; 0,75 m de largura e 1,20 m de espessura?

52) Se 8 lâmpadas de certa potência, permanecendo acesas 13 noites, com três horas por noite, consomem 78 KW. Quantos KW consumirão 5 lâmpadas de dupla potência, permanecendo acesas 16 noites e 4 horas por dia?

53) Quinze operários, trabalhando 8 horas por dia, durante 30 dias, abriram uma rua de 2.000 m de comprimento e 12 m de largura. Quantas horas por dia

deverão trabalhar 20 operários em 45 dias, para abrirem outra rua de 1.500 m de comprimento e 20 m largura, nas mesmas condições?

54) Se 15 operários gastam 18 dias de 10 horas para construírem uma muralha de 20 m, quantos dias de 9 horas, 12 operários gastariam para construírem 24 m da mesma muralha?

55) Quantos operários serão necessários para construírem um canal de 42 m de comprimento, 5 m de largura e 2 m de profundidade, trabalhando 7 horas por dia, durante 70 dias se 10 operários, trabalhando 9 horas por dia, levaram 21 dias para construir outro canal de 15 m de comprimento, 3 m de largura e 4 m de profundidade, num terreno que apresentou a metade da dificuldade obtida no terreno anterior?

56) Dois quintos de um trabalho foram elaborados por 24 operários em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. Em quantos dias poderá ser terminado esse trabalho, sabendo-se que foram dispensados 4 operários e os restantes trabalham 6 horas por dia?

57) Um fazendeiro tem ração suficiente para alimentar trinta galinhas durante quarenta dias. No fim de quatro dias, compra outras seis. Oito dias após essa compra, uma raposa mata várias delas. O fazendeiro pode, então, alimentar as que restam durante trinta e seis dias. Quantas galinhas a raposa matou?

58) Um fazendeiro tem ração suficiente para alimentar 60 galinhas durante 80 dias. No fim de 8 dias compra outras 12 galinhas; 16 dias após essa compra, uma raposa mata 28 delas. Durante quantos dias poderá alimentar as que restaram, se a quantidade de ração de cada galinha continuar a mesma?

59) Um barco tem um rombo por onde a água entra a velocidade constante. Quando o rombo é descoberto já tinha entrado alguma água para o barco. Se 12 marinheiros demoram 3 horas para retirar a água e 5 marinheiros demoram 10 horas, quantos marinheiros são necessários para retirar a água em 2 horas?

60) Uma raposa tem 60 pulos de dianteira sobre um galgo que a persegue. A raposa dá 9 saltos, enquanto que o galgo dá 6; mas 3 pulos do galgo valem tanto quanto 7 da raposa. Quantos saltos darão o galgo para pegar a raposa?

61) Um cachorro persegue uma raposa que leva 25 saltos de dianteira. O cachorro dá 6 saltos, enquanto a raposa dá 8, e 4 saltos do cachorro equivalem a 7 da raposa. Quantos saltos darão o cachorro para alcançar a raposa?

62) Uma lebre leva sobre um cão a dianteira de 80 pulos. Enquanto a lebre dá 3 pulos, o cão dá 2. Quantos pulos deve dar o cão para alcançar a lebre? Obs.: Dois do cão equivalem a Cinco da lebre.

63) Sabe-se que 48 peras custam tanto quanto 56 maçãs e 7 maçãs custam R$ 3,00. Qual é o preço de 150 peras?

64) Quantas maçãs poderemos comprar com R$ 180,00, se 24 peras custam R$ 42,00; 20 delas valem tanto quanto 5 kg de uvas e o preço de 3 kg de uvas equivalem ao de 7 maçãs?

65) Novecentos e cinco litros de azeite pesam o mesmo que 1.000 litros d'água; 14 litros d'água, o mesmo que 1 litro de mercúrio; 5 litros de mercúrio, o mesmo que 140 litros de álcool; quantos litros de álcool pesarão o mesmo que 905 litros de azeite?

66) Um capitalista encontra na bolsa de valores ações de quatro indústrias, com valores diferentes, e encontra quem troque 25 ações da primeira por 30 da segunda, duas da segunda por três da terceira, três desta por cinco da quarta. Quantas ações desta última espécie pode ele obter com 1.000 ações da primeira?

67) Três dúzias de facas valem 4 dúzias de tesouras; 5 dúzias de tesouras valem 3 dúzias de cadeados. Qual é o preço de 1 dúzia de facas, se a dúzia de cadeados custa R$ 40,00?

68) Oito metros de um pano A valem 5 m de pano B; 32 m de pano B valem 8 m de pano C; 7 m de pano C valem 14 m de pano D. Quantos metros de pano D são precisos para valer tanto quanto 50 m de pano A?

69) Atendendo aos preços de custo, por unidade, observa-se que meia dúzia de peras vale 8 laranjas. Quantas maçãs poderemos trocar por meia dúzia de laranjas?

70) Cláudio comprou 10 dólares com 125 australes e Marta comprou 5 australes com 120 pesos chilenos. Assim, João pode comprar:

a) 3 dólares com 100 pesos chilenos.
b) 3.000 pesos chilenos com 10 dólares.
c) 1.200 pesos chilenos com 5 dólares.
d) 800 pesos chilenos com 2 dólares.
e) 50 dólares com 100 pesos chilenos.

71) Quinze soldados, em 9 dias, gastaram a mesma quantia que 6 oficiais em 5 dias. Quanto gastariam 13 oficiais em 8 dias, se 9 soldados gastaram R$ 108,00 em 7 dias?

72) O termômetro de Fahrenheit divide-se em 212°, mas o ponto 32° corresponde ao 0° centígrado e ao 0° Reaumur; o ponto 212° ao ponto 100° centígrado e 80° Reaumur; qual é em graus Fahrenheit o valor de 45° centígrados e 30° Reaumur?

Respostas

1) 6 **h** 24 **min**
2) 8 **marinheiros**
3) 2 **h** 24 **min**
4) 18 **dias**
5) 2 **h/d**
6) 7 **h** 30 **min**
7) 3 **d** 13 **h** 20 **min**
8) 14 **d** 1 **h** 30 **min**
9) 64 **dias**
10) 17 **dias**
11) 180 **pulos**
12) 10 **dias**
13) $144m^3$
14) 2 **d** 20 **h** 15 **min**
15) 6 **h** 30 **min/dia**
16) 15 **operários**
17) R$ 153.600,00
18) 4000 **crianças**
19) 15 **dias**

20) 3 **h/d**
21) 16 **dias**
22) 12
23) 120 **voltas**
24) 5 **operários**
25) **16 cadeiras**
26) $\frac{w^4}{k^3}$
27) 4.500 **litros**
28) 8 **h**
29) 415
30) 256 **ladrilhos**
31) 15 **m**
32) 44 **litros**
33) 36
34) 45 **cm**
35) 75 **r.p.m**
36) $1,116$ **t**
37) 24.000 **ampolas**
38) 2.000 **tacos**
39) 3 **h** 13 **min** 20 **seg**
40) 5 **h** 24 **min**
41) $\frac{3}{5}$
42) 15 **dias**
43) $\frac{2}{3}$
44) 12 **litros**
45) 6 **televisores**
46) 80 **km/s**
47) 30 **min**
48) 2 **h**
49) R$ 16.600,00
50) 162 **m**
51) 3.190 **kg**
52) 160 **kw**
53) 5 **h/d**

54) 30 **dias**
55) 18 **operários**
56) 21 **dias**
57) 14 **galinhas**
58) 72 **dias**
59) 17 **marinheiros**
60) 72 **saltos**
61) 60 **saltos**
62) 80 **pulos**
63) R$ 75, 00
64) 30 **maçãs**
65) 2.000 **l**
66) 3.000 **ações**
67) R$ 32, 00
68) **Aproximadamente** 135 **m**
69) 3
70) **b**
71) **Aproximadamente** R$ 802, 00
72) $99,5°$

Capítulo 17

Porcentagem e Misturas

17.1 Porcentagem

É o número de centésimos do valor de uma grandeza.

Ex.: $\dfrac{3}{100}$ de $\text{R\$}\,5.000,00 \Rightarrow \dfrac{3}{100} \times \text{R\$}\,5.000,00 = \text{R\$}\,150,00$

Obs.: Vê-se que a *porcentagem*[1] (R$ 150,00) também é *uma grandeza*.

17.2 Principal

É a grandeza sobre a qual se calcula a porcentagem.

No exemplo anterior, o *principal* é R$ 5.000,00

17.3 Taxa

17.3.1 Taxa centesimal ou percentual

É o numerador de toda fração cujo denominador é 100.

Ex.: Na fração $\dfrac{3}{100}$ a taxa centesimal é 3%.

[1] Em Portugal, percentagem.

17.3.2 Taxa milesimal

É o numerador de toda fração cujo denominador é 1.000.

Ex.: Na fração, $\frac{7}{1.000}$, a taxa milesimal é 7‰.

17.4 Notações

1ª) porcentagem .... p
2ª) principal .... P
3ª) taxa[2] i
4ª) taxa centesimal .... $\frac{i}{100}$ ou $i\%$, lê-se: "i" por cento.

Ex.: 3%, lê-se: três por cento.
5ª) taxa milesimal .... $\frac{i}{1.000}$ ou i‰, lê-se: "i" por mil.

Ex.: $4,37$‰, lê-se: quatro vírgula trinta e sete por mil.

17.5 Fórmula da Porcentagem

A fórmula da porcentagem é facilmente obtida através de uma regra de três simples. Vejamos:

Certa unidade monetária (real, dólar, iene, ...) está aplicada a $i\%$. Determinar o rendimento de "P" unidades monetárias.

Unidades Monetárias	*Taxa*
1	i
P	x

Vemos que as grandezas acima são "diretamente proporcionais", portanto podemos escrever:

$$\frac{1}{P} = \frac{i}{x} \therefore x = i\% \times P.$$

Como o número de centésimos de "P" é a porcentagem, poderemos substituir "x" por "p", logo:

$$p = i\% \times P$$

[2]Obs.: A letra "i", notação atribuída a palavra taxa, é proveniente da primeira letra de "income" (palavra inglesa que significa "taxa").

17.6 Taxa Centesimal Média

Dependendo do capital que se queira *tomar* emprestado, o mercado financeiro oferece taxas variadas. Às vezes, temos a necessidade de substituirmos diferentes taxas por uma única que, se aplicada sobre a soma dos capitais, gerará um total de juro igual àquela que teríamos obtido, se tivéssemos calculado a soma de parcelas, onde cada uma fosse igual ao capital multiplicado pela respectiva taxa.

Essa taxa única, equivalente à soma desses capitais, é denominada de *taxa centesimal média*[3]. ($i_m\%$) e podemos facilmente obtê-la através da *média aritmética ponderada*, onde o *numerador* é a *soma dos produtos* dos respectivos *capitais* pelas respectivas taxas centesimais (*pesos*) e o *denominador* é a *soma desses capitais.*

Assim sendo, supondo $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, vários capitais e $i_1\%$, $i_2\%$, $i_3\ \%, \ldots, i_n\%$, suas respectivas taxas centesimais, teremos:

$$i\%_m = \frac{C_1 \times i_1\% + C_2 \times i_2\% + C_3 \times i_3\% + \cdots + C_n \times i_n\%}{C_1 + C_2 + C + 3 + \cdots + C_n}$$

Ex$_1$.: Uma pessoa colocou um quarto de seu capital a 6%, metade a 3% e o restante a 10%. Determinar a taxa centesimal média.

Resolução:

Supondo "C"o capital dessa pessoa, então:

$\frac{C}{4}$ será *um quarto* de seu capital;

$\frac{C}{2}$ será a *metade* e o restante será $C - \left(\frac{C}{4} + \frac{C}{2}\right)$, ou seja, $\frac{C}{4}$.

A partir desses dados, teremos:

$$i_m\% = \frac{C4 \times 6\% + \frac{C}{2} \times 3\% + \frac{C}{4} \times 10\%}{C}$$

$$i_m\% = 5,5\%$$

Obs.: Quando tivermos N capitais iguais, ou seja, $C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_n = C$, a taxa centesimal média ficará reduzida à média aritmética simples das "N"taxas centesimais, ou seja:

[3]Simplesmente chamada de *taxa média*

$$i_m\% = \frac{C \times i_1\% + C \times i_2\% + C \times i_3\% + \cdots + C \times i_n\%}{\underbrace{C + C + C + \cdots + C}_{N}}$$

$$i_m\% = \frac{C \times (i_1\% + i_2\% + i_3\% + \cdots + i_n\%)}{C \times N}$$

Simplificando-se "C", obteremos:

$$i_m\% = \frac{i_1\% + i_2\% + i_3\% + \cdots + i_n\%}{N}$$

Ex$_2$.: Uma pessoa possui cinco parcelas de $R\$10.000,00$, aplicadas a: $8\%; 5\%; 9\%, 3\%$ e $7,5\%$, respectivamente. Determinar a taxa centesimal média, relativa a essas aplicações.

Resolução:

Como todos os capitais são iguais, aplicar-se-á a fórmula anterior. Sendo assim:

$$i_m\% = \frac{8\% + 5\% + 9\% + 3\% + 7,5\%}{5}$$

$$i_m\% = \frac{32,5\%}{5}$$

$$i_m\% = 6,5\%$$

17.7 Exercícios Resolvidos

1) Calcular 3% de $R\$\,800,00$.

Resolução:

$$\frac{3}{100} \times R\$\,800,00 = 3 \times R\$\,8,00 = R\$\,24,00$$

2) Calcular 5% de 8% de $R\$\,200.000,00$

Resolução:

$$\frac{5}{100} \times \frac{8}{100} \times R\$\,200.000,00 = R\$\,800,00$$

3) Uma mercadoria passa de $R\$\,80,00$ para $R\$\,100,00$. Determinar:

a) a porcentagem (p) relativa a esse aumento;
b) o principal (P);

c) o percentual ($i\%$) de reajuste.

Resolução:

a) $p = \text{R\$}\,100,00 - \text{R\$}\,80,00 = \text{R\$}\,20,00$
b) $P = \text{R\$}\,80,00$
c) $i\% = \dfrac{p}{P} \Rightarrow i\% = \dfrac{20}{80} = 0,25 \therefore i\% = 25\%$

4) Uma mercadoria custa P reais e sofre um reajuste de 27%. Calcular o número pelo qual devemos multiplicar P, de modo que obtenhamos o preço final da mesma, após a operação.

Resolução:

$P + 27\%P = P(1 + 0,27) = 1,27P$

Conclusão: Basta somarmos $1 + 0,27$ *e multiplicarmos a soma* $(1,27)$ *por* P.

5) Uma mercadoria cujo preço é P, sofre um reajuste de 25%. Determinar o percentual de desconto, para que a mesma retorne ao preço primitivo.

Resolução:

Após o reajuste, o preço será igual a 1,25 P.

Quer-se voltar de 1,25 P para P, portanto a porcentagem será:
$p = 1,25P - P = 0,25P$

$i\% = \dfrac{p}{P} \to i\% = \dfrac{0,25P}{1,25P} \therefore i\% = 20\%$

Resp.: O desconto deverá ser de 20%.

6) Um investimento rendeu 68% em um mês cuja inflação foi de 40%. Calcular o ganho real nesse mês.

Resolução:

Seja P certo capital e suponhamos, separadamente, os percentuais de rendimento e reajustes de inflação incidindo sobre P.

1º) $P + 60\%P = 1,68P$

2º) $P + 40\%P = 1,4P$

$i\% = \dfrac{p}{P} = \dfrac{1,68P - 1,4P}{1,4P} = \dfrac{0,28P}{1,4P} = 0,2 = 0,20$

Resp.: O ganho real foi de 20%.

7) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Calcular o número homens que devem sair, para que o percentual de homens passe a ser 98%.

Resolução:

1º) Se 99% de 100 pessoas são homens, então 99 são homens.

2º) Se x for o número de homens que devem sair, então, a nova porcentagem (p) será $99 - x$, e o novo principal (P) será $100 - x$, daí ...

$$\frac{p}{P} = i\% \rightarrow \frac{99 - x}{100 - x} = 98\% \therefore x = 50$$

Resp.: 50 homens

17.8 Exercícios Propostos

1) Coloque sob a forma $i\%$:

a) $\frac{7}{100}$

b) $\frac{3}{50}$

c) $0,03$

d) $0,6$

e) $0,015$

f) 4

g) $\frac{3}{4}$

h) $\frac{2}{5}$

i) $\frac{3}{8}$

j) $\frac{5}{4}$

k) $(2\%)^2$

l) $(20\%)^2 + (30\%)^2$

m) $(20\%^2 + 30\%)^2$

n) $1,5^2$

o) $0,25^2$

p) $\frac{27}{250}$

q) $\frac{13}{125}$

r) $\frac{53}{80}$

s) $\frac{11}{40}$

t) $\frac{0,7}{20}$

u) $0,333\ldots$

v) $2,999\ldots$

w) $\frac{9}{125}$

x) $0,2333\ldots$

2) Se X é 150% de Y, que percentual de $3X$ é $4Y$?

3) Numa eleição sindical, $\frac{1}{3}$ dos filiados votou na chapa "A", $\frac{1}{4}$ na chapa "C"e $\frac{2}{5}$ na chapa "B". Sabendo-se que todos os filiados votaram, qual foi a chapa vencedora, e qual será a taxa centesimal aproximada de votos brancos e nulos?

a) A e 7% b) A e 2% c) B e 5% d) B e 2% e) C e 5%

4) Se o seu salário subir 56% e os preços 30%, de quantos por cento aumentou seu poder de compra?

a) 20% b) 21% c) 23% d) 25% e) 26%

5) Em uma fábrica, sobre o preço final do produto, sabe-se que:
$\frac{1}{4}$ dele é salário;
$\frac{1}{5}$ dele é imposto;
25% dele representam o custo da matéria prima e restante é o lucro.

Que percentual do preço representa o lucro?

a) 15% b) 20% c) 30% d) 50% e) 46%

6) Aumentar o preço de um produto em 20% e, em seguida, conceder um desconto de 10%, equivale a aumentar o preço original de:

a) 2% b) 4% c) 6% d) 8% e) 10%

7) Uma senhora, extremamente gorda, resolveu fazer uma dieta e perdeu em 3 meses 30% de seu peso. Entretanto, nos três meses seguintes ela aumentou seu peso em 40%. No decorrer desse semestre, o peso da senhora:

a) aumentou 16% b) aumentou 10% c) manteve seu valor inicial
d) diminuiu 10% e) diminuiu 2%

8) A idade de João é inferior em 20% à de Luiz, e a de José é superior em 20% à de Luiz. Em quantos por cento a idade de José é superior à de João?

a) 50% b) 48% c) 45% d) 42% e) 40%

9) O preço de um artigo triplicou. De quantos por cento foi o aumento?

a) 3% b) 30% c) 200% d) 300% e) 400%

10) Um recipiente contém 5 litros de um combustível composto de 8% de álcool e o restante de gasolina. Para que esse porcentual passe a 20%, deve-se acrescentar de álcool no recipiente:

a) 25%   b) 50%   c) 75%   d) 100%   e) 150%

11) Dois descontos sucessivos de 10% equivalem a um único desconto de:

a) 19%   b) 20%   c) 21%   d) 22%   e) 23%

12) Uma mercadoria teve 150% de acréscimo em seu preço. Para que esta mercadoria retorne ao preço anterior, é necessário um desconto em seu preço de:

a) 150%   b) 80%   c) 60%   d) 40%   e) 30%

13) Um supermercado está fazendo a seguinte promoção: "leve 4 e pague 3". Isso equivale a conceder a quem leva 4, um desconto de:

a) 40%   b) 35%   c) 33%   d) 30%   e) 25%

14) Um atacadista compra de uma fábrica um produto e o repassam aos revendedores, obtendo lucro de 50%. Sabendo que os revendedores obtêm lucro de 100%, determine o percentual de acréscimo do preço final, em relação ao preço de fábrica.

a) 300%   b) 250%   c) 200%   d) 150%   e) 100%

15) Certo produto podia ser comprado há alguns meses por 25% do seu valor atual. Que percentual representa o aumento sofrido pelo produto neste período?

a) 25%   b) 75%   c) 125%   d) 150%   e) 300%

16) Em certa ocasião, em que o preço do petróleo teve um aumento de 60%, um país pretendeu manter inalterado o total de seus gastos com a importação desse produto. Para tanto, deve ter reduzido percentualmente o volume de suas importações de:

a) 60%   b) 40%   c) 50%   d) 62,5%   e) 37,5%

17) Numa mistura com 4,8 litros de água e 27,2 litros de álcool, qual é o percentual de água da mistura?

18) Calcule o fator pelo qual se deve multiplicar o número "A" para que o produto seja $A + 75\%$ de A.

19) Numa certa cidade cuja população é de 20.000 habitantes, a taxa de natalidade é de $2,3\%$ e a de mortalidade $1,9\%$ ao ano. Após um ano, qual será a população da cidade?

20) Uma mercadoria teve dois aumentos de preço: um em março, de 40%, e outro em outubro, de 30%. Se em fevereiro era vendida por R$ 2.800,00, qual é o seu preço agora?

21) Em um período em que os preços subiram 82%, os salários de certa categoria aumentaram apenas 30%. Para que os salários recuperem o poder de compra, em quantos por cento devem ser aumentados?

22) Um carro custa R$ 25.000,00 à vista, mas pode ser pago em duas vezes: R$ 15.000,00 de entrada e R$ 15.000,00 ao fim de 30 dias. Que taxa de juro mensal a loja está cobrando do cliente que paga em duas vezes?

23) Suponha que em dois meses um determinado título de capitalização teve seu valor reajustado em 38%. Sabendo-se que o reajuste no 1º mês foi de 15%, pode-se afirmar que, no segundo mês foi de, quantos por cento?

24) A fim de atrair a clientela, uma loja anunciou um desconto de 20% na compra à vista de qualquer mercadoria. No entanto, para não ter redução na margem de lucro, a loja reajustou previamente seus preços de forma que, com o desconto, os preços retornassem aos seus valores iniciais. Determine a taxa centesimal do reajuste feito antes do desconto anunciado.

25) Um eletrodoméstico está a venda por R$ 1.200,00 em três pagamentos: R$ 400,00 de entrada, R$ 400,00 após um mês ou R$400,00 dois meses depois. Para pagamento à vista, o comerciante dá um desconto de 2%. Supondo que a inflação tenha-se estabilizado em 2% ao mês e que mantendo o dinheiro no banco, o comprador ganha essa correção mensal, verifique qual dos dois planos é mais vantajoso - à vista ou a prazo. Explique por quê?

26) Em um período em que os preços subiram 82%, os salários de certa categoria aumentaram apenas 30%. Para que os salários recuperem o poder de compra, em quantos por cento deverão ser aumentados?

27) Certa loja oferece a seguinte promoção: Na compra de duas camisetas iguais, a segunda tem um desconto de 50%. Na promoção, comprando as duas camisetas, qual é o percentual de desconto sobre o total da compra?

28) O período de um pêndulo é diretamente proporcional à raiz quadrada do seu comprimento. Se diminuirmos o comprimento em 10%, o período diminuirá aproximadamente de:

a) 2% b) 3% c) 4% d) 5% e) 6%

29) Ao comprar certa mercadoria, uma pessoa pagou sobre o preço de custo 5% de imposto e 3% de frete. Se a mercadoria vendida por R$270,00 gera um lucro de 25% sobre o preço do custo, por quanto foi comprada?

30) Se x é $p\%$ de $k \times y$, então, que percentual de k é $\dfrac{x}{y}$?

31) Medindo-se um ângulo de $25°$ por imprecisão de um instrumento, acha-se $22°56'48''$. Qual foi o percentual de erro?

32) Um avião consome 2,3 *dal* de gasolina por minuto de vôo. Sabendo-se que:
1º) sua velocidade de cruzeiro é de 450km/h;
2º) a gasolina pesa 7 kg por litro;
3º) o avião deve transportar 60% a mais que a gasolina necessária.
Determine o número de toneladas de gasolina que deve transportar esse avião para fazer uma viagem de 1.125 km.

33) Uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 0,005 hm, 0,002 km e 30 dm, respectivamente. Sabendo-se que ela contém vinho num total correspondente a 6% de sua capacidade. Se o *dal* de vinho custa R$100,00, qual o preço do vinho contido na caixa?

34) Uma herança, depois de descontados 20% para imposto e $\frac{1}{6}$ para despesas, foi dividida proporcionalmente a $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$. O herdeiro que recebeu menos ganhou R$ 380.000,00. Qual era o valor da herança?

35) Em um tanque existem 200 litros de água salgada, com 15% de sal. Sabendo-se que a água evapora a razão de 4 litros por hora, ao fim de 16 h e 15 min, qual será a nova taxa percentual de sal na água?

36) Deseja-se ladrilhar um corredor, com 0,25 dam de largura e 0,72 m de comprimento, com ladrilhos quadrados de 20 cm de lado. Sabe-se que se deve comprar 4% a mais de ladrilhos necessários para compensar as inutilizações. Quantos ladrilhos devem ser adquiridos?

37) Calcule em graus, minutos e segundos 25% de $121°19'20''$.

38) Numa turma de 60 alunos, 50% eram de meninas. Com a saída de certo número de meninas, o percentual de meninas passou para 75%. Quantas meninas saíram?

39) Se o raio de um círculo aumenta em 40%, de quanto aumentará a área?

40) As quantias x, y e z são positivas e $x \times y$ é igual a $\frac{z}{4}\cdot$ Se aumentarmos x de 50% e diminuirmos y de 25%, de quanto precisaremos variar z para que a relação $x \times y$ seja igual a $\frac{z}{4}$?

a) z deve diminuir de $12,5\%$
b) z deve aumentar de $12,5\%$
c) z deve diminuir de 25%
d) z deve aumentar de 25%
e) z deve aumentar de 50%

41) Uma mercadoria que teve dois aumentos sucessivos, 30% e 20%, deverá ter um único desconto para voltar ao preço primitivo. Determine esse percentual.

42) Num certo país, o governo resolveu substituir todos os impostos por um único, que seria, no caso dos salários, de 20% sobre os mesmos. Para que um trabalhador receba, após o mesmo desconto, o salário que recebia antes, de quantos por cento deverá ser esse aumento?

43) Um comerciante aumentou o preço de uma mercadoria em 25%. Contudo, a procura por essa mercadoria continuou grande e ele deu um novo aumento de 10%. Como o preço ficou muito alto, a mercadoria encalhou e, além disso, como o prazo de validade estava vencendo, resolveu dar um desconto para que o preço voltasse ao primitivo. Determine esse percentual de desconto.

44) Uma pessoa pretendia comprar uma geladeira, pagando-a a vista, objetivando, assim, um desconto de 10%. Como o balconista não aceitou o seu cheque, ela pagou com 119.565 moedas de um centavo. Qual é o preço da geladeira, sem desconto?

45) Se o poder de compra de meu salário é hoje 20% daquele de um ano atrás, então, para reaver aquele poder de compra, meu salário deverá ser reajustado de quantos por cento?

46) Um trabalhador gasta com o aluguel da sua casa 25% do seu salário. Se o seu salário é corrigido em um aumento de 25% e o aluguel com aumento de 35%, então, qual será o novo percentual que o novo aluguel passará a consumir?

47) Um tribunal concedeu a certa categoria profissional um reajuste de 50% sobre o salário, descontados as antecipações. Se os trabalhadores já haviam recebido uma antecipação de 20% (sobre o salário de abril), determine o percentual de aumento obtido em junho, sobre o salário de maio.

48) No mês de janeiro de determinado ano, uma categoria profissional tem direito a um aumento salarial de 75%. Sabendo-se que a categoria teve uma antecipação de 25% em novembro, determine o percentual de acréscimo adicional do salário, para compensar a antecipação concedida.

49) O preço P de um produto sofreu um desconto de 20% no mês X. No mês Y, o preço P foi aumentado 10%. Qual é o percentual de aumento do preço deste produto, do mês X para o mês Y?

50) Uma pessoa possui, aplicadas, quatro parcelas iguais. Sendo as taxas de $11\%, 8\%, 6\%$ e 9%, qual é a taxa média?

51) Uma pessoa depositou a terça parte do que possuía a 5%, a metade a 4% e o restante a 8%. Qual foi a taxa média?

52) Uma pessoa aplicou a quarta parte de seu capital a 6%, a metade dessa quantia a 3% e o resto a 10%. Determine a taxa média.

53) Se $M > N$, então, esse percentual é obtido por:

a) $\dfrac{100(M-N)}{M}$ b) $\dfrac{100(M-N)}{N}$ c) $\dfrac{M-N}{N}$

d) $\dfrac{M-N}{M}$ e) $\dfrac{100(M+N)}{N}$

54) Após um desconto de $p\%$ sobre de uma mercadoria, qual deve ser o reajuste, de modo que a mesma retorne ao preço primitivo?

a) $p\%$ b) $\dfrac{p}{1-p}\%$ c) $(100-p)\%$

d) $\dfrac{100p}{100+p}\%$ e) $\dfrac{100p}{100-p}\%$

Respostas

1)

a) 7%
b) 6%
c) 3%
d) 60%
e) $1,5\%$
f) 400%
g) 75%
h) 40%
i) $37,5\%$
j) 125%
k) $0,04\%$
l) 13%
m) 25%
n) 225%
o) $6,25\%$
p) $10,8\%$
q) $10,4\%$
r) $66,25\%$
s) $27,5\%$
t) $3,5\%$
u) $33\frac{1}{3}\%$
v) 300%
w) $7,2\%$
x) $23\frac{1}{3}\%$

2) $0,018$

3) d

4) a

5) c

6) d

7) e

8) e

9) c

10) c

11) a

12) c

13) e

14) c

15) e

16) e

17) 15%

18) 1,75

19) 20.080

20) R$ 5.096,00

21) 40%

22) 50%

23) 20%

24) 25%

25) **subjetiva**

26) 40%

27) 25%

28) 3%

29) R$ 200,00

30) $p\%$

31) $8\frac{16}{75}\%$

32) 3,864 t

33) R$ 18.000,00

34) R$ 3.850.000,00

35) $22\frac{2}{9}\%$

36) 4.680 **ladrilhos**

37) $30°19'50''$

38) 20 **meninas**

39) 96%

40) **b**

41) 35,9%

42) 16,67%

43) 27,2%

44) R$ 132.850,00

45) 400%

46) 67%
47) 40%
48) $37,5\%$
49) $8,5\%$
50) 5%
51) $5,5\%$
52) **c**
53) **e**

17.9 Misturas

É muito comum nos depararmos com problemas que envolvem misturas de *soluções com mesmo soluto em proporções diferentes*. Estes problemas, muitas vezes, exigem um raciocínio aritmético e não apenas químico.

Vejamos alguns exemplos para melhor elucidarmos esta questão.

Ex$_1$.: Um galão X com 30% de uma solução é misturado a outro galão Y, com 45%, para formar uma solução com 42%. Determinar a razão $\frac{X}{Y}$.

Resolução:

De acordo com os dados, podemos escrever:

$$30\% \text{ de } X + 45\% \text{ de } Y = 42\% \text{ de } (X+Y)$$

$$0,42X - 0,30X = 0,45Y - 0,42X$$

$$0,12X = 0,03Y \Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{1}{4}$$

Ex$_2$.: Determinar o número de litros de suco de laranja a 5%, que devem ser acrescentados a um suco de mamão a 10%, para obtermos 10 litros de um suco de mamão-laranja a 8%.

Resolução:

X .... suco de laranja
Y .... suco de mamão

De acordo com o enunciado, teremos:

$$\begin{cases} 5\% \text{ de } X + 10\% \text{ de } Y = 8\% de 10l \\ X + Y = 10l \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,05X + 0,1Y = 0,8 \\ -0,1X - 0,1Y = -1 \end{cases} \Rightarrow X = 4 \text{ litros e } Y = 6 \text{ litros}$$

Resp.: 4 litros

Ex$_3$.: Um radiador contém 20 litros de uma solução com 25% de anticongelante. Determinar o número de litros que devem ser substituídos, para que o radiador passe a ter 50% de anticongelante.

Resolução:

$25\%\text{de}20l - 25\%\text{de}X + X = 50\%\text{de}20l$

$5l + 75\%X = 10l$

$$0,75X = 5l \therefore X = \frac{20}{3}\,l$$

Resp.: $\dfrac{20}{3}\,l$

Ex$_4$.: Um pedaço de liga de cobre e prata contém 5% de cobre e tem massa igual a 4 kg. Determinar a massa de cobre que deve ser acrescentada, para obtermos uma liga que contenha 2% de prata.

Resolução:

Se 5% é de Cobre $\Rightarrow$ 95% é de prata.

95% de 4 kg $= 3,8$ kg

Seja m a massa a ser acrescentada.

$$\frac{3,8 + m}{4 + m} = \frac{98}{100}$$

$380 + 100m = 392 + 98m$

$2m = 12$

$m = 6$

Resp.: 6 kg.

Ex$_5$.: Uma solução tem 75% de ácido puro. Determinar o número de gramas de ácido puro que deve ser acrescentada a 48 g da solução, para que a nova solução contenha 76% de ácido puro.

Resolução:

1º) 75% de 48 g =36 g

2º) Se acrescentarmos x gramas de ácido, implicará um aumento de x gramas na solução.

solução: $48 + x$
ácido puro: $36 + x$

3º) Como desejamos que o novo percentual na solução seja igual 76% de ácido puro, teremos:

$$\frac{36+x}{48+x} = 76\% \Rightarrow x = 2$$

Resp.: 2 gramas

Ex$_6$.: Uma liga contém 80% de ouro e uma outra contém 55% de ouro. Ambas são combinadas para fazerem 40 gramas de uma liga com 70% de ouro. Quantos gramas da liga a 80% foram usados?

Resolução:

Seja "x"a quantidade de gramas a serem usadas da liga de 80% de ouro e "y"a quantidade de gramas a serem usadas da liga de 80% de ouro.

De acordo com o enunciado, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 80\% \,\text{de}\, x + 55\% \,\text{de}\, y = 70\% \,\text{de}\, (x + y) \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema $x = 24g$ e $y = 16g$
Resp.: 24 gramas

17.10 Exercícios Propostos

1) Quantos gramas de álcool devem ser acrescentados a 10 g de uma solução, com 85% de gasolina a fim de obtermos uma mistura com 25% de álcool?

2) Quantos gramas de água devem ser acrescentados a 50 g de uma solução, com 36% de ácido sulfúrico, para obtermos uma solução com 20% desse ácido?

3) Quantos litros de água devem ser evaporados de 50 gramas de uma solução com 3% de sal, para que a mesma tenha 5% de sal?

4) Quantos litros de uma solução de ácido a 40% devem se misturar com uma solução a 15%, para obtermos 30 litros de uma solução a 20%?

a) 4 b) 2 c) 6 d)7 e) 10

5) Uma argila contém 45% de sílica e 10% de água. Determine o percentual de sílica e de argila em uma base seca?

6) Tem-se disponível 60 litros de uma solução com 50% de glicerina e água. Quantos litros de água devem ser acrescentados, para reduzir a concentração de glicerina a 12%?

7) Um carvão contém $2,4\%$ de água. Após secar, a mistura livre contém 71% de carbono. Determine o percentual de carbono na base molhada.

8) Em 1 litro existem 75% de álcool e 25% de água. Quantos litros de água devem ser acrescentados à mistura, para obtermos um volume de 45% de álcool e 55% de água?

9) Quantos litros de leite com gordura a 4% devem ser acrescentados ao leite com gordura a 1%, para obtermos 12 litros de leite com 2% de gordura?

a) 3 litros b) 4 litros c) 8 litros d) 9 litros e) nenhuma

10) Uma mina tem disponível 10 t de carvão contendo $2,5\%$ de enxofre uma fonte contendo $0,8\%$ e $1,10\%$ de enxofre, respectivamente. Quantas toneladas de cada fonte devem ser misturadas com as 10 t originais, para obtermos 20 t de carvão a $1,7\%$ de enxofre?

11) Numa experiência científica, você está tentando separar açúcar de uma solução, através de aquecimento e evaporação da água. A massa da solução é 2 kg contendo 90% de água e 10% de açúcar. Qual será a massa da solução, se depois de algum tempo você tem 85% de água?

12) Uma enfermeira necessita de 10cm^3 de um remédio que contenha $15,5\%$ de certa substância A. Para compor esse remédio ela mistura x cm^3 de uma solução contendo 20% de A e y cm^3 de uma solução contendo 5% de A. Então:

a) $x \leq 6,5$ b) $6,5 < x \leq 6,8$ c) $6,8 < x \leq 7$
d) $7 < x < 7,2$ e) $7,2 < x$

13) Um tanque A contém 32 litros de uma solução com 25% de álcool. Um tanque B tem 50 litros de uma solução com 40% de álcool. Quantos litros devem ser retirados de cada tanque, a fim de se obter 60 litros de uma solução contendo 30% de álcool?

14) Um tanque contém 80 litros de álcool e água, com 40% de álcool. Quantos litros devem ser retirados da mistura e repostos de água, para se obter uma solução restante com 25% de álcool?

15) Um químico tem uma solução composta por 5 litros de propanol e 17 litros de água. Ele deseja transformar a solução para 40% de propanol, acrescentando z litros de propanol. Qual das seguintes equações ele deve usar para obter o valor de z?

a) $\dfrac{5}{z+17} = \dfrac{40}{100}$ b) $\dfrac{z+5}{22} = \dfrac{40}{100}$ c) $\dfrac{z+5}{17} = \dfrac{40}{100}$

d) $\dfrac{z+5}{z+17} = \dfrac{40}{100}$ e) $\dfrac{z+5}{z+22} = \dfrac{40}{100}$

16) Um tanque de 100 litros contém 50 litros de uma solução com 25% de soro. Quantos litros de uma solução com 75% de soro você necessita para acrescentar ao tanque, para obter uma solução com 30% de soro?

17) Uma solução pesando 600 kg é composta de 100 kg de cobre e 50 kg de latão. Um outro galão contendo 1000 kg é composto por 300 kg de cobre e 150 kg de latão. Que quantidade de cobre e latão deve ser dissolvido com essas ligas, para obtermos uma 3ª liga contendo 32% de cobre para 28% de latão?

18) Dois minérios de manganês, que não se misturam, têm 40% e 25% de manganês, respectivamente. Quantas toneladas de cada um devem ser misturadas, para obtermos 120 t de minério contendo 35% de manganês?

19) Um tanque A contém uma mistura com 40 litros de água e 20 litros de álcool puro. Um tanque B tem 50 litros de água e 15 litros de álcool puro. Quantos litros de álcool devem ser retirados de cada tanque e misturados, de modo que se obtenha 30 litros de uma solução contendo 25% de álcool de volume?

20) Um tanque A contém 90 litros de uma solução com 25% de álcool. Um tanque B tem 150 litros de uma solução com 40% de álcool. Quanto deve ser retirado de cada tanque e misturado, de modo a obter 120 litros de uma solução contendo 30% de álcool?

21) Os minérios X e Y possuem, respectivamente, 72% e 58% de ferro. Uma mistura desses dois minérios gerou um terceiro, possuindo 62% de ferro. Qual é a razão do minério da mina X para o da mina Y?

22) Dois minérios A e B têm 64% e 48% de ferro, respectivamente. Uma mistura desses minérios gerou um 3º com 50% de ferro. Qual é o percentual que representa a razão da mina B para a mina A?

23) X litros de uma solução com 20% de ácido puro são misturados com 4 litros de ácido puro, resultando uma nova mistura com 25% de ácido. Quantos litros do total (X) tinham na solução original, antes que o ácido puro fosse adicionado?

a) 15 litros b) 24 litros c) 60 litros d) 80 litros e) 95 litros

24) Uma solução contém 20% de cobre e 5% de latão. Quantos gramas de cobre e de latão devem ser misturados a 100 g dessa liga, para produzir outra liga, contendo 30% de cobre e 10% de latão?

25) Um radiador de automóvel tem 6 litros de líquido e contém um líquido que é 30% anticongelante. Quantos litros deste líquido devem ser substituídos por anticongelante puro para obtermos uma mistura que é 50% anticongelante?

a) 2 b) $\frac{12}{7}$ c) $\frac{4}{3}$ d) 3 e) 1

26) Durante o inverno, um radiador contém uma mistura que é 70% anticongelante e 30% de água. Preparando-se para a primavera, quantos litros de anticongelante deverão ser substituídos, por água, para que o radiador contenha 16 litros com 55% de anticongelante e 45% de água?

27) Maria fez d litros de refresco que têm $d\%$ de suco de laranja. Quantos litros de laranja ela deve acrescentar para obter um ponche com $3d\%$ de suco de uva?

a) $\dfrac{d^2}{100-3d}$ b) $\dfrac{2d^2}{100-3d}$ c) $\dfrac{d}{100+3d}$

d) $\dfrac{3d^2}{100+d}$ e) nenhuma

28) Certo tipo de motor usa uma mistura de combustível formada por 15 partes de gasolina e uma de azeite. Calcule a quantidade de gasolina que se deve acrescentar a uma mistura de azeite-gasolina, com 75% de gasolina, para se obter 8 litros de uma mistura desejada para este tipo de motor.

29) O coquetel preferido de João tem 15% de álcool e é uma mistura de tequila e cerveja. No bar, onde pediu que lhe preparassem esse coquetel, a tequila e a cerveja tinham, respectivamente, 40% e 5% de álcool. Calcule a razão entre os volumes de tequila e cerveja usada nessa mistura.

30) Se você adiciona 1 litro de água em uma solução de ácido e água, a nova concentração de ácido será de 20%. Se você adicionar mais 1 litro de ácido à

nova solução, a nova concentração será de 33% de ácido. Qual era concentração de ácido na solução primitiva?

31) Um recipiente contém uma mistura de leite natural e de leite de soja, num total de 2litros, dos quais 25% são de leite natural. Qual é a quantidade de leite de soja que deve ser acrescentada a essa mistura, para que ele venha a conter 2% de leite natural?

32) Considere um soro glicosado a 5%, quando para 100 *ml* de soro tem-se 5 g de glicose. Com dois soros X e Y, respectivamente, glicosado a 5% e 23%, deseja-se obter 3 litros de uma mistura com 8% de glicose. Portanto, necessita-se, em litros, de um volume de soro X igual a:
a) $2,5$ b) $2,3$ c) $2,1$ d) $2,0$ e) $1,8$

33) Quer-se obter 100 litros de álcool a 74%, misturando 30 litros de álcool a 80%, com quantidades convenientes de álcool puro e água. Que quantidades haverão de álcool puro e de água?

34) Um químico tem m gramas de água e sal, com $m\%$ de sal. Quantos gramas de sal ele deve acrescentar, para fazer uma solução que seja $2m\%$ de sal?

a) $\dfrac{m}{100+m}$ b) $\dfrac{2m}{100-2m}$ c) $\dfrac{m^2}{100+2m}$
d) $\dfrac{m^2}{100-2m}$ e) nenhuma

35) Quantos milímetros de uma solução que é 30% ácida, devem ser acrescentados a 20 milímetros de uma solução que é 60% ácida, de modo que se obtenha uma solução que seja 50% ácida?

36) Um químico necessita de 12 litros de uma solução ácida, para um solvente em um laboratório. O lugar de estoque tem 40% de 80% de solução ácida que o químico necessita, para produzir 50% da solução. Quantos litros da solução a 80% o químico vai necessitar?

37) Um químico tem um recipiente de $10cm^3$ com 20% de ácido. Ele acrescenta ácido puro para fazer uma solução com $33\frac{1}{3}\%$ de ácido. Quantos cm^3 de água ele deve adicionar para obter 20% de ácido?

38) Uma mistura contém 200 litros de azeite a R\$ $0,63$ o litro e certa quantidade de azeite a R\$ $0,48$ o litro. Ache essa quantidade, sabendo que o litro da mistura vale R\$ $0,54$.

a) 225 litros b) 250 litros c) 275 litros
d) 300 litros e) 325 litros

39) Uma liga de ouro e cobre contém 9 partes de ouro para 12 de cobre. Outra liga, também de ouro e cobre, tem 60% de ouro. Para se obter uma liga com 36 gramas e partes iguais de ouro e cobre, devemos tomar das ligas iniciais:
a) 12 g da 1ª e 24 g da 2ª ;
b) 24 g da 1ª e 12 g da 2ª ;
c) 18 g cada uma;
d) 21 g da 1ª e 15 g da 2ª ;
e) 16 g da 1ª e 20 g da 2ª ;

40) O custo para a fabricação de cada litro de suco de laranja é R$ 3,20, enquanto que o custo para a fabricação de cada litro de suco de mamão é R$ 2,50. Na festa da escola irão servir a mistura dos dois sucos, que sai ao custo de R$ 2,90 por litro. Calculando essas proporções, conclui-se que cada litro de suco misturado contém L de suco de laranja e M de suco de mamão. Determine L e M.

41) Certo leite que contém 5% de gordura, foi misturado com um outro contendo 2% de gordura. Quanto é necessário de cada um, para se obter 60 kg de leite contendo 3% de gordura?
a) 20 kg com 2% de gordura e 40 kg com 5% de gordura.
b) 40 kg com 2% de gordura e 20 kg com 5% de gordura.
c) 25 kg com 2% de gordura e 30 kg com 5% de gordura.
d) 30 kg de cada.
e) Não há com determinar com as informações fornecidas.

42) Uma pepita de ouro e quartzo pesa 100 g. O ouro pesa $19,3\text{g}/\text{cm}^3$, o quartzo pesa $2,6\text{g}/\text{cm}^3$ e a pepita, $6,4\text{g}/\text{cm}^3$. Ache a massa (em gramas) da pepita de ouro.

43) Um lingote de ouro e prata pesa 2 kg. Ao ser submergido em água, sofre uma perda de peso de 125 g. Qual é a composição do lingote, sabendo que os pesos específicos do ouro e da prata são $19\text{g}/\text{cm}^3$ e $10,5\text{g}/\text{cm}^3$, respectivamente?

44) Duas jarras iguais contêm uma mistura de álcool e água nas proporções de 3 : 7 na 1ª jarra e 3 : 5 na 2ª jarra. Juntando-se os conteúdos das duas jarras, obteremos uma mistura de álcool e água em que proporção?

45) Duas jarras X e Y contêm álcool e água. Na solução X, a razão de álcool para água é $\frac{2}{3}\cdot$ Quando quantidades iguais das soluções X e Y são misturadas, a razão de álcool para a água é $\frac{3}{4}\cdot$ Qual é a razão de álcool para água na solução Y?

a) $1:1$ b) $9:26$ c) $10:25$
d) $10:24$ e) $16:19$

46) Um tanque contém 1.000litros, dos quais 50 litros é uma solução com 25% de soro. Se o enchermos com uma solução de soro a 75%, quantos litros de uma solução a 75% você precisa acrescentar ao tanque, para ter uma solução de soro a 30%?

47) Duas jarras idênticas contendo soluções de água e álcool atende as seguintes condições: o volume de álcool na primeira está para o volume de água assim como p está para 1 e na outra jarra esta razão é igual a $q:1$. Se os conteúdos das jarras são misturados, a razão do volume de álcool para o volume de água na mistura é:

a) $\frac{p+q}{2}$ b) $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ c) $\frac{2pq}{p+q}$
d) $\frac{2(p^2+pq+q^2)}{3(p+q)}$ e) $\frac{p+q+2pq}{p+q+2}$

48) Considere uma mistura de gasool (gasolina + álcool), contendo 90% de gasolina e 10% de álcool, que custa 5% mais que a gasolina pura. Suponha que o preço da gasolina na mistura dobre de valor, enquanto o preço do álcool produzido permaneça fixo. Então, quantos por cento menos que a gasolina, a mistura de gasool custará?

49) Uma loja de jardinagem possui estocada uma solução com 7% de herbicida e outra com 15%. Quantos galões da solução a 7% devem ser misturados com a solução a 15%, para produzir 40 galões de uma solução a 12%?

a) 5 galões b) 6 galões c) 7 galões
d) 8 galões e) 9 galões

Respostas

1) $1,3$ **g aproximadamente**

2) 40 **g**

3) 20 **g**

4) c

5) 50%

6) $190\,l$

7) $69,296\%$

8) $2/3l$

9) b

10) $60/7$ **e** $80/7$

11) $4/3$ **g**

12) c

13) $40\,l$ **e** $20\,l$

14) $30\,l$

15) b

16) $50/9$

17) 400 **kg de cobre e** 500 **g de latão**

18) 80 **t e** 40 **t**

19) $5,625$ **t e** $24,375$ **t**

20) $80\,l$

21) $2/5$

22) 700%

23) c

24) $17,5$ **g de cobre e** $7,5$ **g de latão**

25) b

26) $\cong 3,43\,l$

27) b

28) $6\,l$

29) $2/5$

30) 25%

31) $23\,l$

32) a

33) $50\,l$ de álcool e $20\,l$ de água

34) b

35) 10 ml

36) $8\,l$

37) $2mm^3$

38) b

39) d

40) $L = 2/7$ e $M = 3/7$

41) b

42) $68,7$ g

43) 1537 g de ouro e 463 g de cobre

44) $27/33$

45) b

46) $\cong 638,89\,l$

47) e

48) $2,5\%$

49) c

Capítulo 18

Operações Sobre Mercadorias

São problemas que envolvem compra e venda de mercadorias, onde são levados em consideração o lucro ou prejuízo sobre as mesmas.

18.1 Preço de Custo, Preço de Compra e Preço de Venda

Para entendermos cada um desses conceitos, devemos partir de um simples exemplo. Admita um industrial que fabrique sapatos e receba de um comerciante uma encomenda de 1.000 pares. Como fazer para calcular o preço de *um par*?

Sabe-se que para fabricar sapatos, temos que levar em consideração as matérias primas (couro, linha, tinta, ...), os salários, a energia consumida, etc. Portanto, se dividirmos o capital gasto com esses ítens, por 1.000 pares de sapatos, temos então o *custo* de *um par* de sapatos.

Se esse industrial *vender* esses sapatos, obviamente terá que acrescentar sobre o preço de custo certa porcentagem, assim como, se o comerciante vendê-los, deverá acrescentá-la sobre o preço de compra.

18.2 Notações

Indicaremos o *preço de custo* e o *preço de compra*, indiferentemente através da letra C e o *preço de venda* pela letra V.

18.3 Análise Sobre a Venda

Ao vendermos uma mercadoria, temos três casos a considerar:

1º) a venda com lucro ($V > C$);
2º) a venda sem lucro ou prejuízo ($V = C$);
3º) a venda com prejuízo ($V < C$).

18.3.1 Vendas com Lucro

Se a venda for com lucro (L), podemos escrever que $V = C + L$, onde o lucro será uma porcentagem (p) calculada sobre o preço de *custo*, sobre o preço de *compra* ou sobre o preço de venda.

18.3.2 Fórmulas da Venda com Lucro

1º caso: A taxa centesimal aplicada sobre o preço de custo ou de compra
Se $V = C + p \rightarrow V = C + i\% \times C$

2º caso: A taxa centesimal aplicada sobre o preço de venda
Se $V = C + p \rightarrow V = C + i\% \times V$

18.4 Vendas com Prejuízo

Sendo a venda com prejuízo (p), podemos escrever que $V = C - p$, onde o prejuízo também é uma *porcentagem*.

18.4.1 Fórmulas da Venda com Prejuízo

1º caso: A taxa centesimal aplicada sobre o preço de custo ou de compra
Se $V = C - p \rightarrow V = C - i\% \times C$

2º caso: A taxa centesimal aplicada sobre o preço de venda
Se $V = C - p \rightarrow V = C - i\% \times V$

Obs.: Vemos que existem quatro fórmulas e que, em cada uma existem 12 problemas que podem ser resolvidos com a aplicação das mesmas.

18.5 Exercícios Resolvidos

1) Certa mercadoria custa R$ 9.000,00. Calcular o preço da venda, para que haja um lucro de 10% sobre o mesmo.

Resolução:

$V = C + i\% \times V$
$V = 9.000 + 10\% \times V$
$V - 0,1 \times V = 9.000$
$0,9 \times V = 9.000$

$$V = \frac{9.000}{0,9}$$

$V = 10.000$

Resp.: R$ 10.000,00

2) Calcular o lucro obtido na questão anterior.

Resolução:

$L = 10\% \times V; \;\; V = 10.000$
$L = 10\% \times 10.000$
$L = 1.000$
Resp.: R$ 1.000,00

3) Uma pessoa vendeu certa mercadoria por R$ 1.800,00, tendo um prejuízo de 10% sobre o preço de venda. Determinar o preço de custo dessa mercadoria.

Resolução:

De acordo com os dados, podemos escrever que: $V = C - i\% \times V$
Substituindo os dados, convenientemente, teremos: $1.800 = C - 10\% \times 1.800$
Portanto, $C = 1.800 + 0,1 \times 1.800$
$C = 1.800 + 180$
$C = 1.980$
Resp.: R$ 1.980,00

4) Ao vender um objeto por R$ 1.200, 00, uma pessoa teve um lucro de 20% sobre o preço de custo. Determinar o preço de custo desse objeto.

Resolução:

De acordo com o enunciado, teremos:
$V = C + i\% \times C$
Substituindo os dados do problema, virá:
$1.200 = C + 20\% \times C \Rightarrow C = 1.000$

Resp.: R$ 1.000, 00

5) Dois objetos custaram R$ 3.000, 00 e foram vendidos por R$ 3.690, 00. Determinar o preço de cada um, sabendo que o primeiro e o segundo deram um lucro sobre o preço de custo de 30% e 18%, respectivamente.

Resolução:

Se os objetos custaram R$ 3.000, 00 e foram vendidos por R$ 3.690, 00, significa que houve um lucro de R$ 690, 00.
Seja:
L_1 .... o lucro do 1º ; C_1 .... custo do primeiro
L_2 .... o lucro do 2º ; C_2 .... custo do segundo

De acordo com o enunciado, $L_1 = 30\% \times C_1$ e $L_2 = 18\% \times C_2$. Assim sendo, podemos escrever:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3.000 \\ 0,3\, C_1 + 0,18\, C_2 = 690 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, pelo melhor método que nos aprouver, encontraremos:
$C_1 = 1.250$ e $C_2 = 1.750$

Resp.: R$ 1.250, 00 e R$ 1.750, 00

18.6 Exercícios Propostos

1) Uma mercadoria foi comprada por R$ 50, 00 e vendida com um lucro de 15% sobre o preço de compra. Determine o preço de venda.

2) Um objeto foi vendido por R$ 80, 00, dando um lucro de 20% sobre o preço de custo. Qual foi o preço de custo desse objeto?

3) Um brinquedo foi comprado por R$ 8,00 e vendido por R$ 10,00. De quantos por cento foi o lucro sobre de compra?

4) Um objeto foi comprado por R$ 80,00 e vendido com um lucro de 15% sobre o preço de venda. Qual foi o preço de venda?

5) Uma mercadoria foi vendida por R$ 40,00, dando um lucro de 5% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de compra?

6) Ao vender uma mercadoria por R$ 25,00, um comerciante teve certo lucro sobre o preço de venda. Sabendo que a mesma foi comprada por R$ 20,00, de quantos por cento foi esse lucro sobre o preço de venda?

7) Um objeto foi comprado por R$ 70,00 e vendido com um prejuízo de 30% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de venda?

8) Um livro foi comprado por R$ 25,00 e vendido com um prejuízo de 5% sobre o preço de venda. Qual foi o preço de venda?

9) Uma bicicleta foi vendida por R$ 100,00, dando ao comerciante um prejuízo de 5% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de compra?

10) Uma camisa vendida por R$ 100,00 deu um prejuízo de 5% sobre o preço de venda. Determine o preço de compra.

11) Ao vender uma calça por R$ 120,00, uma loja teve certo prejuízo sobre o preço de venda. De quantos por cento foi esse prejuízo, sabendo que o preço de custo da mesma foi de R$ 180,00?

12) De quantos por cento sobre o preço de custo deverá ser o prejuízo de uma pessoa, ao vender por R$ 50,00 uma mercadoria que custou R$ 70,00?

13) Na venda de certo objeto, houve um lucro de R$ 12,00 correspondente a 16% do preço de custo. Qual foi o preço de custo desse objeto?

14) Vendi um objeto por R$ 544,00 com um lucro de 28% sobre o seu preço de custo. Por quanto comprei o referido objeto?

15) Por R$ 7.500,00 vendi um terreno com 25% de prejuízo sobre o preço de custo. Por quanto comprei o terreno?

16) Vendi um relógio por R$ 3.750,00 e, nesse negócio, perdi 10% do custo. Quanto me custou o relógio?

17) Uma mercadoria foi comprada por R$ 20000,00. Para que haja um lucro de 60% sobre o preço de venda, por quanto devemos vendê-la?

18) Um vendedor sempre coloca seus produtos à venda com um lucro de 70% sobre o preço de custo. Se o preço de custo de certo produto aumentou em R$ 170,00, o que corresponde a 20% do preço que tal produto era vendido, qual é o novo preço?

19) Dois objetos custaram R$ 3.680,00 e foram vendidos por R$ 4.000,00. Calcule o preço de cada um deles, sabendo que o primeiro deu um lucro de 15% sobre o preço de venda, e o segundo um lucro de 5%, também sobre o preço de venda.

20) Dois objetos custaram R$ 1.000,00 e foram vendidos por R$ 1.046,00. Calcule o preço de cada um deles, sabendo que o primeiro deu um lucro de 20% sobre o preço de custo, e o segundo um prejuízo de 15%, também sobre o preço de custo.

21) Certa mercadoria foi vendida por R$ 2.520,00, dando um lucro de 20% sobre o preço de custo ao vendedor. Quanto lhe custou a mercadoria?

22) Uma pessoa adquiriu uma bicicleta por R$ 400,00, e a revendeu com um lucro de 20% sobre o preço de venda. Por quanto revendeu?

23) Uma mercadoria foi comprada por R$ 140,00. Por quanto deve ser vendida para dar um lucro de 20% sobre o preço de venda, sabendo-se ainda que deve ser pago um imposto de 10% sobre o preço de venda?

24) João vendeu dois rádios por preços iguais. Um deles foi vendido com um lucro de 20%, e o outro, com um prejuízo de 20%, ambos sobre o preço de custo. No total, em relação ao capital investido, João:

a) lucrou 4% b) lucrou 2% c) perdeu 4%
d) perdeu 2% e) não lucrou ou perdeu

Respostas

1) R$ 57, 50
2) R$ 66, 67
3) 25%
4) R$ 94, 12
5) R$ 38, 10
6) 20%
7) R$ 49, 00
8) R$ 23, 81
9) R$ 105, 26
10) R$ 105, 00
11) 50%
12) 28, 57%
13) R$ 75, 00
14) R$ 425, 00
15) R$ 10.000, 00
16) R$ 4.166, 67
17) R$ 50.000, 00
18) R$ 1.139, 00
19) R$ 1.020, 00 e R$ 2.660, 00
20) R$ 560, 00 e R$ 440, 00
21) R$ 2.100, 00
22) R$ 500, 00
23) R$ 200, 00
24) b

Capítulo 19

Juros Simples

19.1 Juro

É a quantia que se paga ou se recebe por um capital emprestado.

No cálculo do juro, além do *capital*, também são levados em consideração a *taxa* e o *tempo*.

19.1.1 Notações

1ª) juro(s) ....j
2ª) capital c
3ª) taxa i
4ª) tempo .... t

19.2 Fórmula do Juro ao Ano ($j_{a.a}$)

A fórmula do juro pode ser obtida a partir de um problema resolvido através de uma regra de três composta, vejamos:

Se 100 unidades monetárias em 1 ano dão-nos um rendimento i, quanto renderá um capital c em t anos?

Resolução:

Capital	*Tempo[ano(s)]*	*Rendimento*
100	1	i
c	t	x

Como as *grandezas principais* (*capital* e *tempo*) são *diretamente proporcionais* ao rendimento, teremos:

$$\frac{i}{x} = \frac{100}{c} \times \frac{1}{t}$$

$$100 \times x = c \times i \times t$$

$$x = \frac{c \times i \times t}{100}$$

Como o rendimento (x) é sinônimo de juro (j), teremos:

$$j_{a.a} = \frac{c\,i\,t}{100} \text{........ (I)}$$

19.3 Fórmula do Juro ao Mês ($j_{a.m}$)

Como 1 ano tem 12 meses, teremos:

$$j_{a.m} = \frac{j_{a.a}}{12}$$

$$j_{a.m} = \frac{\frac{c\,i\,t}{100}}{12}$$

$$j_{a.m} = \frac{c\,i\,t}{1200} \text{ .... (II)}$$

19.4 Fórmula do Juro ao Dia ($j_{a.d}$)

Para o cálculo do juro ao dia, considera-se o ano comercial (ou bancário), isto é, 360 dias. Sendo assim, podemos escrever:

$$j_{a.d} = \frac{j_{a.a}}{360}$$

$$j_{a.d} = \frac{\left(\frac{c\,i\,t}{100}\right)}{360}$$

$$j_{a.d} = \frac{c\,i\,t}{36.600} \text{........ (III)}$$

Obs.: Quem vai definir uma dessas fórmulas é o período de aplicação (tempo), ou seja:

- em ano(s) utilizaremos a fórmula (I);
- mês ou meses, a fórmula (II), e
- dia(s) a fórmula (III).

Notas:

1ª) Ao aplicarmos uma dessas três fórmulas, devemos sempre explicitar a taxa centesimal ao ano.

2ª) Podemos trabalhar também com qualquer uma, desde que a taxa e o tempo sejam expressos na mesma unidade.

Exemplos:

1) 2% a.m $= 2\% \times 12 = 24\%$ a.a

2) $0,03\%$ a.d $= 0,03\% \times 360 = 10,8\%$ a.a

19.5 Montante

Denomina-se montante (M) *a soma obtida do capital* (c) *com o juro* (j). *De acordo com essa definição, podemos escrever:*

$$M = c + j$$

19.6 Exercícios Resolvidos

1) Determinar o juro produzido por R\$ $10.000,00$, aplicados a 2% a.m, durante 90 dias.

1ª) *Resolução*:

$t = 90$ dias $\Rightarrow j = \dfrac{c\,i\,t}{36.000}$

$i\% = 2\%$ a.m ou $i\% = 24\%$ a.a, logo,

$j = \dfrac{10.000 \times 24 \times 90}{36.000} = 600$

Resp.: R\$ $600,00$

2ª) *Resolução*:

$j = \frac{c\,i\,t}{100} \begin{cases} t = 90d = 3m \\ i\% = 2\% a.m \end{cases}$, logo,

$j = \frac{10.000 \times 2 \times 3}{100}$

$j = 600$

Resp.: R\$ 600,00

2) Determinar o juro produzido por R\$ 50.000,00, quando aplicados a 2% a.m, em 8 meses.

Resolução:

Se $t = 8m \Rightarrow j = \frac{c\,i\,t}{1.200}$

$c = 50000;\ i\% = 2\%\ a.m = 24\%\ a.a \therefore i = 24$

Daí, $j = \frac{50.000 \times 24 \times 8}{1.200} \Rightarrow j = 8.000$

Resp. R\$ 8.000,00

3) Um capital aplicado a 1,5% ao mês rende em 2 anos, R\$ 3.600,00 de juro. Determinar esse capital.

Resolução:

Se $t = 2a \rightarrow j = \frac{c\,i\,t}{100} \begin{cases} c = R\$\,3.600,00 \\ i\% = 1,5\%\ a.a = 1,5\% \times 13 = 18\%\ a.a \end{cases}$

Substituindo esses dados na fórmula (I), teremos:

$3.600 = \frac{c \times 18 \times 2}{100} \therefore c = 10.000$

Resp.: R\$ 10.000,00.

4) Achar a taxa percentual que se deve aplicar R\$ 72.000,00, de modo que em 1 mês e 15 dias, renda R\$ 2.700,00 de juro.

Resolução:

Se $t = 1m\,15d \Rightarrow t = 45\ d \rightarrow j = \frac{c\,i\,t}{36.000} \begin{cases} c = R\$\,72.000,00 \\ i\% = ? \\ t = 45 \text{ dias} \\ j = R\$\,2.700,00 \end{cases}$

Substituindo esses dados na fórmula, teremos:

$2.700 = \dfrac{72.000 \times i \times 45}{36.000} \Rightarrow i\% = 30\%$ a.a ou
$i\% = 2,5\%$ a.m

Resp.: $2,5\%$ a.m

5) Determinar o número de dias que devemos aplicar R\$ 80.000,00, a $0,1\%$ a.d, de modo que produza R\$1.600,00 de juro.

Resolução:

Se o tempo desejado é, em dias, podemos escrever que

$$j = \frac{c\,i\,t}{36.000}$$

$$\begin{cases} c = \text{R\$}\,80.000,00 \\ j = \text{R\$}\,1.600,00 \\ i\% = 0,1\%\ a.d \times 360 = 36\%\ a.a \end{cases}$$

Substituindo esses dados na fórmula, teremos:

$1.600 = \dfrac{80.000 \times 36 \times t}{36.000} \therefore t = 20$

Resp.: 20 dias

6) Calcular o tempo que se deve aplicar certo capital, a 2% a.m, de modo que o mesmo duplique de valor.

Resolução:

Para que um capital c duplique de valor, o juro obtido deverá ser igual ao capital, ou seja, $j = c$.

Se $i\% = 2\%\ a.m \Rightarrow i\% = 24\%\ a.a$

Supondo $j = \dfrac{c\,i\,t}{100}$ ...... (I) e, substituindo-se os dados anteriores em (I), teremos:

$c = \dfrac{c \times 24 \times t}{100}$ ou $1 = \dfrac{6 \times t}{25}$

Simplificando-se c , obteremos $t = \dfrac{25}{6}$ anos.

Resp.: 4 anos e 2 meses.

7) A quantia de R$ 10.000, 00 foi dividida em duas partes e aplicada do seguinte modo: a primeira parte a $2,5\%$ ao mês, durante 8 meses, e a segunda parte a 3% ao mês, em 1ano. Sabendo-se que o juro proveniente dessas aplicações foi de R$ 2.640, 00. Calcular o valor de cada parte.

Resolução:

Sejam C_1 e C_2 as partes a serem divididas.

$2,5\%\ a.m \Leftrightarrow 2,5\% \times 12 = 30\%\ a.a$

$3,0\% a.m \Leftrightarrow 3,0\% \times 12 = 36\%\ a.a$

$t_1 = 8$ meses

$t_2 = 1$ a ou 12 meses

Se t_1 e t_2 estão em meses, então $j = \dfrac{C\,i\,t}{1.200}$, portanto, pode-se escrever:

$$j_1 = \frac{C_1 \times 30 \times 8}{1.200} = \frac{C_1}{5}$$

$$j_2 = \frac{C_2 \times 36 \times 8}{1.200} = \frac{9C_2}{25}$$

De acordo com os dados do problema, teremos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 10.000 \\ \\ \dfrac{C_1}{5} + \dfrac{9C_2}{25} = 2.640 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obteremos: $C_1 = 6.000$ e $C_2 = 4.000$

Resp.: R$ 6.000, 00 e R$ 4.000, 00.

19.7 Exercícios Propostos

1) Calcule o juro produzido por R$ 20.000, 00, em 3 anos, a 12% ao ano.

2) Calcule o juro produzido por R$ 5.000, 00, em 2 anos, a $2,5\%$ ao mês.

3) Calcule o juro produzido por R$ 2.000, 00, em 4 anos, a $0,05\%$ ao dia.

4) Calcule o juro produzido por R$ 3.000, 00, em 5 meses, a 15% ao ano.

5) Calcule o juro produzido por R$ 2.000, 00, em 4 meses, a 2% ao mês.

6) Calcule o juro produzido por R$ 10.000, 00, em 3 meses, a $0,02\%$ ao dia.

7) Calcule o juro produzido por R$ 8.000, 00, em 20 dias, a 3% ao ano.

8) Calcule o juro produzido por R$ 6.000, 00, em 10 dias, a 1, 5% ao mês.

9) Calcule o juro produzido por R$ 17.500, 00, em 15 dias, a 0, 04% ao dia.

10) Calcule o juro produzido por R$ 47.000, 00, em 180 dias, a 25% ao ano.

11) Calcule o juro produzido por R$ 25.000, 00, em 3 meses 10 dias, a $\frac{1}{2}$% ao mês.

12) Calcule o juro produzido por R$ 15.000, 00, em 2 anos e 6 meses, a 0, 35% ao dia.

13) Calcule o juro produzido por R$ 12.000, 00, em 2 anos 3 meses e 15 dias, a 1, 5% ao dia.

14) Um capital de R$ 100.000, 00, aplicado à taxa de juros simples de 20% ao trimestre, ao longo de 15 meses, quanto renderá de juro?

15) Calcule o capital que, em 5 anos, a 25% a.a, rendeu R$ 5.000, 00 de juro.

16) Calcule o capital que, aplicados a 30% a.a, rendeu R$ 9.000, 00 de juro, em 3 meses.

17) Calcule o capital que rendeu R$ 19.215, 00 de juro, a 0, 25% ao mês, em 2 anos 6 meses e 15 dias.

18) A que taxa devemos aplicar R$ 2.880, 00, de modo que renda R$ 36, 00 de juro, em 90 dias?

19) A que taxa deve ser empregado o capital de R$ 32.000, 00, durante 6 meses, para produzir juros de R$ 720, 00?

20) A que taxa se deve aplicar R$ 1.500, 00, a fim de render R$ 450, 00 de juro, em 2 anos e 6 meses?

21) A que taxa deve-se aplicar R$ 7.000, 00, para render R$ 1.015, 00 de juro, em 3 anos 7 meses e 15 dias?

22) Em quantos anos R$ 2.400, 00 colocados a 25% a.a, rende R$ 420, 00 de juro?

23) Durante quantos meses deve-se se empregar R$ 12.000, 00, para render R$ 360, 00 de juro, quando aplicados a 4, 5% a.a?

24) Durante quanto tempo se deve aplicar R$ 4.320, 00, a 1% a.m, para produzir R$115, 20?

25) Durante quanto tempo (meses e dias) devemos aplicar R\$ 2.880,00, a $\frac{1}{3}\%$ a.m, afim de obter R\$ 62,40 de juro?

26) Durante que tempo devemos aplicar R\$9.600,00, colocados a $\frac{1}{2}\%$ a.m, para produzir R\$392,00 de juro?

27) Determine o montante de R\$ 8000,00, em 2 anos, quando aplicados a 2% a.m.

28) Determine o montante gerado por R\$ 5.000,00, em 5 meses, quando aplicados a 25% a.a.

29) Determine o montante de R\$3.600,00, ao fim de 200 dias, quando aplicados a 1,3% a.m.

30) Um capital foi colocado a juro de 5% a.a, e no fim de 2 anos e 4 meses, o capital e o juro perfaziam o total de R\$ 134.000,00. Calcule o capital.

31) Calcule o montante de R\$ 40.000,00, em 3 meses e 10 dias, aplicados a 0,25% a.d?

32) A que taxa devemos colocar R\$ 14.400,00, a fim de render o montante de R\$ 14.512,00 em 35 dias?

33) A que taxa se deve empregar R\$ 7.000,00 para produzir em 3 anos, 7 meses e 15 dias, o montante de R\$ 8.015,00?

34) Durante quantos anos devemos aplicar R\$3.940,00, aplicados a 0,75% ao mês, a fim de que produza o montante de R\$ 5.713,00?

35) Durante quantos meses devemos aplicar R\$ 31.750,00, a 0,5% ao mês, a fim de que produza R\$ 34290,00 de montante?

36) Durante quantos dias deve-se aplicar R\$ 540,00, afim de produzir R\$ 545,40 quando aplicados a 0,666...% ao mês?

37) Qual o capital que produz o montante de R\$ 1.740,00, quando empregado a 6%aoano, no fim de 3 anos e 4 meses?

38) Certa quantia foi colocada a juros, à taxa de 5% a.a, durante 3 anos e o montante, foi então colocado a 6% a.a, durante mais 5 anos. Sendo o novo montante igual a R\$ 14.950,00, qual foi o capital inicial?

39) A que taxa mensal deve ser colocado um capital, durante certo tempo, para que o juro recebido seja o triplo do que receberia na taxa anual de 2%?

40) A que taxa de juro simples, em por cento, ao ano, deve-se emprestar certo capital, para que no fim de 6 anos e 8 meses, *duplique* de valor?

41) Quanto tempo deve-se esperar, para que um capital C, rendendo juro de 5% ao ano, *duplique* de valor?

42) Em que tempo se duplica um capital, quando aplicado à taxa de juros simples de 4% ao mês?

43) Qual é o tempo necessário para que um capital qualquer, aplicado a juros simples e à taxa de 40% ao bimestre, *triplique* o seu valor?

44) Um capital é empregado à taxa de 8% ao ano. No fim de quanto tempo, os juros produzidos ficam iguais a do capital? (Dê a resposta em anos e meses).

45) Em que tempo um capital, aplicado à taxa de 2,5% ao mês, rende juro equivalente a $\frac{3}{5}$ de seu valor?

46) O capital de R$ 6.300,00 foi dividido em duas partes. A primeira, colocada a 3% a.a, rendeu durante 4 anos, os mesmos juros que a segunda parte durante 6 anos, a 2,5% a.a. Calcule o valor de cada parte.

47) A diferença entre os capitais de duas pessoas é R$ 200.000,00. Uma coloca seu capital a 9% a.a e a outra, no mesmo período, aplica-o na indústria, de modo que lhe renda 45% a.a. Sabendo que os rendimentos são iguais, determine os capitais.

48) Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado da seguinte maneira: a primeira parte a 6% ao ano, durante 8 anos, e a outra, a 21% ao ano, durante 64 meses. Sabendo que os juros foram iguais, calcule a maior parte.

49) Um capital foi empregado da seguinte maneira: seus dois quintos rendendo 40% ao ano e a parte restante rendendo 30% ao ano. No fim de um ano, a diferença entre os juros das duas partes foi de R$ 2.700,00. Qual era o capital inicial?

50) Dois capitais, um de R$ 1.260,00 e outro de R$ 1.300,00 são colocados a juros de 5% e 3% ao ano, respectivamente. No fim de quanto tempo esses montantes ficam iguais? (Dê a resposta em anos e meses).

51) Um capital foi investido com um juro fixo de 3% ao ano. No fim de um ano, foi acrescido ao montante 20% de correção monetária, perfazendo um total de

mil oitocentos e cinqüenta e quatro reais (R$ 1.854, 00). Determine o capital investido.

52) Uma pessoa coloca três capitais a juros simples: um primeiro capital à taxa de 4% ao ano; um segundo capital à taxa de 3% ao ano e um terceiro a 1, 5% ao ano. O segundo capital é do primeiro e o terceiro é o triplo da diferença dos dois outros, e no fim de quatro anos, o montante foi de R$ 8.900, 00. Calcule o capital inicial.

53) Um primeiro capital rendeu o mesmo juro que um segundo capital, que foi empregado a uma taxa igual ao triplo da taxa do primeiro capital e, durante um tempo que foi metade do que esteve empregado o primeiro capital. Calcule o menor dos capitais, sabendo que a soma deles é R$ 516, 00.

54) Dois capitais são empregados a uma mesma taxa de 3% ao ano. A soma dos capitais é igual a R$ 50.000, 00 e, cada capital produz R$ 600, 00 de juros. Sabendo-se que o primeiro permaneceu empregado 4 meses a mais que o segundo, durante quanto tempo (meses) o segundo foi empregado?

55) Uma pessoa tomou um capital emprestado, C, emprestado a uma taxa mensal, numericamente igual ao número de meses que levará para saldar o empréstimo. Tal pessoa aplica o capital C a uma taxa de 24% ao mês. Para ter um lucro máximo na operação, durante quantos meses deverá fazer o empréstimo e a aplicação, simultaneamente?

56) Uma aplicação no mercado financeiro, que rende 0, 3% ao dia, exige um mínimo de R$ 50.000, 00 para ser efetuada. Uma pessoa que dispõe de R$ 45.000, 00, toma R$ 5.000, 00 à taxa de 1% ao dia, para fazer tal aplicação. Durante quanto tempo deverá aplicar, para pagar o empréstimo e continuar aplicando?

Respostas

1) R$ 7.200,00
2) R$ 3.000,00
3) R$ 1.440,00
4) R$ 187,50
5) R$ 160,00
6) R$ 180,00
7) R$ 13,33
8) R$ 30,00
9) R$ 45,00
10) R$ 5.875,00
11) R$ 416,67
12) R$ 47.250,00
13) R$ 148.500,00
14) R$ 100.000,00
15) R$ 4.000,00
16) R$ 120.000,00
17) R$ 252.000,00
18) 5% **a.a**
19) 4,5%
20) 12% **a.a**
21) 4% **a.a**
22) 0,7 **anos**
23) 8 **meses**
24) 2 **meses e** 20 **dias**
25) 6 **meses e** 15 **dias**
26) 8 **meses e** 5 **dias**
27) R$ 11.840,00
28) R$ 5.520,83
29) R$ 3.912,00
30) R$ 120.000,00
31) R$ 50.000,00
32) 8%
33) 4%
34) 5 **anos**
35) 16 **meses**
36) 45 **dias**
37) R$1.450,00
38) R$10.000,00
39) 0,5% **ao mês**
40) 15% **ao ano**
41) 20 **anos**
42) 2 **anos e** 1 **mês**
43) $10 meses$
44) 7 **anos e** 6 **meses**
45) 2 **anos**
46) R$ 2.800,00 **e** R$ 3.500,00
47) R$ 250.000,00 **e** R$ 50.000,00
48) R$ 700,00
49) R$ 135.000,00
50) 1 **ano e** 8 **meses**
51) R$ 1.500,00
52) R$ 3.000,00
53) R$ 206,40
54) 8 **meses**
55) 12 **meses**
56) 50 **dias**

Capítulo 20

Miscelânea

1) CN - Com a finalidade de se pesquisar a renda média em reais M da sua população, uma determinada região S foi dividida em quatro setores X, Y, Z e W, com, respectivamente, $2.550, 3.500, 3.750$ e 4.200 pessoas. Observou-se, então, que a renda média, em reais, de X é $R\$\,800,00$, a de Y é de $R\$\,650,00$, a de Z é $R\$\,500,00$ e a de W é de $R\$\,450,00$. Logo:

   a) $R\$\,605,00 < M < R\$\,615,00$

   b) $R\$\,595,00 < M < R\$\,605,00$

   c) $R\$\,585,00 < M < R\$\,595,00$

   d) $R\$\,575,00 < M < R\$\,585,00$

   e) $R\$\,565,00 < M < R\$\,575,00$

2) CN - O resultado da expressão $(18.700^2 + 20.900^2) : (18.700 \times 20.900)$ é aproximadamente igual a:

   a) $2,01$ b) $2,03$ c) $2,05$ d) $2,07$ e) $2,09$

3) CN - Uma criação de 12 aves do tipo A consome um saco de ração K em exatamente 30 dias e uma criação de 6 aves tipo B consome um saco de ração K, igual ao primeiro, em exatamente 10 dias. Inicialmente, tem-se

um saco de ração K para cada um dos tipos de aves mencionadas. No fim do 5° dia, a ração disponível para as aves de tipo B estragou-se, obrigando a distribuição de toda a ração restante para os dois tipos de aves. Assim sendo, quantos dias inteiros vai durar a ração restante para alimentar todos os animais na forma regular?

a) cinco b) seis c) sete d) oito e) nove

4) CN - Quantos são os números primos maiores que 100 e menores que 200, nos quais o algarismo das dezenas é par e maior do que o das unidades?

a) um b) dois c) três d) quatro e) cinco

5) CN - Se $x = 7^{200}$, $y = 1024^{40} \times 3^{100}$ e $z = 16^{25} \times 625^{50}$, pode-se afirmar que:

a) $x < y < z$ b) $x < z < y$ c) $y < x < z$

d) $y < z < x$ e) $z < x < y$

6) CN - O litro do combustível X custa R$ 2,00 e do combustível Y, R$ 3,00. O tanque do veículo V, que se move indiferentemente com os combustíveis X e Y, tem capacidade total de 54 litros. O veículo V, quando abastecido unicamente com o combustível X, tem rendimento de 15 quilômetros por litro e, quando abastecido unicamente com o combustível Y, tem o rendimento de 18 quilômetros por litro. Quantos reais gastarão o proprietário de V, caso resolva abastecer completamente o seu tanque com uma mistura desses combustíveis, de forma que, numericamente, os volumes correspondentes de X e Y sejam, simultaneamente, diretamente proporcionais aos rendimentos e inversamente proporcionais aos custos de cada um deles?

a) 131,00 b) 132,00 c) 133,00 d) 134,00 e) 135,00

7) CN - Uma instituição financeira abaixou a sua taxa de juros de 2,5% para 2,0%. Assinale a opção que apresenta, em percentual, a redução sobre a taxa inicial.

a) 0,5 b) 5 c) 7,5 d) 15 e) 20

8) CN - Seja o número $N = (10.000)^{(-2)^{(-2)}}$. Qual é o número de divisores positivos de N?

a) 6 b) 13 c) 15 d) 4 e) 2

9) CN - Qual é o resto da divisão por 11 do resultado da expressão: $9.119^{32} \times 343^{26} + 1.211^{20}$?

   a) 9 b) 1 c) 10 d) 6 e) 7

10) CN - Qual é o número máximo de divisores do número natural $48 \times 2^{-x^2+2x}$, $x \in \mathbb{N}$?

   a) 12 b) 10 c) 24 d) 6 e) 18

11) CN - Cláudio comprou 10 dólares com 125 australes e Marta comprou 5 australes com 125 pesos chilenos. Quantos pesos chilenos João pode, *no máximo*, comprar com 10 dólares?

   a) 1.000 b) 2.000 c) 3.000

   d) 4.000 e) 5.000

12) CN - Um fazendeiro repartiu seu rebanho de 240 cabeças de boi entre seus três filhos da seguinte forma: o primeiro recebeu $\frac{2}{3}$ do segundo, e o terceiro tanto quanto o primeiro mais o segundo. Qual foi o número de cabeças de boi que o primeiro recebeu?

   a) 12 b) 30 c) 36 d) 48 e) 54

13) CN - A razão do comprimento de uma circunferência para o seu diâmetro é um número:

   a) que varia em função do raio da circunferência

   b) constante e inteiro

   c) constante e tem notação decimal finita

   d) constante e tem notação decimal infinita e periódica

   e) constante e tem notação decimal infinita e não periódica

14) CN - Considere as seguintes proposições:

   I. O número 1.147 não é primo;

   II. Todo número da forma $abba$, onde a e b são algarismos, é divisível por 11;

   III. Todo número múltiplo de 5 e 15 é múltiplo de 75;

   IV. O número de divisores naturais de 576 é divisor de 63

   O número de proposições verdadeiras é:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

15) CN - Os números da forma $4^{k^2+50}+4^{k^2+51}+4^{k^2+52}+4^{k^2+53}$ são sempre múltiplos de:

a) 17 b) 19 c) 23 d) 29 e) 31

16) CN - O produto dos divisores inteiros de 144 é:

a) $-2^{30}\times 3^{15}$ b) $2^{30}\times 3^{15}$ c) $-2^{60}\times 3^{30}$

d) $2^{60}\times 3^{30}$ e) -6^{30}

17) CN - Em um navio existem 6 barcos e 15 guarnições. Cada barco tem uma guarnição de serviço por dia. Quantos dias, no mínimo, serão necessários para que todas as guarnições tenham ficado de serviço o mesmo número de vezes?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 15

18) CN - A fração $\frac{312}{455}$ é equivalente à fração irredutível $\frac{a}{b}$. Pode-se afirmar que "$a+b$"é igual a:

a) 53 b) 55 c) 57 d) 59 e) 61

19) CN - Quantos valores de $k\in\mathbb{Z}$ existem, tais que, $\frac{113k+7}{k+1}$ é um número inteiro?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

20) CN - Dois números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se os algarismos de M são os mesmos de N, na ordem inversa, então $M+N$ é necessariamente múltiplo de:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

21) CN - Seja $N = xyzzyx$ um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então N_1+N_2 é igual a?

a) 1.008.900 b) 1.006.650 c) 1.106.640

d) 1.158.000 e) 1.156650

22) CN - Dividindo-se o cubo de um número pelos $\frac{2}{3}$ de seu quadrado, acha-se 18 para quociente. A raiz quadrada da terça parte desse número é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

23) CN - Dos números:

I - $0,4333\ldots$

II - $0,101101110\ldots$

III - $\sqrt{2}$

IV - O quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência.

São racionais:

a) Todos b) Nenhum c) Apenas um deles

d) Apenas dois deles e) Apenas três deles

24) CN - Dados os números:

$A = 0,273849\overline{51}$

$B = 0,\overline{27384951}$

$C = 0,2738\overline{4951}$

$D = 0,27\overline{384951}$

$E = 0,27384\overline{951}$

$F = 0,2738495127989712888\ldots$

a) $A > F > E > C > D > B$

b) $A > F > B > D > C > E$

c) $F > C > D > B > A > E$

d) $B > C > A > F > E > D$

e) $E > A > C > D > F > B$

25) CN - Qual é a média harmônica entre as raízes da equação $340x^2 - 13x - 91 = 0$?

a) 7 b) -7 c) $\dfrac{340}{7}$ d) $\dfrac{1}{7}$ e) -14

26) CN - Sabendo-se que a média aritmética e a média harmônica de dois números naturais valem, respectivamente, 10 e $\dfrac{32}{5}$ pode -se dizer que a média geométrica entre esses números será igual a:

a) $3,6$ b) 6 c) $6,4$ d) 8 e) 9

27) CN - Seja $M = \dfrac{xy}{x+y}$, onde "x"e "y"são números reais e positivos, logo M é:

a) o quociente da média geométrica pela média aritmética de "x"e "y".

b) a metade do quociente entre a média geométrica e a média aritmética de "x"e "y".

c) a média aritmética dos inversos de "x"e "y".

d) a média harmônica de "x"e "y".

e) a metade da média harmônica de "x"e "y".

28) CN - Um aluno calculou a média aritmética entre os cem primeiros inteiros positivos, encontrando $50\frac{1}{2}$. Retirando um desses números encontrou como nova média $50\frac{27}{99}$. O número retirado está entre:

a) 30 e 40 b) 40 e 50 c) 50 e 60 d) 60 e 70 e) 70 e 80

29) CN - O valor numérico da expressão $\mathbf{a}^4 - 2\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^4$ para $\mathbf{a} = \dfrac{8}{18}$ e $\mathbf{b} = \dfrac{9}{17}$ é um número N tal que, $N < 0$

a) $10^{-4} < N < 10^{-3}$

b) $10^{-3} < N < 10^{-2}$

c) $10^{-2} < N < 10^{-1}$

d) $10^{-1} < N < 1$

30) CEFET - No sistema de numeração de base 2, o numeral mais simples de 23 é:

a) 11101 b) 10111 c) 1100 d) 1001 e) 11

31) CEFET - O produto de três números é "p". Qual será o produto da metade desses números?

a) $2p$ b) $\dfrac{p}{2}$ c) $\dfrac{p}{4}$ d) p^2 e) $\dfrac{p}{8}$

32) CEFET - Na pesquisa do máximo divisor comum de dois números, os quocientes obtidos foram $1; 2$ e 2, e o m.d.c. encontrado foi 6. O maior dos números é:

a) 12 b) 30 c) 42 d) 48 e) 144

33) CEFET - O valor da expressão $16^{3/4} \times (-8)^{-2/3}$ é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) -2 e) -4

34) CEFET - Calcule o volume de um paralelepípedo retângulo, cujo perímetro da base é igual a $14\,\text{cm}$, a altura é igual a $3\,\text{cm}$, e o comprimento, $3\,\text{cm}$ maior que a largura.

a) $15\ \text{cm}^3$ b) $24\ \text{cm}^3$ c) $32\ \text{cm}^3$ d) $30\ \text{cm}^3$ e) $16\ \text{cm}^3$

35) CEFET - Uma torneira enche um tanque em 3 horas e uma outra torneira, enche o mesmo tanque em seis horas. Em quanto tempo as duas juntas encheriam o referido tanque?

36) CEFET - Qual o valor mais simples da expressão

$$\frac{3^{10} - 2^{10}}{3^5 + 2^5} + 3,303 \div 0,367$$

37) CEFET - A data $25/11/89$, se for escrita no sistema de base 8, será:

a) $30/10/70$ b) $13/31/131$ c) $31/13/131$

d) $31/11/113$ e) $52/11/78$

38) CEFET - Um fazendeiro tem 30 cavalos e ração estocada para alimentá-los durante 2 meses. Se forem vendidos 10 cavalos e a ração for reduzida à metade, em quantos dias os cavalos restantes poderão ser alimentados?

a) 10 b) 15 c) 30 d) 45 e) 180

39) CEFET - Para se escrever, no sistema de base 8, todos os números de dois algarismos, são necessários:

a) 56 algarismos b) 70 algarismos c) 112 algarismos

d) 150 algarismos e) 160 algarismos

40) CEFET - Um livro possui 50 páginas. Para numerá-los usando o sistema de base 8, são necessários.

a) 133 algarismos b) 93 algarismos c) 91 algarismos

d) 86 algarismos e) 40 algarismos

41) CEFET - O valor da expressão $\frac{2}{7} \div \frac{1}{14} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{4}{27}\right)^{-1} + (0,5)^0$ é:

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{4}$ e) 12

42) CEFET - Escreva o numeral 745 no sistema de base 16, sabendo que, nesse sistema, os símbolos são $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

43) CEFET - O valor da expressão $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \div \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2$ é:

a) 1 b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{16}{3}$

44) CEFET - O tanque de combustível de um barco pesqueiro tem $2\,m$ de comprimento, $1,25\,m$ de largura e $0,32\,m$ de altura e está totalmente cheio. Durante uma viagem foram gastos $\frac{13}{16}$ da capacidade do tanque. Quantos litros restaram?

45) CEFET - Observe a expressão: $4 \times 6 \div 2 - 7 + 3 \times (6 - 1) + 3\sqrt{15}$, e responda:

a) quantos termos a mesma possui?

b) quanto vale a soma dos dois maiores?

46) CEFET - Quinze operários trabalhando 8 horas por dia em 16 dias, constroem um muro de 80 metros de comprimento. Em quantas horas, por dia, 10 operários construirão um muro de 90 metros de comprimento, da mesma altura e espessura do anterior, em 24 dias?

47) CEFET - Em 35 gramas de uma solução aquosa de iodo, a porção de iodo pesa $0,7$ gramas. Qual é o percentual de iodo na solução?

Obs.: Solução aquosa de iodo é uma mistura de água com iodo.

48) CEFET - Escreva, na base 4, a soma dos valores absolutos de um número que é superior a 500, inferior a 1.000 e é, ao mesmo tempo, múltiplo de $3, 11$ e 13.

49) CEFET - O mmc de três números é formado exclusivamente pelos fatores primos $2; 3$ e 7, todos com o mesmo expoente. Dois desses números são 21 e 98. Determine o terceiro que não é divisível por 7.

50) CEFET - Ao congelar-se, a água aumenta $\frac{20}{3}\%$ o seu volume. Quantos litros d'água devem ser congelados para obter-se um bloco de gelo de $80\ cm \times 30\ cm \times 20\ cm$?

51) CEFET - Calcule três números $\underline{x}, \underline{y}$ e $\underline{z}$ diretamente proporcionais a $2, 3$ e 4, sabendo que $3x - y + 2z$ é igual a 66.

52) CEFET - Calcule o valor da expressão

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{0,5} + 16^{0,75} - (0,5)^{-5} + \left(-\frac{3}{7}\right)^{0} \times 5$$

53) CEFET - Resolvendo a expressão $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} \times 0,5 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$, obtemos:

a) $\frac{23}{20}$ b) $0,35$ c) $\frac{3}{20}$ d) $0,15$ e) $\frac{27}{10}$

54) CEFET - A planta de uma cidade está desenhada na escala $1 : 20.000$. O comprimento no desenho que representa uma rua de 200 metros de extensão é igual a:

a) $1\,\text{cm}$ b) $1,5\,\text{cm}$ c) $2\,\text{cm}$ d) $10\,\text{cm}$ e) $20\,\text{cm}$

55) CEFET - Três litros de álcool são misturados a 5 litros de gasolina. Quantos litros gasolina devem ser adicionados à mistura, para que $\frac{3}{4}$ do resultado sejam gasolina?

a) 2 litros b) 4 litros c) $5,5$ litros d) 6 litros e) 10 litros

56) CEFET - Em um tanque existem 200 litros de água salgada a 15% do sal. Sabendo-se que a água evapora à razão de 4 litros por hora, no fim de $16\,\text{h}\;\; 15\,\text{min}$ qual será o novo percentual de sal na água?

57) CEFET - Que fração de denominador 42 devemos somar à expressão $\dfrac{0,(3) - 0,0(6)}{3 - 1\frac{4}{9}}$ para obtermos 4 inteiros?

58) CEFET - Uma torneira gasta 2 horas para encher um tanque, cujo volume é de $18\,\text{m}^3$. Qual deve ser a medida da aresta de um reservatório cúbico, se a mesma vazão leve 3 horas para enchê-lo?

a) $3,0\,\text{m}$ b) $2,0\,\text{m}$ c) $27,0\,\text{m}$ d) $\sqrt{27}\;\text{m}$ e) $9,0\,\text{m}$

59) CEFET - Marie Curie que pesquisou e esclareceu os mecanismos da radioatividade, concluiu que 1 *curie* equivale a $3,7\times10^{10}$ desintegrações por segundo. A CNEN (Comissão Nacional de Engenharia Nuclear) informa que a bomba de césio destruída em Goiânia tinha uma atividade total, provavelmente em 1.971, quando foi destruída, cerca de 2.000 *curies*. Por ocasião de sua abertura incidental (set/87), a fonte apresentava, então, as seguintes característica:

"Atividade estimada em set/87: 1.370 *curies*".

Pergunta-se: Quantos átomos de césio, em notação científica, desintegraram-se, por segundo, em set/87?

a) $5,1 \times 10^{13}$ b) $7,4 \times 10^{13}$ c) $2,3 \times 10^{13}$ d) $3,7 \times 10^{13}$

60) CEFET - Efetue: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 3 \div 8 - 3^2 + \sqrt{16}$

61) CEFET - Determine o conjunto dos divisores comuns de 130 e 182.

62) CEFET - No sistema de numeração de base 5, o numeral mais simples de 51 é $\nabla\Box\Delta$. Nesse mesmo sistema e usando os mesmos símbolos, qual é o numeral mais simples de 35?

63) CEFET - Numa certa cidade brasileira, cuja população é e 20.000 habitantes, a taxa de natalidade é de $2,3\%$, e a de mortalidade $1,9\%$ ao ano. Daqui a 1 ano, qual será a nova população daquela cidade?

64) CEFET - Um litro de certa substância pesa $2,1\,\mathrm{kg}$. Quanto pesará, em toneladas, $3\,\mathrm{m}^3$ dessa substância?

65) CEFET - Numa jarra cabe *um* litro mais *um* terço da capacidade de água. Quantos litros de água correspondem a $1\frac{2}{3}$ da capacidade da jarra?

66) CEFET - Um tanque comporta 420 litros de água. Quantos baldes de $35\,\mathrm{dm}^3$ são necessários para enchê-lo?

67) CEFET - Um mapa geográfico fio desenhado na escala $1 : 2.000$. Qual é o comprimento num desenho, que representa $25\,\mathrm{m}$ num lugar?

68) CEFET - Um prédio está desenhado na escala $1 : 50$. Qual é o perímetro e a área de uma sala, que no desenho mede $8\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$?

69) CEFET - A soma dos valores absolutos dos algarismos do número superior a 1.010, inferior a 2.010 e ao mesmo tempo múltiplo de $7, 11$ e 13, é:

a) 2 b) 4 c) 5 d) 11 e) 22

70) CEFET - A partir de 1987 a Força Aérea concebeu o primeiro avião **AMX**. Em prospecto de divulgação do projeto, os responsáveis pela construção desse avião , desenharam um modelo na escala $1 : 40$, onde o comprimento e a altura são, respectivamente, $34\,\mathrm{cm}$ e $11,5\,\mathrm{cm}$. O comprimento e a altura reais do **AMX** são, nessa ordem:

a) $13,06\,m$, e $4,06\,m$

b) $13,60\,m$ e $4,6\,m$

c) $34 \times 10^{-1}\,m$ e $11,5 \times 10^{-1}\,m$

d) $1.360\,m$ e $460\,dm$

e) $34\,m$ e $11,5\,m$

71) CEFET - Arnaldo pode realizar um trabalho em 9 dias. Bernardo é 50% mais eficiente que Arnaldo. O número de dias que Bernardo levará para concluir o mesmo trabalho que Arnaldo é:

a) 3 b) 4 c) $4,5$ d) 6 e) $13,5$

72) CEFET - Para votar, cinco eleitores demoram, respectivamente, $3\,min\ 38\,seg$, $3min\ 18\,seg$, $2\,min\ 46\,seg$, $2min\ 57seg$ e $3min\ 26seg$. Qual foi a média do tempo de votação desses eleitores?

73) CEFET - Em certa cidade as passagens de ônibus foram aumentadas de $R\$\,9,00$ para $R\$\,11,70$. Qual foi o percentual de reajuste?

74) CEFET - Num concurso com 10.200 candidatos inscritos, registraram-se 1.300 ausências às provas e 3.471 reprovações. O percentual de aprovações sobre o número de candidatos que efetivamente participaram das provas foi de:

a) 39% b) 45% c) 50% d) 61% d) 73%

75) CEFET - Este ano, um produto teve dois aumentos de preço: um, em março, de 40% e outro, em outubro, de 30%. Se, em fevereiro, era vendido por $R\$\,2.800,00$, qual será o seu preço total agora?

76) CEFET - Uma cisterna, cujas dimensões são $1\,m$, $2\,m$ e $3\,m$, contém água até $\frac{2}{3}$ de sua capacidade. Nessa cisterna há:

a) 40 litros b) 4.000 litros c) 400 litros

d) 2.000 litros e) 30.000 litros

77) CEFET - Uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo, com $4\,dm$ de largura e $10\,dm$ de comprimento, comporta exatamente 80 litros de água. Qual deve ser o volume de outra caixa que tem a forma de um cubo, sabendo-se que a sua aresta é equivalente à altura da primeira caixa?

78) CEFET - Um bombeiro dispõe de três pedaços de arame do mesmo tipo, medindo, respectivamente, $2,40\,m$, $320\,cm$ e $0,0056\,km$. Pretendendo dividi-los em partes iguais, tendo cada uma o maior comprimento possível, sem qualquer perda, obterá ao todo, quantos pedaços?

a) 12 b) 14 c) 15 d) 18 e) 20

79) CEFET - A diferença entre os volumes de dois cubos é de $152\,dm^3$. Se os volumes estão entre si, assim como 8 está para 27, qual será a diferença (positiva) das arestas desses cubos?

80) CEFET - A soma dos dois algarismos de um número de dois algarismos é 8, e a diferença entre esse número e o que se obtém pela inversão dos mesmos é 18. Determine o número.

81) CEFET - Qual é o produto de duas frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{7}$, tais que o numerador da primeira seja igual ao denominador da segunda.

82) CEFET - Em três horas uma torneira enche $\frac{4}{7}$ de um reservatório de água e outra esvazia $\frac{2}{5}$ do mesmo reservatório. Estando o reservatório vazio e abrindo-se simultaneamente as duas torneiras, em quantas horas ficará cheio?

83) CEFET - Numa fração equivalente a $\frac{57}{95}$ somam-se 42 unidades ao numerador. Quantas unidades devemos somar ao denominador, para que a fração não se altere?

84) CEFET - Qual é a diferença positiva dos termos da fração equivalente a $\frac{14}{24}$, cuja soma dos termos seja 76?

85) CEFET - Um reservatório tem duas torneiras, sendo uma de entrada de água e a outra de saída. A de entrada enche-o em 6 horas e a de saída esvazia-o em 14 horas. Estando o tanque vazio e abrindo-se simultaneamente as duas torneiras, em quantas horas ele ficará cheio?

86) CEFET - As frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ e são irredutíveis. Assim $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$ será irredutível se:

a) os denominadores forem primos entre si

b) o denominador de cada fração for primo com o numerados da outra.

c) sempre

d) os numeradores forem primos entre si

e) nunca

87) CEFET - Ao efetuar a divisão de 841 por 12, indo até a segunda casa decimal, quais serão, respectivamente, o quociente e o resto dessa divisão?

a) $78,33$ e 4 b) $70,08$ e $0,04$ c) $78,33$ e $0,04$

d) $70,08$ e 4 e) $7,08$ e 4

88) CEFET - Ao subtrairmos 2 unidades do numerador da fração $\frac{5}{8}$, então essa fração não sofrerá alteração se subtrairmos do denominador da mesma, um número real compreendido entre:

a) 3 e 4 b) 4 e 5 c) 5 e 6 d) 6 e 7 e) 7 e 8

89) CEFET - Se a idade da Terra é avaliada em quatro e meio bilhões de anos, a décima oitava parte desse tempo é igual a:

a) $5^9 \times 2^7$ b) $5^9 \times 2^8$ c) $5^9 \times 2^9$ d) $5^{10} \times 2^9$ e) 10^{10}

90) CEFET - Em um terreno com $15\,\mathrm{m}$ de frente e $20\,\mathrm{m}$ de fundos, foram construídas uma casa com área de $105\,\mathrm{m}^2$ e uma piscina com $15\,\mathrm{m}^2$. Pavimentou-se um espaço com $3\,\mathrm{m}$ de largura por $20\,\mathrm{m}$ de comprimento para fins de estacionamento. O restante do terreno foi gramado, o que corresponde a:

a) 25% do terreno b) 30% do terreno c) 40% do terreno

d) 45% do terreno e) 60% do terreno

91) CEFET - Assinale a opção incorreta:

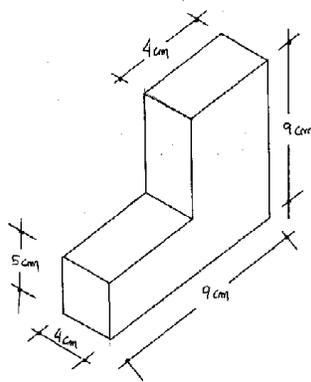
a) O conjunto dos múltiplos de 10 é um subconjunto dos múltiplos de 5.

b) Quando um número é ao mesmo tempo divisível por 2 e por 4, ele é, obrigatoriamente, divisível por 8.

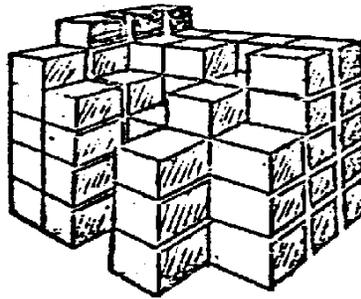
c) O conjunto dos números pares contém o conjunto dos múltiplos de 8.

d) Se um número é, simultaneamente, múltiplo de 2 e de 5, ele é, obrigatoriamente, divisível por 10.

e) Todo número divisível por 6 é par e pertence ao conjunto dos múltiplos de 3.

92) CEFET - Cada milímetro cúbico do material de que é feita a peça abaixo pesa $0,015$ g.

Deste modo, o peso total da peça é:

a) 244 g b) 344 g c) 1.800 g d) 3.660 g e) 1.220 g

93) CEFET - Os cubos da figura seguinte foram contados primeiro no sistema de base 2, em seguida no sistema de base 8, e, finalmente, no sistema decimal.

Os resultados obtidos foram, nessa ordem:

a) $1110011; 123; 83$ b) $1100101; 321; 73$ c) $1100110; 273; 83$

d) $83; 123; 1010011$ e) $37; 321; 1110001$

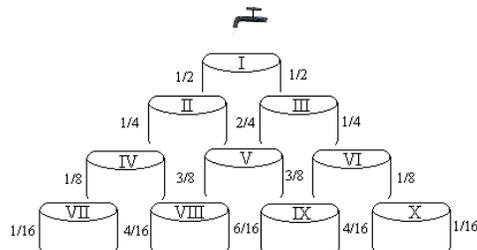
94) CEFET - Nos sete dias de realização do último *Rock in Rio*, o público presente deixou para trás 243 toneladas de lixo. Supondo-se que cada

tonelada desse lixo ocupasse um volume de $2\,m^3$, assinale a quantidade de caixas cúbicas, com arestas medindo $3\,m$, que seriam necessárias para acondicionar todo esse lixo:

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 19

95) CEFET - Uma pesquisa feita por um professor de nutrição, numa amostragem de 8.500 pacientes, concluiu que $40,5\%$ estavam contaminados por alumínio; $35,5\%$ por chumbo; 10% por mercúrio, e 5% por cádmio. Quantos pacientes não apresentaram quaisquer desses tipos de contaminação?

a) 7.735 b) 956 c) 871 d) 790 e) 765

96) CEFET - A figura representa um arranjo vertical, constituído por recipientes iguais, dispostos simetricamente de tal forma que a água recebida por cada recipiente escoa, com a mesma vazão, de seus dois extremos, em direção aos recipientes do nível imediatamente inferior, e assim sucessivamente.

Como se observa, há recipientes que recebem água de apenas uma fonte, e outros, localizados entre os extremos, que a recebem de duas fontes superiores distintas.

Considerando que a água escoa de cada recipiente a uma determinada taxa, que representa uma unidade de peso por unidade de tempo, temos, por exemplo, as seguintes correlações:

Recipiente	Taxa
I	1
II e III	$\frac{1}{2}$
IV e VI	$\frac{1}{4}$
V	$\frac{2}{4}$

Com base nos dados apresentados, que taxa a água escoará para o recipiente XVII?

a) $\frac{3}{32}$ b) $\frac{5}{32}$ c) $\frac{15}{64}$ d) $\frac{10}{32}$ e) $\frac{12}{32}$

97) CEFET - "O setor público registrou um déficit de R\$ 33,091 bilhões em 1.994". Se X é igual ao número de zeros dessa quantia, desprezados os zeros dos centavos, então o número X escrito no sistema binário é:

a) $10_{(2)}$ b) $100_{(2)}$ c) $101_{(2)}$ d) $110_{(2)}$ e) $111_{(2)}$

98) CEFET - Uma micro empresa produziu 10.000 unidades de um certo produto, vendendo-o da seguinte forma:

1º) as primeiras 3.000 unidades, ao preço unitário de R\$ 20,00

2º) as 5.000 unidades, ao preço unitário de R\$ 25,00

3º) as 2.000 unidades, ao preço unitário de R\$ 32,00

Qual foi o preço médio unitário?

a) R\$ 24,60 b) R\$ 24,90 c) R\$ 32,00

d) R\$ 39,90 e) R\$ 33,50

99) CEFET - Perguntado sobre o preço e o peso dos melões que vendia, um feirante respondeu:

– Custa R\$ 1,50 o quilo, e cada melão pesa aproximadamente 1 kg e mais $\frac{1}{4}$ de melão. Quanto pagou, aproximadamente, uma freguesa que comprou 3 melões?

100) CEFET - O número 81 escrito no sistema de base 6 é representado por $(xyz)_6$. Como ficaria representado nesse mesmo sistema de base 6, o número 51?

101) CEFET - O número 27 está escrito no sistema de numeração decimal. Quando escrito no sistema de base 4, representamo-lo por $(xyz)_4$. Qual é a representação do número $(zyx)_4$, no sistema decimal?

102) ETFEQ - Na sucessão das letras ETFQRJETFQRJETFQRJ . . . , qual é a letra que ocupa 1.995º posição?

103) EPCAR - Seja o número $m = 488\mathbf{a}9\mathbf{b}$ onde "**b**"é o algarismos das unidades e "**a**"o algarismos das centenas. Sabendo-se que "m"é divisível por 45, então $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ é igual a:

a) 1 b) 7 c) 9 d) 16

104) EPCAR - Ao separar o total de figurinhas em grupos de 12, 15 e 24, uma criança observou que sobravam sempre 7 figurinhas. Se o total de figurinhas está compreendido entre 240 e 360, pode-se afirmar que a soma dos algarismos significativos desse total é:

a) 6 b) 9 c) 10 d) 13

105) EPCAR - Um relógio bate a cada 15 minutos, outro relógio a cada 25 minutos e um terceiro a cada 40 minutos. O menor intervalo de tempo decorrido entre duas batidas simultâneas dos três relógios é:

a) 1 hora b) 10 horas c) 20 horas d) 30 horas

106) EPCAR - Sabendo-se que os ângulos internos de um triângulo são diretamente proporcionais aos números 2; 3 e 4, quais são as suas medidas valem:

a) $40°$, $60°$ e $80°$

b) $30°$, $50°$ e $100°$

c) $20°$, $40°$ e $1200°$

d) $50°$, $60°$ e $70°$

107) EPCAR - Um terreno de $5.400\,m^2$ foi dividido em quatro lotes com as seguintes áreas: $\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2, \mathbf{c}^2$ e $\mathbf{d}^2$. Se os valores de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ são respectivamente proporcionais a 2, 3, 4 e 5, então o valor de $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ é:

a) -120 b) -12 c) 12 d) 120

108) EPCAR - Um ciclista parte da cidade A em direção a B, ao mesmo tempo em que outro parte de B em direção a A. A distância entre A e B é $120\,km$. O primeiro desenvolve a velocidade de $24\,km/h$ e o segundo, $16\,km/h$. Assim, os ciclistas se encontram ao fim de:

a) 1 hora b) 2 horas c) 3 horas d) 4 horas

109) EPCAR - Uma prova de 180 questões diferentes, foi distribuída a 3 estudantes, A, B e C, de modo que cada estudante recebeu um bloco com 60 questões distintas. A apresentou 90% de acertos nas suas respostas, B respondeu corretamente a 70% do seu bloco e C errou 80% de suas questões. Desta forma, o número de questões não resolvidas da prova é de: (não resolvidas são as questões que os estudantes não acertaram).

a) 78 b) 72 c) 68 d) 80

110) EPCAR - Um carro foi vendido com 25% de ágio sobre o preço de tabela. Se o preço de venda atingiu R\$ 15.000, 00, o preço de tabela do carro era:

a) R\$ 11.000, 00 b) R\$ 11.250, 00 c) R\$ 12.000, 00 d) R\$ 12.500, 00

111) EPCAR - João gasta, mensalmente, 10% de seu salário com gasolina. Um aumento de 25% no preço desse combustível proporciona um acréscimo de R\$ 120, 00 em sua despesa mensal. O salário, em reais, de João é:

a) 960 b) 1.200 c) 3.600 d) 4.800

112) EPCAR - Em uma Escola, havia um percentual de 32% de alunos fumantes. Após uma campanha de conscientização sobre o risco que o cigarro traz à saúde, 3 em cada 11 dependentes do fumo deixaram o vício, ficando, assim, na Escola, 128 fumantes. É correto afirmar que o número de alunos de Escola é igual a:

a) 176 b) 374 c) 400 d) 550

113) EPCAR - Uma fábrica recebeu uma encomenda de 50 aviões. A fábrica montou os aviões em 5 dias, utilizando 6 robôs de mesmo rendimento, que trabalharam 8 horas por dia. Uma nova encomenda foi feita, desta vez, 60 aviões. Nessa ocasião, um dos robôs não participou da montagem. Para atender o cliente, a fábrica trabalhou 12 horas por dia. O número de dias necessários para que a fábrica entregasse as duas encomendas foi:

a) exatamente 10 b) mais de 10 c) entre 9 e 10 d) menos de 9

114) EPCAR - Se gato e meio comem rato e meio em um minuto e meio, quantos gatos comem 60 ratos em 30 minutos?

a) 3 b) 4 c) $3,5$ d) $4,5$

115) EPCAR - Se 16 homens gastam 10 dias montando 32 máquinas, o número de dias que 20 homens necessitarão para montar 60 máquinas é:

a) par b) ímpar c) primo d) não inteiro

116) EPCAR - Uma aeronave voou no primeiro dia de uma viagem $\frac{3}{5}$ do percurso. No segundo dia, voou $\frac{2}{3}$ do que faltava e, no 3º dia, completou a viagem voando $800\,\mathrm{km}$. O percurso total, em km, é um número:

a) divisor de 12×10^3

b) divisor de 10^3

c) múltiplo de 10^4

d) múltiplo de 20×10^3

117) EPCAR - Vendem-se $\frac{2}{5}$ de uma peça de tecido e depois $\frac{5}{12}$ do restante. O que sobra é vendido por R\$ $1.400,00$. Sabendo-se que o tecido custa R\$ $5,00$, o metro, o comprimento da peça inicial era:

a) $400\,\mathrm{m}$ b) $800\,\mathrm{m}$ c) $1.200\,\mathrm{m}$ d) $1.600\,\mathrm{m}$

118) EPCAR - Uma senhora vai à feira e gasta, em frutas, $\frac{2}{9}$ do que tem na bolsa. Gasta depois $\frac{3}{7}$ do resto em verduras e ainda lhe sobram R\$ $8,00$. Ela levava, em reais, ao sair de casa:

a) $56,00$ b) $36,00$ c) $27,00$ d) $18,00$

119) EPCAR - Uma escola tem 18 professores. Um deles se aposenta e é substituído por um professor de 22 anos. Com isso, a média das idades dos professores diminui em 2 anos. A idade, em anos, do professor que se aposentou é:

a) 52 b) 54 c) 56 d) 58

120) EPCAR - Um laboratório importa 50 litros de uma vacina concentrada. Em seguida dilui o medicamento em $670\,\mathrm{dm}^3$ de água destilada, coloca-o em ampolas com capacidade de $2\,\mathrm{cm}^3$ cada e depois são acondicionados em caixas com 5.000 ampolas cada uma. O número de caixas é:

a) ímpar b) primo c) múltiplo de 5 d) divisível por 6

121) EPCAR - Para análise da água de certo rio, a amostra recolhida foi toda utilizada para encher 6 recipientes de $200\,\mathrm{cm}^3$ cada e 4 recipientes de $1,2\,\mathrm{dm}^3$ cada. O volume, em litros, da amostra é:

a) $16,80$ b) $12,48$ c) $8,00$ d) $6,00$

122) EPCAR - Em condições ambiente, a densidade do mercúrio é de, aproximadamente, $13\,g/cm^3$. A massa desse metal, do qual um garimpeiro necessita para encher completamente um frasco de meio litro de capacidade é igual a:

a) $260\,g$ b) $2,6\,kg$ c) $650\,g$ d) $6,5\,kg$

123) EPCAR - Um tanque de petróleo armazena 15.000 litros. Uma válvula é aberta e deixa escoar 10 litros por minuto. Seja V o volume inicial de petróleo nesse tanque e t o número de minutos em que a válvula vai estar aberta. Para o tanque ficar vazio, serão decorridos:

a) 250 minutos b) 20 horas c) 150 minutos e) 25 horas

124) EPCAR - Sobre o menor número natural $\mathbf{n}$ de quatro algarismos, divisível por 3, tal que o algarismos das dezenas é metade do algarismo das unidades e igual ao dobro do algarismo das unidades de milhar, é correto afirmar:

a) $\mathbf{n} + 1$ é divisível por 7

b) $\mathbf{n}$ está entre 2.000 e 3.009

c) $\mathbf{n} + 2$ é múltiplo de 10

d) $\mathbf{n}$ apresenta 12 divisores positivos

125) EPCAR - Uma abelha rainha dividiu as abelhas de sua colméia nos seguintes grupos para exploração ambiental: um composto de 288 batedoras e outro de 360 engenheiras. Sendo você a abelha rainha e sabendo que cada grupo deve ser dividido em equipes constituídas de um mesmo e maior número de abelhas possível, então você redistribuiria suas abelhas em:

a) 8 grupos de 81 abelhas

b) 9 grupos de 72 abelhas

c) 44 grupos de 27 abelhas

d) 2 grupos de 324 abelhas

126) EPCAR - Uma bola é abandonada de certa altura. Até que o movimento pare, a bola atinge o solo e volta a subir repetidas vezes. Em cada subida, alcança $\frac{1}{2}$ da altura em que se encontrava anteriormente. Se,

depois do terceiro choque com o solo, ela sobe $100\,\text{cm}$, a altura em que foi abandonada é, em metros, igual a:

a) $0,8$ b) 1 c) 8 d) $0,5$

127) EPCAR - Um medicamento deve ser ingerido na quantidade de $3\,\text{mg}$ por quilograma de massa corporal. Não pode, contudo, exceder $200\,\text{mg}$ por dose ministrada. Cada gota desse medicamento contém $5\,\text{mg}$ do remédio. O número de gotas desse medicamento que deve ser prescrito por dose a um paciente de $80\,\text{kg}$, é:

a) 46 b) 40 c) 16 d) 80

128) EPCAR - A diferença $8^{0,666\ldots} - 9^{0,5}$ é igual a:

a) -2 b) $\sqrt{2}-3$ c) $2\sqrt{2}$ d) 1

129) EPCAR - Ao se resolver a expressão

$$\left[\sqrt[3]{\frac{(25\times 10^{-6})\times 0,000075}{10}}\right] \div \left[\frac{5\sqrt[3]{1,5}}{10^4}\right] \times (-0,0010)^0$$

o valor encontrado é:

a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) 1 d) $0,1$

130) EPCAR - O produto de quatro números ficou valendo 1.200, depois que se multiplicou o primeiro por 2, o segundo por 3, dividiu-se o terceiro por 4 e o quarto por 5. Antes de efetuar tais operações, pode-se afirmar que o produto inicial era um número:

a) múltiplo de 13 b) divisor de 800 c) múltiplo de 29
d) divisor de 8.000

131) EPCAR - O valor numérico da expressão $\left(\dfrac{0,625-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-4}\right) \div \dfrac{0,777\ldots}{8}$ é:

a) -9 b) -6 c) $-\dfrac{9}{10}$ d) $-\dfrac{9}{37}$ e) $-\dfrac{7}{45}$

132) EPCAR - Assinale o número correspondente à média proporcional entre $0,04$ e $0,25$.

a) $0,1$ b) $0,2$ c) $0,3$ d) $0,4$ e) $0,5$

133) EPCAR - Uma mistura com $4,8$ litros de água e $27,2$ litros de álcool, o percentual de água da mistura é expressa pelo número:

a) $11,5$ b) $13,0$ c) $15,0$ d) $15,7$ e) $17,6$

134) EPCAR - Quantos azulejos devem ser usados para compor uma parede retangular de $15\,m$ de comprimento por $3\,m$ de altura, sabendo que cada azulejo tem a forma de um quadrado de $15\,cm$ de lado?

a) 2×10^2 b) 2×10^3 c) 2×10^4 d) $2,5\times10^2$ e) $3,3\times10^3$

135) EPCAR - Os restos das divisões de 247 e 315 por x são 7 e 3, respectivamente. Os restos das divisões de 167 e 213 por y são 5 e 3, respectivamente. O maior valor possível para a soma $x+y$ é:

a) 36 b) 30 c) 34 d) 35

136) EPCAR - Três alunos A, B e C participam de uma gincana e uma das tarefas é uma corrida em uma pista circular. Eles gastam para esta corrida, respectivamente, $1,2$ minutos, $1,5$ minutos e 2 minutos para completarem uma volta na pista. Eles partem do mesmo local e no mesmo instante. Após algum tempo, os três alunos se encontram pela primeira vez no local de partida. Considerando os dados acima, assinale a opção correta.

a) Na terceira vez que os três se encontrarem, o aluno menos veloz terá completado 12 voltas.

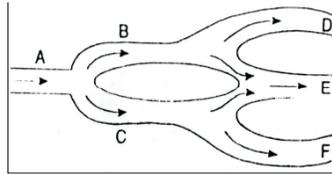
b) O tempo que o aluno B gastou até que os três se encontraram pela primeira vez foi de 4 minutos.

c) No momento em que os três alunos se encontraram pela segunda vez, o aluno mais veloz gastou 15 minutos.

d) A soma do número de voltas que os três alunos completaram quando se encontraram pela segunda vez foi 24.

137) EPCAR - Um tear eletrônico, trabalhando 5 horas por dia, produz 1.200 peças em 3 dias. O número de horas que deverá trabalhar no $8^{\underline{o}}$ dia para produzir 1.840 peças, se o regime de trabalho fosse 3 horas diárias, seria um número do intervalo:

a) $[2,3[$ b) $[3,4[$ c) $[4,6[$ d) $[1,2[$

138) EPCAR - A figura abaixo mostra um trecho de uma malha rodoviária de mão única. Dos veículos que passam por A, 45% viram à esquerda, dos veículos que passam por B, 35% viram à esquerda. Daqueles que trafegam por C, 30% dobram à esquerda. Qual é o percentual dos veículos que, passando por A, entram em E?

a) $57,50\%$ b) $45,75\%$ c) $38,60\%$ d) $29,85\%$

139) EPCAR - Um caminhão-tanque com capacidade para transportar V litros faz a distribuição de óleo em três fábricas: α, β e γ. Partindo com o tanque cheio, deixou $\frac{3}{20}$ do total em α. Se em β deixou $\frac{5}{17}$ do que restou e em γ, os últimos 12.600 litros, então, pode-se afirmar que:

a) V é tal que $16.000 < V < 20.000$

b) a fábrica α recebeu, em litros, um valor divisível por 9

c) a fábrica β recebeu, em litros, um valor maior que 6.000

d) a soma das quantidades recebidas pelas fábricas α e β é, em litros, um valor V' tal que $9.000 < V' < 15.000$

140) Um número de três algarismos a, b e c, nessa ordem, $(a > c)$ é tal que, quando se inverte a posição dos algarismos a e c e subtrai-se o novo número do original, encontra-se, na diferença, um número terminado em 4. Essa diferença é um número cuja soma dos algarismos é:

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19

141) EPCAR - Sejam os números inteiros $MNPQ$ e $NMPQ$, onde M, N, P e Q são algarismos distintos e diferentes de zero e $N > M$. Sobre a diferença $(NMPQ - MNPQ)$, pode-se afirmar que, necessariamente, será:

a) ímpar. b) divisível por $(M - N)$. c) sempre negativa. d) par menor que 800

142) EPCAR - Três pedaços de arame têm comprimento $3,6\,\mathsf{dam}$, $4800\,\mathsf{cm}$ e $0,72\,\mathsf{hm}$. Deseja-se cortá-los em pedaços menores, cujos comprimentos sejam iguais e sem que haja perda de material. Com base nisso, é INCORRETO afirmar que:

a) o comprimento de cada pedaço de arame, após cortá-los, é $120\,\mathsf{dm}$.

b) o menor número de pedaços de arame com a mesma medida é 12.

c) o arame de comprimento $3,6\,\mathsf{dam}$ será dividido em 3 partes iguais.

d) os arames de comprimento $4.800\,\mathsf{cm}$ e $0,72\,\mathsf{hm}$, após serem cortados, formam um conjunto de 10 pedaços de arame.

143) EPCAR - Ao desfazer uma sociedade, dois sócios A e B fizeram a retirada de suas partes que eram diretamente proporcionais a 1 e 3. O sócio A aplicou, então, o valor de sua retirada à taxa de 50% ao ano. Já o sócio B aplicou a sua parte à taxa de 25% ao ano e $\dfrac{2}{3}$ do montante que recebeu após 12 meses foi igual a 150.000 reais. Pode-se afirmar que:

a) a diferença entre os rendimentos dos sócios A e B, após 12 meses, é, em milhares de reais, um número do intervalo $[8,15]$

b) a soma dos capitais retirados por A e B é igual ao montante que o sócio B conseguiu após 12 meses.

c) o rendimento obtido pelo sócio A é igual a 30% do rendimento do sócio B.

d) o capital retirado pelo sócio A e o rendimento conseguido pelo sócio B são valores iguais.

144) EPCAR - Trinta operários trabalhando 8 horas por dia, constroem 36 casas em 6 meses. O número de dias que deverão ser trabalhados no último mês para que $\dfrac{3}{2}$ dos operários, trabalhando 2 horas a mais por dia, construam $0,75$ das casas, considerando um mês igual a 30 dias, é:

a) 10 b) 12 c) 15 d) 16

145) EPCAR - Com os $\dfrac{7}{8}$ da metade do valor da herança que Carlos recebeu, ele adquiriu um lote. Com $\dfrac{1}{3}$ do restante ele liquidou suas dívidas e o valor que sobrou foi dividido em partes iguais aplicadas como a seguir: a $1^{\underline{a}}$ parte foi aplicada na poupança com rendimento de $0,5\%$ ao mês; e a $2^{\underline{a}}$ foi aplicada em ações onde, ao fim de 15 dias, ele havia perdido 40% do

valor dessa aplicação. Ao fim dos 15 dias subseqüentes, Carlos conseguiu recuperar 50% do que foi perdido, ficando com um capital equivalente a 48.000 reais na 2ª parte aplicada. Com base nisso, é INCORRETO afirmar que:

a) o valor total dessa herança seria suficiente para comprar uma casa avaliada em 300.000 reais, caso não comprasse o lote nem liquidasse suas dívidas.

b) o lote adquirido custou menos de 150.000 reais.

c) o rendimento da poupança no primeiro mês foi superior a 200 reais.

d) considerando o mês de 30 dias, ao final do primeiro mês, a soma das partes aplicadas e seus rendimentos totalizavam 108.000 reais.

146) EPCAR - Um determinado carro popular custa, numa revendedora, R$ 22.500,00 à vista. Numa promoção para queima de estoque, que será realizada em dezembro de 2.006, com R$ 6.500,00 de entrada, um comprador tem o valor restante do carro facilitado em 36 prestações mensais, sendo que as prestações num mesmo ano são iguais e que a cada ano a prestação sofre um aumento de 10%, relativamente à do ano anterior. Sabendo-se que a primeira prestação a ser paga no mês de janeiro de 2.007 é de R$ 500,00, pode-se afirmar que:

a) o comprador desembolsará, ao final do 2º ano, excluindo a entrada, um valor maior que 12.800,00.

b) o valor total a ser desembolsado na compra a prazo será de R$ 25.000,00.

c) se o comprador adquirir o carro à vista e não optar pela promoção, economizará 17% do valor do carro à vista.

d) o valor total das prestações nos 36 meses é de R$ 19.860,00.

147) CEFETEQ - O volume do tanque de combustível de um ônibus é de $64.000\,\text{cm}^3$. Sendo o consumo desse ônibus de 1 litro a cada 12 km, Determine a distância máxima que esse veículo pode percorrer até esgotar todo o combustível.

148) CEFETEQ - O gerente de um mercado lança a seguinte promoção: "Qualquer que seja o valor de sua compra, leve 25% em mercadorias". Qual o desconto real concedido pelo gerente?

149) CEFETEQ - Três cidades brasileiras A, B e C comemoram festas tradicionais: de 5 em 5 meses em A; de 8 em 8 meses em B e, de 12 em 12 meses, em C. Essas festas coincidiram, pela primeira vez, em 1.981. Determine o ANO em que elas coincidirão novamente pela primeira vez.

150) CEFETEQ - O quociente de uma divisão é 4 e o resto 700. A diferença entre o dividendo e o divisor é 6.200. Calcule o dividendo.

151) CEFETEQ - Na padaria do Sr, Manuel, onde cada bisnaga custa R$ 1, 00, é lançada a seguinte promoção: "Na compra de duas (2) bisnagas, o cliente leva três (3)".Se a promoção fosse: "pague 3 e leve 4", quantos reais estariam a mais, na venda de 36 bisnagas?

152) CEFETEQ - Sobre uma mesa, num laboratório, há um frasco contendo 1, 20 litros de certo líquido. Uma pessoa esbarra na mesa e entorna uma quantidade X do líquido. Observa-se, no entanto, que ainda restam 900 mililitros do líquido do frasco. Calcule o percentual do líquido derramado.

153) CEFETEQ - Na composição em fatores primos de certo número natural N, encontramos o seguinte resultado: $N = 2^x \times 3^y \times 5^z$. Sabendo que N possui 105 divisores, calcule o MDC entre x, y e z.

154) Um vendedor de reagentes químicos paga R$ 80, 00 por um frasco de reagente, devendo revendê-lo a R$ 100, 00. Quantos frascos do mesmo reagente deve vender, para conseguir um lucro real de R$ 1.360, 00, sabendo que a despesa com o frete é de R$ 120, 00?

155) CEFETEQ - Uma fábrica trabalha com 16 máquinas, durante 10 horas por dia e produz 250 unidades de um determinado produto. Se a fábrica trabalhasse com mais 24 máquinas, quantas horas diárias seriam necessárias para que a produção duplicasse?

156) CEFETEQ - Determine o maior número que dividido por 15, apresenta resto igual ao triplo do quociente.

157) CEFETEQ - Um trem parte às dez horas da manhã do Rio de Janeiro para Salvador, com velocidade constante de 40 km/h. Duas horas depois, portanto ao meio dia, parte de Salvador para o Rio de Janeiro, outro trem com velocidade constante de 60 km/h. Sendo de 1.200 km a distância entre as cidades, Calcule a que distância do Rio de Janeiro, passará um trem pelo outro.

158) CEFETEQ - Determine o valor da expressão: $484 : 4 + 13^\circ + \sqrt{144}$

159) CEFETEQ - O salário de um técnico teve dois aumentos: 30% em outubro/93 e 120% em novembro/93, passando a valer R$ 114.400,00. Qual era o salário desse técnico anteriormente a esses dois aumentos?

160) CEFETEQ - Quatro torneiras despejam um total de 2.800 litros de água em 2 horas. Calcule, em quantas horas, três dessas torneiras despejam um total de 21.000 litros de água.

161) CEFETEQ - A soma dos termos de uma fração é igual a 16. Somando-se 5 unidades a cada um dos termos, obtém-se uma outra fração, equivalente a $\frac{6}{7}$. Determine os termos da fração original.

162) CEFETEQ - Em outubro deste ano, a construção de $1\,m^2$ de uma casa custava R$ 100,00. Por que valor, em reais, deveria ser vendido essa casa de $60\,m^2$ de área para lucrar 25%?

163) CEFETEQ - Sabendo que $xy = 6$, $yz = 24$ e $xz = 8$, calcule o valor da expressão $x^2 + y^2 + z^2$.

164) CEFETEQ - Uma frota de caminhões percorreu 3.000 km para transportar uma mercadoria, com velocidade média de 60 km/h, gastando 10 dias. Quantos dias serão necessários para que, nas mesmas condições, uma frota idêntica percorra 4.500 km com uma velocidade média de 50 km/h?

165) CEFETEQ - Um comerciante ao falir consegue pagar $\frac{15}{32}$ do total da sua dívida. Vende alguns bens e consegue pagar mais R$ 150.300,00. Desta forma, paga 75% do total da divida. Calcule a dívida total do comerciante.

166) CEFETEQ - Um objeto de R$ 150,00 é vendido nas seguintes condições: 20% no ato da compra; o restante será acrescido de 2,5% sobre o seu valor, e dividido em 3 parcelas iguais. Determine o valor de cada parcela.

167) CEFETEQ - A freqüência diária dos operários de uma fábrica é de 98%. Sendo de 40 operários o número de faltas por dia, pergunta-se: quantos operários têm essa fábrica?

168) CEFETEQ - Leia atentamente, o artigo publicado na revista "Época".

INFLAÇÃO

Maré alta de outono.

Remédios já subiram. Desde sexta feira 4, o aumento das tarifas aéreas está autorizado. Energia elétrica e tarifas telefônicas devem subir nos próximos dias. Gasolina e álcool também ficarão mais caros. Tudo isso vai repercutir na inflação já no mês de julho, prevêem economistas. Energia elétrica e álcool, que pode ficar 50% mais caros, deverão ser os itens mais pesados no bolso do consumidor.

Suponha que um aposentado receba um salário de R$ 123, 60. Este senhor comprava uma caixa de remédio por R$ 10, 00, antes do aumento de 3%. Sabe-se que cada caixa desse remédio dura apenas 5 dias e que o aposentado não pode deixar de tomar o remédio nenhum dia. Considerando 1 mês igual a 30 dias, Calcule o percentual do salário do senhor que será gasto com esse remédio.

169) CEFETEQ - O Máximo Divisor Comum e o Mínimo Múltiplo Comum de dois números naturais são,respectivamente, iguais a 6 e 60. Sabendo que o menor dos dois números é múltiplo de 4, calcule o maior.

170) CEFETEQ - Um laboratório, que opera com 20 técnicos, realiza um trabalho em 30 horas. Se contratar mais 10 técnicos nas mesmas condições

e com a mesma capacidade dos outros, em quanto tempo esse laboratório realizará o mesmo trabalho?

171) CEFETEQ - Célio e Oliveira partem do ponto A, ao mesmo tempo, fazendo o mesmo percurso para a cidade de Santos, distante $72\,km$ do ponto A. Célio, que anda $2\,km/h$ a mais que Oliveira, chega a Santos 3 horas antes. Calcule, em km/h, a velocidade média de Célio.

172) CEFETEQ - Leia atentamente, o artigo publicado na revista "Época".

CELULAR NÃO É BRINQUEDO

Conselhos úteis de psicólogos e médicos aos pais que presenteiam crianças com esses aparelhos.

Na escola – Os pais devem ensinar os filhos a respeitar colegas e professores mantendo o celular desligado durante as aulas. O exemplo vem de casa: só em situação de urgência os pais devem interromper aulas com chamadas telefônicas.

Sob controle – A insistência das chamadas telefônicas às crianças acaba gerando nelas inseguranças e perda da noção de privacidade, o que é bem sério.

Custo – Cabe aos pais explicar quanto custa a chamada local (R\$ $0,42$ por minuto) e a interurbana (R\$ $0,70$ por minuto). É melhor do que reclamar do valor abusivo das contas.

Cuidados – Baterias de celulares precisam ser manipuladas com cuidado, pois contêm substâncias tóxicas ao organismo. Crianças não devem colecionar baterias velhas. Ao sinal de fadiga elas devem ser logo trocadas.

Mário Sério não prestou muita atenção na matéria e gastou R\$ $150,60$ só de ligações (locais e interurbanas). Sabendo que o tempo total gasto com essas ligações foi de 5 horas, Determine quantas horas foram utilizadas em ligações interurbanas.

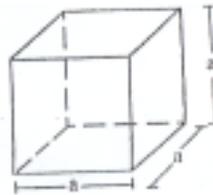
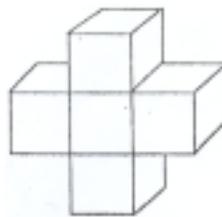
173) CEFETEQ - Há 40 dias, uma torneira na casa de Nelson está apresentando um vazamento de 45 gotas por minuto. Se um vazamento de 20 gotas por minuto apresentado pela mesma torneira, desperdiça 100 litros de água em 30 dias, calcule o número de litros de água já desperdiçados na casa de Nelson.

174) CEFETEQ - Paulo percorre 4.320 km em seu automóvel, durante 5 dias, rodando 8 horas por dia. Calcule quantas horas diárias deverá Paulo rodar com o mesmo veículo para percorrer 2.916 km em 3 dias, mantidas as mesmas condições.

175) CEFETEQ - Calcule o valor da expressão

$$\sqrt[3]{\frac{(0,005)^2 \times 0,000075}{10}} \div (10^{-4} \times 2^{-1/3} \times 3^{1/3})$$

176) CEFETEQ - Jorge gasta 25% do seu salário com o aluguel de seu apartamento. O salário de Jorge vai aumentar 25% e o aluguel do seu apartamento aumentará 30%. A que percentual do novo salário de Jorge corresponderá o novo aluguel a ser pago?

177) CEFETEQ - No Laboratório de Alimentos, os alunos da CEFETEQ preencheram com água, $\frac{2}{3}$ do volume máximo de um recipiente, que tem a forma de um cubo e cuja aresta mede 9 cm, conforme a figura abaixo. Calcule, em litros, o volume de água colocado pelos alunos neste recipiente.

178) CEFETEQ - Conforme a figura apresentada, cinco cubos idênticos e justapostos formam uma cruz. Sendo a área total da cruz de 198 cm^2, calcule, em cm^3, o volume de cada cubo.

179) CEFETEQ - A cantina da UnED serve refrigerante em copos com capacidade de 0,25 litros cada um. Num dia, foram servidos na cantina

400 copos cheios de refrigerante. Quantos litros de refrigerante foram consumidos nesse dia?

180) CEFETEQ - Determine o resultado do produto

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

181) CEFETEQ - Qual é a diferença percentual entre um desconto de 40% sobre certa quantia e dois descontos sucessivos de 36% e 4% sobre a mesma quantia?

182) CEFETEQ - Determine o valor do produto gerado por

$(99-9)\times(99-19)\times(99-29)\times\ldots\times(99-189)\times(99-199)$

183) CEFETEQ - Os números abaixo estão dispostos (em linhas e colunas):

1	2
8	9
15	16
22	23
29	30
⋮	⋮

Determine a posição (linha e coluna) ocupada pelo número 107.

184) CEFETEQ - Um automóvel custava, em janeiro deste ano, R\$ 13.000,00. Em março, este preço sofreu um reajuste de 4% e, em setembro, um novo reajuste de 6%. Determine:

a) o preço do automóvel em setembro;

b) o percentual total aplicado sobre do automóvel, no período de janeiro a setembro.

185) CEFETEQ - A cisterna de um edifício comporta 21.000 litros d'água. Quantos baldes de $17,5\,dm^3$ de volume serão necessários para enchê-la?

186) CEFETEQ - Certa máquina produz 30.000 latas em 6 horas. Quantas latas essa máquina produzirá em 4 horas?

187) CEFETEQ - Um livro, cujo preço era R\$ 20,00, passou a custar R\$ 32,00. Determine o percentual de aumento deste livro.

188) CEFETEQ - Simplificar a expressão: $\dfrac{1.000.000 \times \sqrt{128} \times 32^{0,2}}{(0,01)^2 \times \left(\dfrac{1}{10}\right)^{-9} \times \sqrt[4]{1.024}}$

189) CEFETEQ - Um reservatório com a forma de um paralelepípedo de dimensões $60\,\text{cm}$, $60\,\text{dm}$ e $1,29\,\text{m}$ está cheio d'água. Quantos litros de água devemos retirar do reservatório, para que ele fique com 75% de sua capacidade?

190) CEFETEQ - Determine o menor número natural pelo qual devemos multiplicar 3.675, para obtermos um cubo perfeito.

191) CEFETEQ - Calcule o valor da expressão

$$\left[\sqrt{0,25} + 4 \times (0,50)^4 + 8^{\frac{2}{3}}\right] + 2^0$$

192) CEFETEQ - Calcule, em litros, a capacidade de uma caixa d'água que tem $1,8\,\text{m}$ de comprimento, $140\,\text{cm}$ de largura e $12\,\text{dm}$ de altura?

193) CEFETEQ - Em uma fábrica de bebidas, uma máquina de rotular garrafas funcionou durante 6 horas por dia e rotulou 3.000 garrafas em 6 dias. Determine o número de horas que esta mesma máquina deverá funcionar por dia, para rotular 5.000 garrafas em 4 dias.

194) CEFETEQ - Uma indústria embala sua produção de óleo vegetal em latas de $30\,\text{cm}^3$. Quantas destas latas são necessárias para embalar uma produção de 900 litros de óleo vegetal?

195) CEFETEQ - Para garantir uma sobrevivência digna, estudos indicaram que o salário mínimo pago aos trabalhadores brasileiros deveria aumentar de R$ 64,79 para R$ 453,53. Em termos percentuais, de quanto deveria ser este aumento?

196) CEFETEQ - Oliveira comprou um carro e viajou 8 dias, com uma velocidade média de $100\,\text{km/h}$, rodando 6 horas por dia. Determine em quantos dias Oliveira faria a mesma viagem, rodando 10 horas por dia a uma velocidade média de $60\,\text{km/h}$.

197) CEFETEQ - Sueli, Leila e Isabel são netas da vovó Lurdinha, que recebe a visitas delas da seguinte forma: Sueli, de 11 em 11 dias; Leila, de 6 em 6 dias; e Isabel, de 4 em 4 dias. Sabendo que as três netas a visitaram em 31 de dezembro de 2.000, calcule quantas vezes, em 2.001, as três netas teriam visitado a vovó Lurdinha, no mesmo dia.

198) CEFETEQ - Júlio recebeu um desconto de dez por cento no preço do sapato que comprou na Sapataria ANDARAPÉ. Devido a um defeito de fabricação, a sapataria devolveu quarenta por cento da quantia paga por Júlio. Calcule o desconto total que Júlio obteve da Sapataria ANDARAPÉ.

199) CEFETEQ - Um automóvel, com velocidade média de $60\,km/h$, leve 4 horas e 30 minutos para percorrer a distância entre duas cidades A e B. Se a velocidade média fosse de $10\,km/h$, qual seria o tempo gasto para percorrer a mesma distância?

200) CEFETEQ - O mmc de três números é formado exclusivamente pelos fatores primos $2, 3$ e 7, todos com o mesmo expoente. Dois dos números são 21 e 98. Ache o terceiro que não é divisível por 7.

201) CEFETEQ - Em janeiro deste ano, num certo mercado, um produto custava X reais. Houve um aumento de 10% e o produto passou a custar Y reais, em fevereiro. No início de março o mesmo produto sofreu um novo aumento de 10% sobre Y, passando a custar Z reais. Calcule, em termos percentuais, o aumento de X, em relação a Z.

202) CEFETEQ - Qual o resultado mais simples da expressão

$$\frac{4^0 + 1,333\ldots}{[-\frac{1}{3}]^3} - \frac{1^5 - 2^3}{0,1}?$$

203) CEFETEQ - João conseguiu as seguintes notas bimestrais, em Química:

Bim.	10	20	30	40
Nota	$9,0$	$6,0$	$3,0$	$5,0$

Na escola de João, a nota final é a média aritmética ponderada de suas quatro notas bimestrais. A nota do $1^{\underline{o}}$ bimestre tem peso 1; a nota do $2^{\underline{o}}$ bimestre tem peso 2, $3^{\underline{o}}$ peso 3 e $4^{\underline{o}}$ peso 4. Determine a nota final obtida por João.

204) CEFETEQ - O Sr. Mangueira trabalha no CEFET Química e usa o trem como meio de transporte. A presença dos dormentes na ferrovia o fez refletir sobre a prática irresponsável do desmatamento nas florestas

brasileiras e o fez pensar: "Quantos dormentes foram necessários na construção do trecho da via férrea da estação Central do Brasil até a de Santa Cruz?"

Analise estas informações e calcule a quantidade de dormentes necessários na construção desse trecho da linha férrea:

$1^{\underline{a}}$) Todos os dormentes possuem as mesmas dimensões de $3\,\mathrm{m} \times 20\,\mathrm{cm}$ e mantêm entre si a mesma distância de $30\,\mathrm{cm}$;

$2^{\underline{a}}$) Esse trecho da via com $56\,\mathrm{km}$ mais $20\,\mathrm{cm}$ de comprimento foi medido do início do primeiro dormente até o final do último.

205) CMRJ - Ficou resolvido que , em um loteamento, a numeração contínua dos lotes teria início no número 34 e terminaria no número 576 e seria colocado um poste de luz em frente a cada lote que tivesse o algarismo 7 na casa das unidades. Sabe-se que foram comprados 73 postes, assim sendo, pode-se afirmar que:

a) sobraram 19 postes

b) o número correto de postes seria 52

c) ficariam faltando 470 postes

d) deveriam ser comprados mais 458 postes

206) CMRJ - Um pintor de letras, contratado para numerar as poltronas de um auditório, cobrou $\mathrm{R\$}\,0,50$ por algarismo que pintasse. Tendo começado pela poltrona de número 49, ao final do seu trabalho recebeu $\mathrm{R\$}\,405,00$. Sabendo-se que ele numerou todas as poltronas restantes com números consecutivos, quantas poltronas ele numerou?

a) 335 b) 287 c) 280 d) 274

207) CMRJ - No numeral $257.N45.63N.931$, a letra N está representando um algarismo. Se a divisão do número corresponde por 9 deixa resto 3, então N é igual a:

a) 3 b) 5 c) 6 d) 6

208) CMRJ - A soma de três números que figuram numa subtração é $1,5$. O resto excede o subtraendo de $0,23$. Quanto devemos somar ao dobro do resto para obtermos a unidade?

a) $0,02$ b) $0,2$ c) $0,25$ d) $0,25$ e) $0,48$

209) CMRJ - No município de Carapebus, o número de votos do primeiro colocado foi igual ao maior múltiplo de 7 menor que 1.900 e o número de votos do segundo colocado foi igual ao menor múltiplo de 7 maior que 1.650. A diferença do número de votos do primeiro para o segundo colocado é um número que possui:

a) 6 divisores b) 5 divisores c) 4 divisores d) 3 divisores

210) CMRJ - O número $5^4 \times 7^3 \times 11 \times 17$ têm 80 divisores naturais distintos. Se multiplicarmos este número por 7, o número de divisores *não* primos deste novo número será:

a) 83 b) 96 c) 100 d) 556

211) CMRJ - Considere três números naturais representados por m, n e p. Se os restos das divisões de m, n e p por 11são, respectivamente, 3, 4 e 5, então, o resto da divisão de $(m + n + p)$ por 11 é:

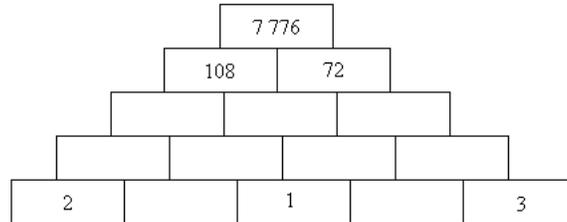
a) 5 b) 4 c) 3 d) 1

212) CMRJ - Um teatro possui 785 poltronas para acomodar os espectadores, todas numeradas de 1 a 785. Para enumerar as poltronas de numeração par são necessários:

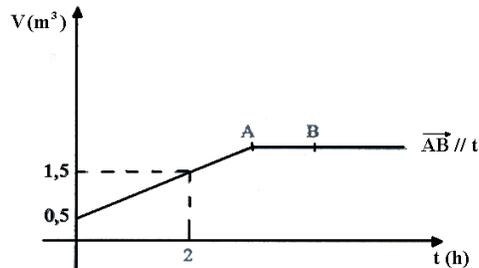
a) 785 algarismos b) 1.123 algarismos c) 2.245 algarismos
d) 1.210 algarismos

213) CMRJ - Para abrir uma valeta de $300\,m$ de comprimento por $2\,m$ de profundidade e $80\,cm$ de largura, 25 operários da CEDAE levaram 10 dias. Se aumentarmos em $\frac{1}{5}$ o número de operários, a profundidade passar para $3\,m$ e a largura diminuir $\frac{1}{4}$ de sua medida, o tempo necessário para abrir $160\,m$ de valeta será de:

a) 3 dias b) 5 dias c) 6 dias d) 7 dias e) 8 dias

214) CMRJ - A figura seguinte mostra quinze retângulos, sendo seis numerados e nove não numerados. Cada retângulo dado está apoiado em dois outros, excluindo-se os cincos que formam a base da figura. Sabendo que o número natural em cada retângulo fora da base, é igual ao produto dos dois números naturais observados nos dois retângulos em que ele se apóia (Ex: $7.776 = 108 \times 72$), a soma dos números que estão faltando na figura é:

a) 28 b) 38 c) 48 d) 58 e) 68

215) CMRJ - Uma caixa d'água, cuja capacidade é de 5.700 litros, é alimentada por uma torneira e contém, sempre, no mínimo, 500 litros de água em seu interior. Estando com esse volume mínimo, se a torneira for aberta, o volume V de água na caixa varia, em função do tempo t em que a torneira permanece aberta, segundo o gráfico cartesiano abaixo indicado:

(Dado $1\text{m}^3 = 1000\,\ell$)

Quanto tempo a torneira deve permanecer aberta para encher completamente a caixa, sem transbordar, partindo do volume mínimo?

a) 6 h 36 min b) 8 h 36 min c) 9 h 54 min

d) 10 h 04 min e) 10 h 24 min

216) CMRJ - O lucro L de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 8x - 7$, onde x é a quantidade vendida. O lucro será positivo, se e somente se,

a) $2 < x < 5$ b) $x > 7$ ou $x < 1$ c) $0 < x < 12$

d) $x > 12$ e) $1 < x < 7$

217) CMRJ - Três máquinas, funcionam 10 horas por dia, durante 4 dias, imprimem 60.000 folhas. Admitindo-se que uma das máquinas não esteja

funcionando e havendo necessidade de imprimir, em 6 dias, 120.000 folhas, o número de horas por dia que cada uma das máquinas restantes deverá funcionar é:

a) 10 b) 15 c) 20 d) 24 e) 25

218) CMRJ - Um capital C foi aplicado a juros simples, durante um ano e seis meses, da seguinte maneira: 50% do capital foi aplicado a 4% ao ano, $\frac{1}{3}$ foi aplicado a 10% ao ano e o restante foi aplicado a $i\%$ ao ano. Se o rendimento total obtido ao término do prazo foi $10,5\%$ do capital aplicado, então o valor i é:

a) 8% b) 10% c) 12% d) 14% e) 16%

219) CMRJ - Uma determinada mercadoria sofreu um aumento de certa percentual e, depois, sobre o preço aumentado, sofreu um desconto de metade desta percentual. Sabendo que o preço final é de 12% maior que o preço inicial, sobre o aumento inicial podemos afirmar que:

a) ele só pode ter um valor, inferior a 50%

b) ele só pode ter um valor, superior a 50%

c) ele pode ter dois valores, ambos superiores a 50%

d) ele pode ter dois valores, ambos inferiores a 50%

e) ele pode ter dois valores, um inferior e outro superior a 50%

220) CMRJ - Daniel estava lendo um livro e ao olhar o número da página (300) veio em sua mente o seguinte questionamento: "De 1 até 300, quantos números inteiros têm a soma de seus algarismos igual a 10"? A resposta ao questionamento de Daniel é:

a) 15 números b) 16 números c) 26 números

d) 28 números e) 30 números

221) CMRJ - Várias ovelhas comem o pasto de um campo em 3 dias. Se houvesse mais três ovelhas no rebanho, o pasto seria comido em 2 dias. Supondo que todas as ovelhas comam a mesma quantidade por dia, e que o pasto não volte a crescer, em quanto tempo uma só ovelha comeria todo o pasto?

a) 18 dias b) 12 dias c) 8 dias d) 6 dias e) 4 dias

222) CMRJ - Em certos anos, o mês de outubro, que tem 31 dias, tem exatamente quatro terças-feiras e quatro sábados. Nesses anos, o dia da semana a que corresponde o dia 5 de outubro é:

a) domingo b) segunda-feira c) quarta-feira

d) quinta-feira e) sexta-feira

223) CMRJ - Ao se reformar o assoalho de uma sala, suas 49 tábuas corridas foram substituídas por tacos. As tábuas medem $3\,\mathrm{m}$ de comprimento por $15\,\mathrm{cm}$ de largura e os tacos, $2\,\mathrm{dm}$ por $75\,\mathrm{mm}$. O número de tacos necessários para essa substituição foi:

a) 1.029 b) 1.050 c) 1.470 d) 1.500 e) 1.874

224) CMRJ - Durante o ano de 2.003, o preço da gasolina sofreu os seguintes reajustes (sucessivos e nesta ordem):

I) aumento de 10%

II) aumento de 8%

III) redução de 5%

Em relação a seu preço inicial neste ano, podemos afirmar que houve aumento de:

a) 13% b) 12,86% c) 10,5% d) 7% e) 5,8%

225) CMRJ - Com uma velocidade V, o satélite **Alfa 45** leve $1\,\mathrm{h}$ e $30\,\mathrm{min}$ para percorrer uma órbita circular, em torno da Terra, de $36.000\,\mathrm{km}$ de raio. O satélite **Beta 32**, com $\frac{2}{3}$ da velocidade do **Alfa 45**, obedece a uma órbita circular de $28.000\,\mathrm{km}$ de raio. O tempo que o satélite **Beta 32** dará uma volta completa por sua órbita é:

a) $1\,\mathrm{h}$ e $55\,\mathrm{min}$ b) $1\,\mathrm{h}$ e $45\,\mathrm{min}$ c) $1\,\mathrm{h}$ e $35\,\mathrm{min}$ d) $1\,\mathrm{h}$ e $25\,\mathrm{min}$

226) Uma firma comprou quatro tipos de peças para a reposição do seu estoque, num total de 400 peças. A tabela abaixo indica o percentual da quantidade de cada tipo de peça comprada, relativa à compra efetuada, e o valor unitário de cada peça.

Tipo de Peça	%	Valor Unitário
A	15	R$ 25,00
B	20	R$ 20,00
C	30	R$ 15,00
D	35	R$ 10,00

O valor que esta firma gastou para comprar as peças dos tipos A e C foi:

a) R$ 825,00 b) R$ 1.800,00 c) R$ 2.400,00

d) R$ 2.800,00 e) R$ 3.300,00

227) CMRJ - Uma gráfica tem capacidade operacional para imprimir 12.500 livros de 120 páginas cada, em 15 dias, utilizando 4 máquinas impressoras iguais e trabalhando 8 horas diárias. Tendo recebido uma encomenda de 18.000 livros de 150 páginas cada, que deverão ser entregues em 24 dias, o proprietário resolveu comprar mais máquinas impressoras iguais às já existentes na gráfica. Trabalhando 6 horas diárias para o cumprimento da encomenda, o número de máquinas impressoras que o proprietário deverá comprar é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

228) OBM - O número $N = 12345a7$ é divisível por 3 e por 7. Então, o algarismo a vale:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 6 e) 8

229) OBM - Qual o menor número inteiro positivo pelo qual se deve multiplicar o número $7 \times 3^3 \times 2^4$ para se obter um quadrado perfeito?

a) 7 b) 84 c) 0 d) 1 e) 21

230) OBM - O valor de $\dfrac{15^{30}}{45^{15}}$ é:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15}$ b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$ c) 1 d) 3^{15} e) 5^{15}

231) OBM - Se a decomposição do número P em fatores primos é $P = mnp^2$, então o número de divisores positivos de P é:

a) 18 b) 16 c) 10 d) 12 e) 14

232) OBM - Sendo $n \in \mathbb{N}^*$ um número primo diferente de 2 e de 3, pode-se afirmar que o número $6n$ tem sempre quantos divisores?

a) 8 b) 6 c) 12 d) 10 e) 18

233) OBM - Simplificando a $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$ obtém-se:

a) $\sqrt{2}$ b) 16 c) 32 d) $12^{\frac{2}{3}}$ e) $5^{12} \times 5$

234) OBM - O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126, e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:

a) 2 b) 3 c) 6 d) 7 e) 9

235) OBM - Qual o 1.999º algarismo após a vírgula na representação decimal de $\dfrac{4}{37}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 7 e) 8

236) OBM - O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a:

a) 25^{25} b) 10^{25} c) 100^{25} d) 2^{25} e) 2×25^{25}

237) OBM - Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se forem colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos ainda podem ser carregados?

a) 132 b) 144 c) 132 d) 140 e) 148

238) OBM - O preço de um estacionamento é formado por um valor fixo para as duas primeiras horas e um adicional por cada hora subseqüente. Se o estacionamento por 3 horas custa R$ 5,00 e por 5 horas custa R$ 6,00, quanto custa o estacionamento por 8 horas?

a) R$ 7,00 b) R$ 7,50 c) R$ 9,60 d) R$ 12,00 e) R$ 13,33

239) OBM - Se o seu salário sobe 26% e os preços sobem 20%, de quanto aumenta o seu poder aquisitivo?

a) 5% b) 6% c) 7% d) 8% e) 9%

240) OBM - Uma jarra tem 600 g de uma mistura de água e açúcar na qual 20% é de açúcar. Quantos gramas de água devemos acrescentar para que a mistura passe a ter 5% de açúcar?

a) 1.800 g   b) 2.000 g   c) 2.400 g   d) 3.000 g   e) 3.600 g

241) OBM - O valor da soma

$$\frac{2^{2.003} \times 9^{1.001}}{4^{1.001} \times 3^{2.003}} + \frac{2^{2.002} \times 9^{1.001}}{4^{1.001} \times 3^{2.003}}$$

é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1   d) $\frac{4}{3}$ e) 2

242) OBM - Considere os números $X = 2^{700}$, $Y = 11^{200}$ e $Z = 5^{300}$. Assinale a opção correta:

a) $X < Z < Y$ b) $Y < X < Z$ c) $Y < Z < X$

d) $Z < X < Y$ e) $Z < Y < X$

243) OBM - O número 19**ab**, onde **a** e **b** são dígitos, é um quadrado perfeito. O valor da raiz quadrada do número cuja representação decimal é **ab** é:

a) 5   b) 6   c) 7   d) 8   e) 9

244) OBM - A Revolução Francesa, em 1.798, trouxe muitas mudanças na humanidade. Em 1.791, após Revolução Francesa, a Academia Francesa de Ciências propôs um novo sistema de medidas. Esse sistema era baseado numa medida "natural"de comprimento chamado metro, que foi definida como um décimo milionésimo da distância do Pólo Norte ao Equador, medida em torno da circunferência do meridiano que passa por Paris. Tal sistema foi efetivamente adotado em 1.795. A definição atual do metro é diferente, mas o valor é aproximadamente o mesmo.

Considerando os fatos acima, qual é a ordem de grandeza do volume do planeta Terra, em metros cúbicos?

Obs.: Nesta questão você pode querer utilizar a fórmula do volume V da esfera, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, onde R é o raio da esfera.

a) 10^{16} b) 10^{21} c) 10^{26} d) 10^{31} e) 10^{36}

245) OBM - Quantas vezes aparece o algarismo 9 no resultado da operação $10^{100} - 2.003$?

246) OBM - Na multiplicação $45 \times a3 = 3bcd$, calcule $b + c + d$.

247) OBM - Se p e q são inteiros positivos tais que $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$, o menor valor que q pode ter é:

a) 6 b) 7 c) 25 d) 30 e) 60

248) OBM - Sejam x e y dois números reais positivos quaisquer e $\otimes$ e $\oplus$ duas operações definidas em $\mathbb{R}^*_+$ pelas sentenças:

(i) $x \otimes y = 20\%x + 10\%y$

(ii) $x \oplus y = 30\%y$, para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^*_+$

Quanto vale $(6 \oplus 2) \otimes 5$?

a) $0,48$ b) $0,68$ c) $0,18$ d) $0,62$ e) $0,42$

249) OBM - Observe as multiplicações a seguir:

$$12.345.679 \times 18 = 222.222.222$$
$$12.345.679 \times 27 = 333.333.333$$
$$12.345.679 \times 54 = 666.666.666$$

Para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por:

a) 29 b) 99 c) 72 d) 41 e) 81

250) OBM - Outro dia ganhei 250 reais, incluindo o pagamento de horas extras. O salário (sem horas extras) excede em 200 reais o que recebi pelas horas extras. Qual é o meu salário sem horas extras, em reais? a) 200 b) 150 c) 225 d) 175 e) 180

251) OBM - Num relógio digital, que marca de 0 : 00 até 23 : 59, quantas vezes por dia o mostrador apresenta todos os algarismos iguais?

a) 10 b) 8 c) 6 d) 7 e) 9

252) OBM - A prefeitura de certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

253) OBM - Numa caixa havia várias bolas, sendo 5 azuis, 4 amarelas, 3 vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Renato retirou 3 bolas da caixa. Sabendo que nenhuma delas era azul, nem amarela, nem preta, podemos afirmar a respeito dessas 3 bolas que:

a) são da mesma cor.

b) são vermelhas.

c) uma é vermelha e duas são brancas.

d) uma é branca e duas são vermelhas.

e) pelo menos uma é vermelha.

254) OBM - Um litro de álcool custa R\$ 0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

a) 54   b) 72   c) 50   d) 52   e) 45

255) OBM - O número 10 pode ser escrito de duas formas como soma de dois números primos: $10 = 5 + 5$ e $10 = 7 + 3$. De quantas maneiras podemos expressar o número 25 como uma soma de dois números primos?

a) 4   b) 1   c) 2   d) 3   e) nenhuma

256) Quantos números de três algarismos ímpares distintos são divisíveis por 3?

a) 18   b) 24   c) 28   d) 36   e) 48

257) OBM - Certo número N de dois algarismos é o quadrado de um número natural. Invertendo-se a ordem dos algarismos desse número, obtém-se um número ímpar. A diferença entre os dois números é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que a soma dos algarismos de N é:

a) 7   b) 10   c) 13   d) 9   e) 11

258) OBM - Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado. Para que possam ser mais bem transportadas essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. O número de latas de palmito em cada caixote é:

a) 576   b) 4.608   c) 2.304   d) 720   e) 144

259) OBM - Efetuando as operações indicadas na expressão

$$\left(\frac{2^{2.007}+2^{2.005}}{2^{2.006}+2^{2.004}}\right)\times 2.006$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

260) OBM - Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?

a) 1.000 b) 10.000 c) 50.000 d) 100.000 e) 500.000

261) OBM - Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

- Eu não fui, diz o Benjamim.

- Foi o Carlos, diz o Mário.

- Foi o Pedro, diz o Carlos.

- O Mário não tem razão, diz o Pedro.

Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada do museu?

a) Mário b) Pedro c) Benjamim

d) Carlos e) não é possível saber, pois faltam dados.

262) OBM - Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma A e os 30 seguintes na Turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da Turma A para a Turma B. Com isso:

a) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.

b) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.

c) As médias de ambas as turmas melhoraram.

d) As médias de ambas as turmas pioraram.

e) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

263) OBM - Alberto, Beatriz e Carlos correm numa pista circular. Todos saem ao mesmo tempo e do mesmo lugar, cada um desenvolvendo velocidade constante. Alberto e Beatriz correm no mesmo sentido. Correndo no sentido oposto, Carlos encontra Alberto, pela primeira vez, exatamente 90 segundos após o início da corrida e encontra Beatriz exatamente 15 segundos depois. Quantos segundos são necessários para que Alberto ultrapasse Beatriz pela primeira vez?

a) 105 b) 630 c) 900

d) 1.050 e) não pode ser determinado

264) OBM - Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

265) OBM - Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, 16, ... O 100º número escrito é:

a) 406 b) 376 c) 392 d) 384 e) 400

266) OBM - Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram-se ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?

a) 51 b) 52 c) 53 d) 54 e) 55

267) OBM - Se os números naturais são colocados em colunas, como se mostra abaixo, debaixo de que letra aparecerá o número 2.000?

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		2		3		4		5
	9		8		7		6	
10		11		12		13		14
	19		20		21		...	...

a) F b) B c) C d) I e) A

268) OBM - O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O numero de filhos do emir é:

a) 111 b) 48 c) 51 d) 78 e) 75

269) OBM - Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. O menor valor possível para a diferença entre eles é:

a) 111 b) 49 c) 29 d) 69 e) 5

270) OBM - Joana escreve a seqüência de números naturais $1, 6, 11, \ldots$ onde cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de três algarismos. Esse número é:

a) 100 b) 104 c) 101 d) 103 e) 102

271) OBM - Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de $2, 3$ ou 5?

a) 1 b) 3 c) 2 d) 4 e) mais de 4

272) OBM - No conjunto $\{101, 1.001, 10.001, \ldots, 1.000.000.000.001\}$ cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:

a) é igual 11

b) é igual a 4

c) é menor do que 3

d) é 3

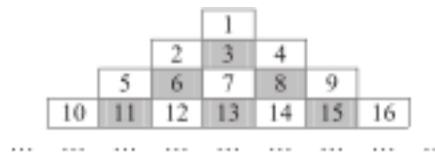
e) é maior do que 4 e menor do que 11

273) OBM - Qual é o último algarismo da soma de 70 números inteiros positivos consecutivos?

a) 4 b) 0 c) 7 d) 5 e) Faltam dados

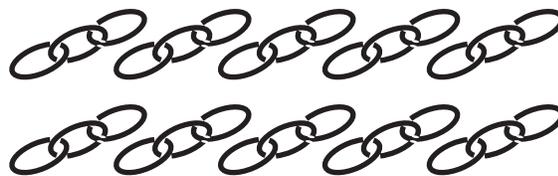
274) OBM - Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, $1, 2, 3, 4$ ou 5 palitos de uma pilha que inicialmente tem 1.000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

275) OBM - Colocamos em ordem crescente os números escritos nas casas brancas do tabuleiro a seguir (estamos mostrando apenas as suas quatro primeiras linhas). Assim, por exemplo, o nono número da nossa lista é 14. Qual é o 2.000º número da nossa lista?

a) 3.931 b) 3.933 c) 3.935 d) 3.937 e) 3.939

276) OBM - Uma pêra tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pêra para desidratar até o ponto em que a água represente 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (lembre-se: 1 litro de água tem massa de 1 quilograma).

a) 15 litros b) 45 litros c) 75 litros d) 80 litros e) 30 litros

277) OBM - Um serralheiro tem 10 pedaços de 3 elos de ferro cada um, mostrado abaixo. Ele quer fazer uma única corrente de 30 elos. Para abrir e depois soldar um elo o serralheiro leva 5 minutos. Quantos minutos no mínimo ele levará para fazer a corrente?

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45 e) 50

278) OBM - Duas melancias custam o mesmo que 9 laranjas mais 6 bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa a metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por uma dúzia de laranjas e uma dúzia de bananas é igual ao preço de:

a) 3 melancias b) 4 melancias c) 6 melancias d) 5 melancias
e) 2 melancias

279) OBM - O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. A soma dos algarismos de N é:

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

280) OBM - Em um tabuleiro retangular com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas. Podemos afirmar que:

a) Todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.

b) Nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.

c) Alguma coluna não tem casas ocupadas.

d) Alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.

e) Todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

281) OBM - Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

282) OBM - Um fazendeiro tinha 24 vacas e ração para alimentá-las por 60 dias. Entretanto, 10 dias depois, ele comprou mais 6 vacas e 10 dias depois dessa compra ele vendeu 20 vacas. Por mais quantos dias após esta última compra ele pode alimentar o gado com a ração restante?

a) 50 b) 60 c) 70 d) 80 e) 90

283) OBM - Quantos dígitos têm o menor quadrado perfeito cujos quatro últimos dígitos são 2.001?

a) 9 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

284) OBM - Papa-Léguas participou de uma corrida (junto com o Ligeirinho e o Flash), que consistia em dar 100 voltas em um circuito. Como sempre, o Coiote queria pegar o Papa-Léguas e colocou um monte de alpiste no meio da pista. É claro que o Coiote não conseguiu pegar o Papa-Léguas, mas ele fez com que a velocidade média dele na primeira volta fosse de apenas $200\,km/h$. Sabendo disso, a velocidade média do Papa-Léguas na corrida:

a) Não ultrapassa $200\,km/h$.

b) Não ultrapassa $250\,km/h$, mas pode ultrapassar $200\,km/h$.

c) Não ultrapassa $2.000\,km/h$, mas pode ultrapassar $250\,km/h$.

d) Não ultrapassa $20.000\,km/h$, mas pode ultrapassar os $2.000\,km/h$.

e) Pode ultrapassar $20.000\,km/h$.

285) OBM - Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro naturais consecutivos?

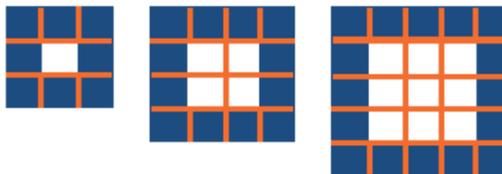
a) 712 b) 548 c) 1026 d) 1456 e) 1680

286) OBM - São escritos todos os números de 1 a 999 nos quais o algarismo 1 aparece exatamente 2 vezes (tais como, $11, 121, 411$, etc). A soma de todos estes números é:

a) 6.882 b) 5.994 c) 4.668 d) 7.224 e) 3.448

287) OBM - Cinco animais A, B, C, D, e E, são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. A diz que B é um cão. B diz que C é um lobo. C diz que D é um lobo. D diz que B e E são animais de espécies diferentes. E diz que A é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?

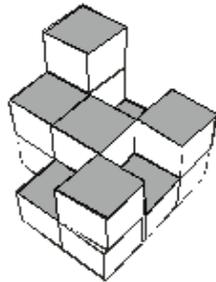
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

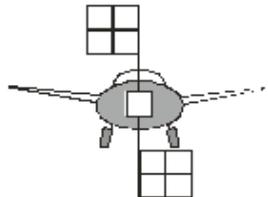
288) OBM - Com azulejos quadrados brancos e pretos todos do mesmo tamanho, constroem os seguintes mosaicos.

A regra para se construir estes mosaicos é a seguinte: inicialmente formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; e em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercados por azulejos pretos; e assim sucessivamente. Com 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários para se fazer uma seqüência de mosaicos como esta?

a) 55 b) 65 c) 75 d) 85 e) 100

289) OBM - A razão $\dfrac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 8

290) OBM - Num armazém foram empilhadas embalagens cúbicas conforme mostra a figura a seguir. Se cada caixa pesa 25kg, quanto pesa toda a pilha?

a) 300 kg b) 325 kg c) 350 kg d) 375 kg e) 400 kg

291) OBM - Escreva os números inteiros de 1 a 9 nos nove quadradinhos, de forma que as somas dos quatro números em cada uma das pás da "hélice"sejam iguais e de maior valor possível. Esse valor é:

a) 23 b) 22 c) 21 d) 20 e) 19

292) OBM - Qual é a quantidade total de letras de todas as respostas incorretas desta questão?

a) Quarenta e oito. b) Quarenta e nove. c) Cinqüenta.

d) Cinqüenta e um. e) Cinqüenta e quatro.

293) OBM - Toda a produção mensal de latas de refrigerante de uma certa fábrica foi vendida a três lojas. Para a loja A, foi vendida metade da produção; para a loja B, foram vendidos a produção e para a loja C, foram vendidas 2500 unidades. Qual foi a produção mensal dessa fábrica?

a) 4.166 latas b) 10.000 latas c) 20.000 latas

d) 25.000 latas e) 30.000 latas

294) OBM - O produto de um milhão de números naturais, não necessariamente distintos, é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

a) $1.000.000$ b) $1.250.002$ c) $1.501.999$

d) $1.999.999$ e) $13.999.432$

295) OBM - Um comerciante comprou dois carros por um total de $R\$\,27.000,00$. Vendeu o primeiro com lucro de 10% e o segundo com prejuízo de 5%. No total ganhou $R\$\,750,00$. Os preços de compra foram, respectivamente,

a) $R\$\,10.000,00$ e $R\$\,17.000,00$

b) $R\$\,13.000,00$ e $R\$\,14.000,00$

c) $R\$\,14.000,00$ e $R\$\,13.000,00$

d) $R\$\,15.000,00$ e $R\$\,12.000,00$

e) $R\$\,18.000,00$ e $R\$\,9.000,00$

296) OBM - Uma usina comprou 2000 litros de leite puro e então retirou certo volume V de leite para produção de iogurte e substituiu este volume por água. Em seguida, retirou novamente o mesmo volume V da mistura e substituiu novamente este volume por água. Na mistura final existem 1.125 litros de leite puro. O volume V é:

a) 500 litros b) 600 litros c) 700 litros d) 800 litros e) 875 litros

297) OBM -Dois irmãos, Pedro e João, decidiram brincar de pega-pega. Como Pedro é mais velho, enquanto João dá 6 passos, Pedro dá apenas 5. No

entanto, 2 passos de Pedro equivalem à distância que João percorre com 3 passos. Para começar a brincadeira, João dá 60 passos antes de Pedro começar a persegui-lo. Depois de quantos passos Pedro alcança João?

a) 90 b) 120 c) 150 d) 180 e) 200

298) OBM - Patrícia mora em São Paulo e quer visitar o Rio de Janeiro num feriado prolongado. A viagem de ida e volta de ônibus, custa 80 reais, mas Patrícia está querendo ir com seu carro, que faz, em média, 12 quilômetros com um litro de gasolina. O litro da gasolina custa, em média, R\$ 1,60 e Patrícia calcula que terá de rodar cerca de 900 quilômetros com seu carro e pagar 48 reais de pedágio. Ela irá de carro e para reduzir suas despesas, chama duas amigas, que irão repartir com ela todos os gastos. Dessa forma, não levando em conta o desgaste do carro e outras despesas inesperadas, Patrícia irá:

a) economizar R$ 20,00

b) gastar apenas R$ 2,00 a mais

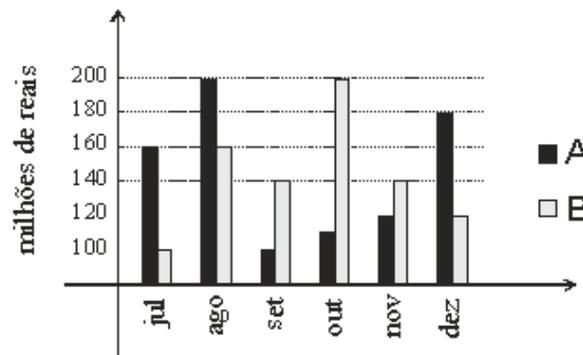
c) economizar R$ 24,00

d) gastar o mesmo que se fosse de ônibus.

e) gastar R$ 14,00 a mais.

299) OBM - Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

a) 250 b) 270 c) 271 d) 280 e) 292

300) OBM - O gráfico abaixo mostra o faturamento mensal das empresas A e B no segundo semestre de 2.001.

Com base nesse gráfico, podemos afirmar que:

a) houve um mês em que o faturamento da empresa A foi o dobro do faturamento da empresa B.

b) no mês de julho, a diferença de faturamentos foi maior que nos demais meses.

c) a empresa B foi a que sofreu a maior queda de faturamento entre dois meses consecutivos.

d) no semestre, o faturamento total de A foi maior que o de B.

e) a diferença entre os faturamentos totais do semestre excedeu os 20 milhões de reais.

301) OBM - Uma escola vai organizar um passeio ao zoológico. Há duas opções de transporte. A primeira opção é alugar "vans": cada van pode levar até 6 crianças e seu aluguel custa $R\$\,60,00$. A segunda opção é contratar uma empresa para fazer o serviço: a empresa usa ônibus com capacidade para 48 crianças e cobra $R\$\,237,00$, mais $R\$\,120,00$ por ônibus utilizado. A escola deve preferir a empresa de ônibus se forem ao passeio pelo menos N crianças. O valor de N é:

a) 28 b) 31 c) 32 d) 33 e) 36

302) OBM - Considere a seqüência oscilante

$$(1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

O $2.003^{\underline{o}}$ termo desta seqüência é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

303) OBM - O resto da divisão de $\sqrt{1111111111 - 22222}$ por 9 é:

a) 0 c) 1 c) 3 d) 6 e) 8

304) OBM - Durante sua viagem ao país das Maravilhas a altura de Alice sofreu quatro mudanças sucessivas da seguinte forma: primeiro ela tomou um gole de um líquido que estava numa garrafa em cujo rótulo se lia: "beba-me e fique 25% mais alta". A seguir, comeu um pedaço de uma torta onde estava escrito: "prove-me e fique 10% mais baixa"; logo após tomou um gole do líquido de outra garrafa cujo rótulo estampava a mensagem: "beba-me e fique 10% mais alta". Finalmente, comeu um pedaço de outra

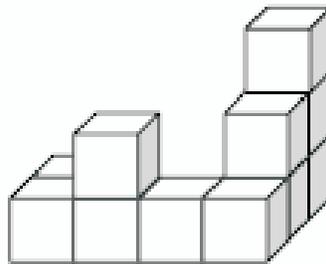
torta na qual estava escrito: "prove-me e fique 20% mais baixa". Após a viagem de Alice, podemos afirmar que ela:

a) ficou 1% mais baixa b) ficou 1% mais alta c) ficou 5% mais baixa

d) ficou 5% mais alta e) ficou 10% mais alta

305) OBM - A linha poligonal AB é desenhada mantendo-se sempre o mesmo padrão mostrado na figura. Seu comprimento total é igual a:

a) 31 b) 8 c) 90 d) 97 e) 105

306) OBM - Onze cubinhos, todos de mesma aresta, foram colados conforme a figura abaixo. O menor número de cubinhos, iguais aos já utilizados, que devem ser agregados ao sólido formado pelos onze cubinhos para obtermos um cubo maciço é igual a:

a) 48 b) 49 c) 52 d) 53 e) 56

307) OBM - Na tabela a seguir vemos o consumo mensal de água de uma família durante os 5 primeiros meses de 2.003. O consumo mensal médio dessa família durante os 5 meses foi:

Meses	*Consumo (m^3)*
Janeiro	12,5
Fevereiro	13,8
Março	13,7
Abril	11,4
Maio	12,1

a) $11,3m^3$ b) $11,7m^3$ c) $12,7m^3$ d) $63,5m^3$ e) $317,5m^3$

308) OBM - Você possui muitos palitos com $6\,cm$ e $7\,cm$ de comprimento. Para fazer uma fila de palitos com comprimento total de 2 metros, o número mínimo de palitos que você precisa utilizar é:

a) 29 b) 30 c) 31 d) 32 e) 33

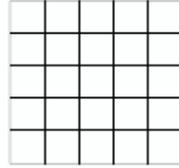
309) OBM - Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico abaixo, o valor de x é:

1	14	x
26		13

a) 20 b) 22 c) 23 d) 25 e) 27

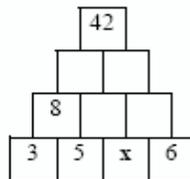
310) OBM - Três anos atrás, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou, mas a população de Tucupira cresceu 50%. Atualmente, as duas cidades somam 9.000 habitantes. Há três anos, qual era a soma das duas populações?

a) 3.600 b) 4.500 c) 5.000 d) 6.000 e) 7.500

311) OBM - Um quadrado de área 1 foi cortado em cinco filas de 5 quadradinhos cada. Todos os quadradinhos são congruentes. Marcam-se os quadradinhos de uma linha qualquer, de uma diagonal qualquer e de uma coluna qualquer, e, em seguida, retiram-se os quadrados assinalados. A área coberta pelos quadradinhos restantes vale, no mínimo:

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{25}{11}$ c) $\frac{25}{12}$ d) $\frac{25}{13}$ e) $\frac{5}{3}$

312) OBM - Seja $n = 9.867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

313) OBM - Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casinha. Os outros números nas três linhas superiores são obtidos da mesma forma. Qual é o valor de x?

a) 7 b) 3 c) 5 d) 4 e) 6

314) OBM - Considere as seguintes definições:

i) A média aritmética de dois números reais positivos é a metade da sua soma.

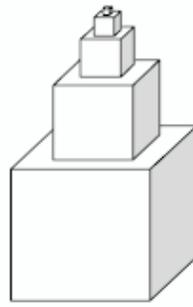
ii) A média harmônica de dois números reais positivos é o inverso da média aritmética dos inversos desses números.

A diferença entre a média aritmética e a média harmônica dos números 4 e 6 é:

a) $0,1$ b) $0,2$ c) $0,3$ d) $0,4$ e) $0,5$

315) OBM - A seqüência "22"descreve a si mesma, pois ela é formada por exatamente dois 2. Analogamente, a seqüência "31 12 33 15"descreve a si mesma, pois é formada por exatamente três 1, um 2, três 3 e um 5. Qual das seguintes seqüências não descreve a si mesma?

a) 21 32 23 16 b) 31 12 33 18 c) 31 22 33 17 19
d) 21 32 33 24 15 e) 41 32 23 24 15 16 18

316) OBM - Um troféu formado por cinco recipientes cúbicos foi construído da seguinte maneira: sob o cubo de lado $10\,\text{cm}$ foi soldado o cubo de lado $20\,\text{cm}$, sob este foi soldado o cubo de lado $30\,\text{cm}$, e assim por diante. Toda a superfície externa desse troféu deverá ser coberta com um certo tipo de revestimento. Quantos metros quadrados desse revestimento serão necessários?

a) $1,5$ b) $2,5$ c) $2,7$ d) $2,75$ e) 3

317) OBM - Os alunos de uma escola participaram de uma excursão, para a qual dois ônibus foram contratados. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31 no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que a mesma quantidade de alunos seja transportada nos dois ônibus?

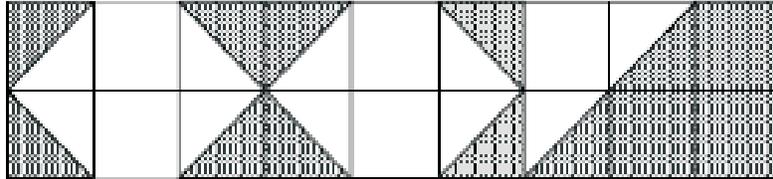
a) 8 b) 13 c) 16 d) 26 e) 31

318) OBM - Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma para ela?

a) 11 b) 20 c) 21 d) 31 e) 41

319) OBM - O preço de uma corrida de táxi é igual a R\$2,50 ("bandeirada"), mais R\$0,10 por cada 100 metros rodados. Tenho apenas R\$10,00 no bolso. Logo tenho dinheiro para uma corrida de até:

a) $2,5\,\text{km}$ b) $5,0\,\text{km}$ c) $7,5\,\text{km}$ d) $10,0\,\text{km}$ e) $12,5\,\text{km}$

320) OBM - Dezoito quadrados iguais são construídos e sombreados como mostra a figura.

Qual fração da área total é sombreada?

a) $\frac{7}{18}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{2}$

321) OBM - Um artesão começa a trabalhar às $8\,h$ e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às $12\,h$, mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

a) $12\,h$ b) $12\,h\ 30\,min$ c) $13\,h$ d) $13\,h\ 30\,min$ e) $14\,h\ 30\,min$

322) OBM - O algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 97 \times 99$ é:

a) 1 b) 6 c) 5 d) 7 e) 9

323) OBM - Os quadrados dos números naturais maiores do que 2, subtraídos de seus sucessores, formam a seqüência $5, 11, 19, \ldots$. O primeiro elemento dessa seqüência que não é um número primo é o:

a) quarto b) décimo c) sexto d) nono e) sétimo

324) OBM - Você está em um país estrangeiro, a LUCIÂNIA, e não conhece o idioma, o LUCIANÊS, mas sabe que as palavras "BAK" e "KAB" significam sim e não, porém não sabe qual é qual. Você encontra uma pessoa que entende português e pergunta: "KAB significa sim?" A pessoa responde "KAB". Pode-se deduzir que:

a) KAB significa sim.

b) KAB significa não.

c) A pessoa que respondeu mentiu.

d) A pessoa que respondeu disse a verdade.

e) Não é possível determinar sem um dicionário LUCIANÊS-PORTUGUÊS.

325) OBM - . No planeta **POT** o número de horas por dia é igual a número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em **POT** há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?

A) 8 B) 12 C) 64 D) 128 E) 256

326) OBM - Carlinhos pensa num número ímpar positivo menor do que 100. Pedrinho se dispõe a descobrir que número é esse fazendo a seguinte pergunta, quantas vezes forem necessárias: "O número que você pensou é maior, menor ou igual a x?". Note que x é um número que Pedrinho escolhe. Quantas perguntas desse tipo Pedrinho poderá ter que fazer até descobrir o número pensado por Carlinhos?

a) 5 b) 7 c) 15 d) 25 e) 45

327) OBM - Ao somar cinco números consecutivos em sua calculadora, Esmeralda encontrou um número de 4 algarismos: $200*$. O último algarismo não está nítido, pois o visor da calculadora está arranhado, mas ela sabe que ele não é zero. Este algarismo só pode ser:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 9

328) OBM - Sobre uma mesa estão três caixas e três objetos, cada um em uma caixa diferente: uma moeda, um grampo e uma borracha. Sabe-se que

i) -A caixa verde está à esquerda da caixa azul;

ii) -A moeda está à esquerda da borracha;

iii) -A caixa vermelha está à direita do grampo;

iv) -A borracha está à direita da caixa vermelha.

Em que caixa está a moeda?

a) Na caixa vermelha.

b) Na caixa verde.

c) Na caixa azul.

d) As informações fornecidas são insuficientes para se dar uma resposta.

e) As informações fornecidas são contraditórias.

329) OBM - Um feirante vende batatas e, para pesar, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de $1\,\mathsf{kg}$, um peso de $3\,\mathsf{kg}$ e um peso de $10\,\mathsf{kg}$. Considere a seguinte afirmação: "Este feirante consegue pesar (com uma pesagem) n quilogramas de batatas". Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

a) 7 b) 10 c) 12 d) 13 e) 14

330) OBM - Quanto é $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 42 e) 44

331) OBM - Se m e n são inteiros não negativos com $m < n$, definimos $m \triangledown n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5 \triangledown 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$. O valor numérico de $\dfrac{22 \triangledown 6}{4 \triangledown 6}$ é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

332) OBM - Entre 1.986 e 1.989, época em que vocês ainda não tinham nascido a moeda do país era o cruzado (Cz$). Com a imensa inflação que tivemos, a moeda foi mudada algumas vezes: tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro real e, finalmente, o real. A conversão entre o cruzado e o real é:

$$1 \ \textit{real} = 2.750.000.000 \ \textit{cruzados}$$

Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas novas de 1 cruzado. Se uma pilha de 100 notas novas tem $1,5\,\mathsf{cm}$ de altura, o salário em cruzados de João faria uma pilha de altura:

a) $26,4\,\mathsf{km}$ b) $264\,\mathsf{km}$ c) $26.400\,\mathsf{km}$

d) $264.000\,\mathsf{km}$ e) $2.640.000\,\mathsf{km}$

333) OBM - Um certo número inteiro positivo, quando dividido por 15 dá resto 7. Qual é a soma dos restos das divisões desse número por 3 e por 5?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

334) OBM - As 10 cadeiras de uma mesa circular foram numeradas com números consecutivos de dois algarismos, entre os quais há dois que são quadrados perfeitos. Carlos sentou-se na cadeira com o maior número e

Janaína, sua namorada, sentou-se na cadeira com o menor número. Qual é a soma dos números dessas duas cadeiras?

a) 29 b) 36 c) 37 d) 41 e) 64

335) OBM - Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

336) OBM - Numa caixa havia 3 meias vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Professor Piraldo retirou 3 meias da caixa. Sabendo-se que nenhuma delas era preta, podemos afirmar sobre as 3 meias retiradas que:

a) são da mesma cor.

b) são vermelhas.

c) uma é vermelha e duas são brancas.

d) uma é branca e duas são vermelhas.

e) pelo menos uma é vermelha.

337) OBM - Numa seqüência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores mais próximos. O segundo termo é igual a 1 e o quinto termo vale 2.005. Qual é o sexto termo?

a) 3.002 b) 3.008 c) 3.010 d) 4.002 e) 5.004

338) OBM - Qual é o maior valor da soma dos algarismos da soma dos algarismos de um número de três algarismos?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

339) OBM - Se um número de dois dígitos é 5 vezes a soma de seus dígitos, então o número formado pela troca dos dígitos é a soma dos dígitos multiplicada por:

a) 3 b) 5 c) 6 d) 4 e) 7

340) OBM - Eu planejava fazer um curral quadrado, com certa área, usando certa quantidade de cerca de arame farpado. Descobri, porém, que tenho 10% a menos de cerca do que esperava. Por esta razão, a área cercada será:

a) 5% menor b) 10% menor c) 19% menor

d) 20% menor e) 25% menor

341) OBM - Película de *insulfilm* são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. As películas são classificadas de acordo com seu grau de transparência, ou seja, com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Colocando-se uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, obtém-se uma **redução** de radiação solar igual a:

a) 3% b) 37% c) 40% d) 63% e) 160%

342) OBM - Sabendo-se que $9.174.532 \times 13 = 119.268.916$, pode-se concluir que é divisível por 13 o número:

a) 119.268.903 b) 119.268.907 c) 119.268.911

d) 119.268.913 e) 119.268.923

343) OBM - Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de suco composto de 20% de polpa e 80% de água. Depois de misturar tudo, que percentual do volume final é polpa?

a) 5% b) 7% c) 8% d) 20% e) 60%

344) OBM - Perguntado, Arnaldo diz que 1 bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. Professor Piraldo o corrigiu e disse que 1 bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre essas duas respostas?

a) 1.000 b) 999.000 c) 1.000.000

d) 999.000.000 e) 999.000.000.000

345) OBM - Esmeralda digitou corretamente um múltiplo de 7 muito grande, com 4.010 algarismos. Da esquerda para a direita, os seus algarismos são 2.004 algarismos 1 , um algarismo n e 2.005 algarismos 2. Qual é o valor de n?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

346) OBM - Devido a um defeito de impressão, um livro de 600 páginas apresenta em branco todas as páginas cujos números são múltiplos de 3 ou de 4. Quantas páginas estão impressas?

a) 100 b) 150 c) 250 d) 300 e) 430

347) OBM - Platina é um metal muito raro, mas raro do que até ouro. Sua densidade é $21,45\ g/cm^3$. Suponha que a população mundial de platina

foi cerca de 110 toneladas em cada um dos últimos 50 anos e desprezível antes disso. Assinale a opção com o objeto cujo volume é mais próximo do volume de platina produzido no mundo em toda a história:

a) uma caixa de sapatos

b) uma piscina

c) um edifício de dez andares

d) o monte pascoal

e) a Lua

348) OBM - Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anuncio "*Compre um e leve outro pela metade do preço*". Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é:

a) "*Leve dois e pague um*"

b) "*Leve três e pague um*"

c) "*Leve três e pague dois*"

d) "*Leve quatro e pague três*"

e) "*Leve cinco e pague quatro*"

349) - O percentual de lucro sobre o preço de custo correspondente a um çucro de 75% sobre o preço de venda é igual a:

a) 75% b) 150% c) 225% d) 300% e) 750%

350) OEM - O valor de $y = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$ é:

a) 4.000 b) 5.050 c) 5.500 d) 9.890 d) 9.880

351) OEM - Seja n o número que se deve acrescentar a 1.992^2 para obter 1.993^2. A soma dos algarismos de n é:

a) 13 b) 17 c) 19 d) 22 e) 25

352) OEM - Sejam a e $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Determine os valores possíveis de $(a - b)^2$ para que $23a1992b$ seja divisível por 45.

a) 0 e 1 b) 0 e 9 c) 4 e 1 d) 4 e 9 e) 4 e 16

353) OMA - Ache todos os números naturais x, y, z, tais que

$$\frac{97}{19} = 5 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}}$$

354) HSMC - Qual é o dígito das unidades de

$$1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{n-1} + \cdots + 9^{1.988} + 9^{1.989}?$$

355) FU - Define-se a operação $\circledast$ por $a \circledast b = \dfrac{a^b - b^a}{a^b + b^a}$. Se $3 \circledast 4$ é igual à fração irredutível $\dfrac{p}{q}$, então $p - q$ é igual a:

a) 81 b) 91 c) 118 d) 128 e) 138

356) CSU - Qual é a soma dos divisores primos de 2.002?

a) 31 b) 102 c) 104 d) 152 e) 33

357) CSU - Se A é 36% de B e C, 40% de B, qual é a razão $\dfrac{A}{C}$?

a) $0,8$ b) $0,4$ c) $0,5$ d) $0,7$ e) $0,9$

358) FU - Se $k_1, k_2, \ldots, k_7$ e N são inteiros, sabe-se que:

$$k_1 + k_2 \times 10 + \cdots + k_7 \times 10^6 = N \text{ e } k_1 \times 10^6 + k_2 \times 10^5 + \cdots + k_7 = 3N$$

Qual das opções representa o possível valor de N?

a) 41.053.290 b) 51.053.290 c) 61.053.290

d) 71.053.290 e) 81.053.290

359) FU - Qual é o resto de 4^{19} por 7 ?

a) 0 d) 1 c) 2 d) 3 e) 4

360) FU - Determine o maior inteiro possível n, sabendo que o produto gerado por $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 941 \times 942$ é divisível por 15^n.

a) 62 b) 125 c) 233 d) 314 e) 471

361) FU - Se S_N é a soma $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots$ dos expoentes dos fatores primos de um número natural $N = a^{r_1} \times b^{r_1} \times c^{r_1} \times \ldots$, a partir de 2 , determine os possíveis valores de S_N, onde N é um quadrado perfeito quando dividido por 2 e um cubo perfeito quando dividido por 3 .

a) $S_N = 2k$, para $k = 3, 4, 5, \ldots$

b) $S_N = 6k$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

c) $S_N = 6k + 1$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

d) $S_N = 6k - 1$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

e) $S_N = 8k - 1$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$

362) HSMC - Se $34.592.867.544^2 - 34.592.867.543^2 = 34.592.867.543 + X$, qual é o valor de X?

363) Mississipi - Qual é o dígito das unidades de $3^{2.002} - 2^{2.002}$?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

364) Mississipi - Se $\sqrt{19^2 + 19^2 + 19^2 + \cdots + 19^2} = 19^2$, quantas parcelas tem o radicando?

a) 19 b) 20 c) 361 d) 380 e) 18

365) AMC - Quantos números positivos menores que 2.001 são múltiplos de 3 ou 4 e não são de 5?

a) 768 b) 801 c) 934 d) 1.067 e) 1.167

366) AMC - Se M e N são dois números inteiros de dois dígitos, respectivamente o dobro e o triplo da soma de seus dígitos, calcule $M + N$.

a) 27 b) 36 c) 45 d) 54 e) 60

367) UNC - Qual é o menor valor positivo inteiro n para que

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

seja menor que 1 ?

a) 10 b) 100 c) 1.000 d) 2.002 e) não há valor para n

368) UNC - Quantos inteiros positivos menores que 1.000 têm todos os dígitos iguais e são divisíveis por 9?

a) 5 b) 6 c) 8 d) 10 e) 18

369) UNC - Qual é a soma dos dígitos da representação decimal de $\dfrac{10^{27} + 2}{3}$?

a) 80 b) 82 c) 84 d) 86 e) 87

370) UNC - Se x é 150% de y, que percentual de $3x$ é $4y$? Arredonde a resposta para o inteiro mais próximo.

a) 75 b) 79 c) 89 d) 92 e) 112

371) UNC - Quantos litros de água devem evaporar de 50 litros de uma solução a 3%, para que no final tenhamos 5% de sal?

a) $1,6$ b) $5\frac{1}{3}$ c) $9,6$ d) $13\frac{1}{3}$ e) 20

372) UNC - Determine a soma de todos os números menores que 45, que não são divisíveis por 3.

a) 600 b) 625 c) 650 d) 675 e) 700

373) UNC - O número $5xy.y7x$ é múltiplo de 33. Determine $x + y$.

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 14

374) UNC - Se N representa o menor número de quatro dígitos distintos, que é divisível por cada um deles, qual é a soma dos dígitos de N?

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

375) UNC - Quantos inteiros n, $1 \leq n \leq 100$, não são divisíveis por 2 ou 3?

a) 32 b) 33 c) 34 d) 35 e) 36

376) CSU - A razão $\dfrac{3^{2.002} \times 7^{2.004}}{21^{2.003}}$ simplificada é igual à fração:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{7}$ c) $\dfrac{1}{21}$ d) $\dfrac{3}{7}$ e) $\dfrac{7}{3}$

377) CSU - Quantos litros de uma solução de ácido a 40% devemos misturar com uma solução a 15%, para obtermos 30 litros de uma solução a 20%?

a) 4 b) 2 c) 6 d) 7 e) 10

378) SMT - Escreva: $-0,1_{10} + 0,1_9 - 0,1_8 + 0,1_7$ na base 6.

379) BAMM - Determine, na base 10, a geratriz do número $0,\overline{01}_6$.

380) BAMM - O número x escrito na base 7 é igual a $0,333\ldots$. Qual é o valor de x na base 5?

381) UNCC - Determine o inteiro n, sabendo que a expansão decimal $0,1n1n1n1n\ldots$ é igual a $\dfrac{n}{33}$.

382) USC - Qual dos seguintes números é o maior?

a) 6^{100} b) 5^{200} c) 4^{300} d) 3^{400} e) 2^{500}

383) USC - Lendo da esquerda para a direita, qual é o $8^{\underline{o}}$ dígito do produto

$$7.216.848.248.168.566.432 \times 125?$$

a) 1 b) 3 c) 5 d) 6 e) 2

384) USC - O dígito da ordem das unidades de $2^{(3^{456.789})}$ é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

385) USC - Qual é a representação binária da fração $\frac{1}{5}$?

a) $0,\overline{1001}$ b) $0,\overline{0011}$ c) $0,\overline{0101}$

d) $0,\overline{00111}$ e) $0,\overline{01101}$

386) USC - Determine o maior inteiro n tal que 2^n divida $17^9 - 9^9$.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

387) USC - O número $m = 111\ldots111$ consiste somente de $1's$ na sua representação decimal. Qual dos números abaixo não divide m?

a) 3 b) 7 c) 11 d) 17 e) 37

388) USC - Duas soluções X e Y contêm álcool e água. Na solução X, a razão de álcool para água é $\frac{3}{2}$. Quando quantidades iguais das soluções X e Y são misturadas, a razão de álcool para água é $\frac{3}{4}$. Qual é a razão de álcool para água na solução Y?

a) $1:1$ b) $9:26$ c) $10:25$ d) $10:24$ e) nenhuma

389) USC - Qual é o maior divisor comum de $2^{15} + 3^{15}$ e $2^{25} + 3^{25}$?

a) 5 b) 11 c) 55 d) 275 e) > 300

390) USC - Sabe-se que $\frac{1.025}{1.024} = 1,0009765625$. Qual é a soma dos dígitos de 5^{10}?

a) 36 b) 40 c) 41 d) 50 e) 102

391) USC - Após um desconto de $p\%$ no preço de uma mercadoria, qual deve ser o reajuste, para que a mesma retorne ao preço primitivo?

a) $p\%$ b) $\frac{p}{1-p}\%$ c) $(100-p)\%$ d) $\frac{100p}{100+p}\%$ e) $\frac{100p}{100-p}\%$

392) USC - O valor do produto

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{4^2}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{n^2}\right) \times \left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0,505 c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

393) USC - Qual é o maior número primo divisor de $2^{16} - 16$?

a) 7 b) 11 c)13 d) 17 e) 23

394) USC - Qual é o dígito das unidades de 57^{89}?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

395) USC - Qual dos seguintes números é o maior?

a) 10.000^{100} b) $2^{10.000}$ c) $1.000^{1.000}$

d) $5^{4.000}$ e) $3^{2.000}$

396) USC - Quantos são os múltiplos de 7 entre 100 e 1.000?

a) 128 b) 130 c) 132 d) 134 e) 136

397) USC - Quantos 9's existem na expansão de $99.999.899.999^2$?

a) 7 b) 9 c) 11 d) 13 e) 15

398) USC - Qual dos seguintes números é o maior?

a) 2^{600} b) 3^{500} c) 4^{400} d) 5^{300} e) 6^{200}

399) USC - Sabe-se que $1,00000035811231^2 = 1,000000xyz2247482444265735361$, onde x, y e z são dígitos desconhecidos. Qual é o valor de $x + y + z$?

a) 11 b) 14 c) 15 d) 17 e) 18

400) USC - A soma $8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8$ é igual a?

a) 8^8 b) 8^9 c) 64^8 d) 8^{64} e) 64^{64}

401) Se $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ e $8^f = 9$, qual é o valor do produto $a \times b \times c \times d \times e \times f$?

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{6}$ d) 3 e) $\dfrac{10}{3}$

402) USC - Para quantos inteiros positivos n, $3^n + 81$ é o quadrado de um número inteiro?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

403) USC - Se $a = \overbrace{333\ldots333}^{\text{2003 digitos}}$ e $b = \overbrace{666\ldots666}^{\text{2003 digitos}}$, qual é o $2.004^{\underline{o}}$ dígito (a partir da direita) que aparece no produto $a \times b$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 7 e) 8

404) UNCC - O número $N = 700.245$ é um produto de três números de dois dígitos inteiros x, y e z. Determine $x + y + z$.

a) 210 b) 267 c) 269 d) 271 e) 272

405) USC - Qual é o resto de $4^{2.004}$ por 7?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

406) USMC - Calcule o valor da expressão: $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \ldots$

407) USC - Qual é o menor inteiro positivo n, sabendo que 31 divide $5^n + n$?

a) 23 b) 30 c) 31 d) 68 e) 88

408) USC - Se x é $x\%$ de y e y é $y\%$ de z, supondo x um número positivo, qual é o valor de z?

a) 100 b) 200 c) 10.000 d) 150 e) 500

409) UNC - A soma dos divisores de 24 é 60. Qual é a soma dos divisores recíprocos de 24?

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{1}{60}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{8}{3}$

410) UNC - Qual é o valor de $\frac{2^{2.004} + 2^{2001}}{2^{2.003} - 2^{2.000}}$?

411) UNC - Se $N = \underbrace{999\ldots999}_{\text{"18" 9's}}$, quantos 9's têm a expansão N^2?

412) UNC - Qual é a soma de todos os inteiros positivos n, para que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ seja um quadrado perfeito?

413) USC - Qual é o menor valor de n para que o produto

$$(2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1) \times \cdots \times (n^2 - 1)$$

seja um quadrado perfeito?

414) USC - Qual é a soma dos números positivos de dois dígitos, que excede o produto desses dígitos de 12 ?

415) USC - Um número n tem 2.002 dígitos, todos iguais a 2. Qual é o mdc de n e 1.111?

416) SAMO - Calcule o valor da expressão $\frac{1.996(1.997^2 - 9)}{2.000(1.997^2 - 1)}$

a) 1.994 b) 95 c) 96 d) 97 e) 98

417) SAMO - O valor de $\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + \cdots + 10 \times 20 \times 40}{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + 3 \times 9 \times 27 + \cdots + 10 \times 30 \times 90}$ é:

a) $\frac{1}{729}$ b) $\frac{1}{27}$ c) $\frac{8}{27}$ d) 1 e) $\frac{2}{3}$

418) SAMO - Quando dividimos o número 111.222.333.444.555.666.777.888.999 por 111, quantos dígitos obtemos no quociente?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 17 e) 25

419) SAMO - Qual é o maior número de segundas que ocorrem em 45 dias consecutivos?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

420) SAMO - O valor de
$1+2(1+2(1+2)+2(1+2)+2(1+2)+2(1+2)+2(1+2)+\ldots)$

é:

a) $2^{10}+1$ b) $2^{11}-1$ c) $2^{11}+1$ d) $2^{12}+1$ e) $2^{12}-1$

421) SAMO - Quantos números menores que 400 não são divisíveis por 17 ou 23?

a) 360 b) 376 c) 359 d) 382 e) 358

422) SAMO - Qual dos números seguintes é o maior?

a) $3,1416$ b) $3,\overline{1416}$ c) $0,1\overline{416}$

d) $0,14\overline{16}$ e) $0,141\overline{6}$

423) SAMO - Se $\dfrac{x}{y}=0,75$, então o valor de $\dfrac{x+2y}{x}$ é igual a:

a) $\dfrac{11}{3}$ b) $\dfrac{3}{11}$ c) $\dfrac{11}{8}$ d) $\dfrac{8}{3}$ e) nenhuma

424) SAMO - A soma dos dígitos de $10^{20}-2$ quando expressos por um número é:

a) 180 b) 3 c) 171 d) 179 e) 117

425) SAMO - Dados $a=2^{30}$ e $b=3^{20}$. Qual das seguintes opções é verdadeira?

a) $a>b$ b) $2a=3b$ c) $3a=2b$ d) $a<b$ e) $a=b$

426) SAMO - Quantos números de dois dígitos são iguais a sete vezes a soma de seus dígitos?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) nenhuma

427) SAMO - A expressão $1 - \cfrac{1 - \cfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}}{1 + \cfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}}$ é igual a:

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

428) SAMO - O valor de $2.002^2 - 2.001^2 + 2.000^2 - 1.999^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$ é igual a:

a) $2.100.000$ b) $2.000.000$ c) $2.500.000$

d) $2.600.000$ e) $2.005.003$

429) AS - Ache a soma dos dígitos do número $4^{2.004} \times 5^{4.002}$.

430) AS - Qual é o maior fator primo de $2^{18} - 1$?

431) USC - Numa experiência científica, você está tentando separar uma solução de água com açúcar através de aquecimento e evaporação da água. A massa da solução é $2\,\text{kg}$ contendo 90% de água e 10% de açúcar. Qual será a massa de solução se, depois de algum tempo, você tem 85% de água?

432) AS - Ache a soma dos dígitos de $10^{2.003} - 10^{1.003}$.

433) UNC - Se a, b, e e d são quatro números positivos tal que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então:

a) $ab < dc$ b) $a + c < b + d$ c) $a + d < b + c$

d) $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ e) $\frac{c-a}{d-b} < \frac{c}{d}$

434) UNC - Admita x e b inteiros positivos. Suponha que x seja representado por 324 na base b e por 155 na base $b + 2$. Calcule b.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

435) USC - Qual dos números é o maior?

a) 6^{100} b) 5^{200} c) 4^{300} d) 3^{400} e) 2^{500}

436) USC - Para certo natural n, os números $5n + 16$ e $8n + 29$ possuem um fator comum maior que um. Este fator comum é igual a:

a) 11 b) 13 c) 17 d) 19 e) 23

437) USC - Considere que b e c são inteiros maiores que 1. Na base b, c^2 é igual a 10. Então b^2, quando escrito na base c é:

a) 100 b) 101 c) 1.010 d) 1.000 e) 10.000

438) USC - Na base 10, qual é o valor do algarismo d para que o nº $d4.56d$ seja divisível por 18?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 9

439) USC - Os inteiros $2, 3, 4, \ldots$ são dispostos em linhas e colunas, conforme a disposição seguinte:

A	B	C	D	E
	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
		⋮		

Em que coluna está o número 1.000?

a) A b) B c) C d) D e) E

440) USC - Ao passar um número n (base 10) para a base 8, obtemos o número $(34112d4357)$. Se n é divisível por 7, qual é o valor de d?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

441) UNC - Quantos são os números inteiros de 1 até 1.000, que não são divisíveis nem por 13 nem por 51?

a) 9.030 b) 9.050 c) 9.070 d) 9.090 e) 9.110

442) UNC - Sabe-se que $988.868.088.374.852.4N5.070.273.447.265.625$ é igual a 1.995^{10}. Qual é o valor do dígito N?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 7 e) 8

443) UNC - Uma escola tem h homens e m mulheres, onde $m < h$. Quantas mulheres devem ter para que 60% dos estudantes sejam mulheres?

a) $0,6m$ b) $0,6m - 0,4h$ c) $0,6h - 0,4m$

d) $1,5h - m$ e) $2h - m$

444) UNC - Seja N o menor número de 4 dígitos tal que, retirando o algarismo da esquerda, obtemos um número igual a um nono do número original. Qual é a soma dos dígitos de N?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

445) FU - O número de 5 dígitos $5d.ddd$ é divisível por 6. Qual é o valor do dígito d?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 7 e) 8

446) FU - Qual é o último dígito de $9^{412} \times 16^8$?

a) 1 b) 4 c) 6 d) 8 e) 9

447) FU - Se o número de três dígitos $4y3$ for somado a 134, o resultado é o número de três dígitos $5z7$, que é divisível por 7. Então $y + z$ é:

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

448) FU - Dois números inteiros entre 75 e 85 são divisores de $3^{32} - 1$. Qual é o produto desses números?

a) 5.852 b) 6.560 c) 6.804

d) 6.888 e) 6.972

449) MATD - O número de quatro dígitos $4A4B$ é divisível por 72. Qual é o valor do dígito A?

a) 2 b) 4 c) 1 d) 8 e) nenhuma

450) MATD - Seja N um número inteiro positivo, onde $N \equiv 2(\text{mod}.3)$ e $N \equiv 1(\text{mod}.2)$. Qual é o resto de N por 6?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) nenhuma

451) MATD - Qual é, na base 10, a representação na base 6 do número $0,\overline{1}$?

a) $0,2$ b) $0,1\overline{6}$ c) $0,\overline{3}$ d) $0,3$ e) nenhuma

452) MATD - Qual é a soma dos 40 primeiros cubos perfeitos positivos?

a) 640.000 b) 672.400 c) 707.281 d) 885.600 e) nenhuma

453) MATD - Ache o produto dos divisores positivos de 360.

a) 360^6 b) 360^{12} c) 360^{24} d) 360^{48} e) nenhuma

454) MATD - Qual é o resto da divisão de 5^{301} por 13?

a) 1 b) 5 c) 8 d) 12 e) nenhuma

455) MATD - Quais são os três últimos dígitos de 7^{404}?

456) MATD - O número $348.b20$ é divisível por 45. Então b é igual a:

a) 1 b) 3 c) 4 d) 7 e) 9

457) MATD - Observe a identidade

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)$$

Usando essa definição, determine o valor de

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$$

a) $\frac{4.950}{19.800}$ b) $\frac{4.952}{19.800}$ c) $\frac{4.951}{19.800}$ d) $\frac{4.953}{19.800}$ e) nenhuma

458) SAM - Determine o último dígito de

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 1.999^{1.999} + 2.000^{2.000}$$

459) SAM - Qual é o produto de 1234_9 por 432_9, expresso na base 9?

a) 500028_9 b) 523178_9 c) 545480_9 d) 56431_9 e) nenhuma

460) HARVARD - Os números a e b são inteiros. Sabe-se que

$$a + \sqrt{b} = \sqrt{15 + \sqrt{216}}$$

Calcule $\frac{a}{b}$.

461) HARVARD - Ache a soma dos divisores recíprocos de 144.

462) HARVARD - Quantos múltiplos de 7 entre 10^6 e 10^9 são quadrados perfeitos?

463) HARVARD - Ache a soma gerada por:

$$\frac{1}{3^2 - 1^2} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{5^2 - 3^2} \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \frac{1}{7^2 - 5^2} \cdot \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \ldots$$

464) HARVARD - Se $\frac{1}{9}$ de 60 é 5, qual é $\frac{1}{20}$ de 80?

465) HARVARD - Qual é o resto de 2^{2001} por $2^7 - 1$?

466) HARVARD - Expresse, se for possível, o valor do produto:
$(0^3-350)\times(1^3-349)\times(2^3-348)\times(3^3-347)\times\ldots\times(349^3-1)\times(350^3-0)$

467) HARVARD - Ache $\dfrac{\sqrt{31+\sqrt{31+\sqrt{31+\ldots}}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$.

468) HARVARD - Ache $\dfrac{2^2}{2^2-1}\times\dfrac{3^2}{3^2-1}\times\dfrac{4^2}{4^2-1}\times\cdots\times\dfrac{2.006^2}{2.006^2-1}$.

469) HARVARD - Calcule o menor inteiro menor que 1.000 que tem exatamente 29 divisores próprios.

470) HARVARD - Ache o maior inteiro n sabendo que $3^{512}-1$ é divisível por 2^n.

471) Se M é 30% de Q, Q é 20% de P, e N é 50% de P, então M/N é igual a:
a) $\dfrac{3}{250}$ b) $\dfrac{3}{25}$ c) 1 d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{6}{5}$

472) Se X é 60% maior que Z e Y é 25% maior que Z, então X é que percentual maior que Y?
a) 28% b) 25% c) 55% d) 100% e) 78%

473) STANFORD - Se 60% de x é 40% de y e 30% de z, então x é que percentual de z?
a) 30% b) 110% c) 50% d) 20% e) 72%

474) STANFORD - Ache a soma dos dígitos do número $(10^{3n^3+9}+1)^2$, sendo n um inteiro positivo.
a) $3n$ b) 1 c) $3n^3$ d) 4 e) n^3+n+3

475) STANFORD - Qual é o maior número primo que divide a soma $3^{500}+5^{300}$?
a) 2 b) 3 c) 5 d) $3^{500}+5^{300}$ e) nenhuma

476) MATD - Para a e b reais, define-se $a\otimes b=\dfrac{a\times b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ache o valor de $(3\otimes 4)+(6\otimes 8)$.
a) $\dfrac{25}{4}$ b) $\dfrac{7}{12}$ c) $\dfrac{7}{24}$ d) $\dfrac{12}{5}$ e) $\dfrac{36}{5}$

477) MATD - Coloque em ordem crescente, $x = 2^{2^{2^{2^2}}}$, $y = 3^{3^{3^3}}$ e $z = 4^{4^4}$.

a) x, y, z b) y, z, x c) z, x, y

d) x, z, y e) nenhuma

478) MATD -Determine o maior inteiro possível n, sabendo que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times 941 \times 942$ é divisível por 15^n.

a) 62 b) 125 c) 233 d) 314 e)471

479) AHSME - Define-se $[a, b, c]$ por $\frac{a+b}{c}$, onde $c \neq 0$. Qual é o valor de $\big[[60, 30, 90], (2, 1, 3], [10, 5, 15]\big]$?

480) FU - A operação $*$ é definida por $a * b = \frac{a - 2b}{2ab}$, para a e $b \neq 0$. Se $x * y = -1$ e $y * x = \frac{5}{4}$, então $y * y$ é igual a:

a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{3}{2}$ e) 2

481) UNC - Define-se $\oplus$ a operação $a \oplus b = a^2 - ab + b^2$. Calcule $(2 \oplus 3) \oplus 4$.

482) UNC - Três números distintos a, b e c são tais que $a\#b\#c = \frac{a+b}{c-a}$. Calcule 1#2#3.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{2}$ e) 1

483) USC - Se a operação $a \otimes b = ab - 3a + 1$, determine $5 \otimes (7 \otimes 5)$.

a) 43 b) 61 c) 71 d) 101 e) 151

484) USC - Sendo a operação $*$ definida por $a * b = a^2 + 3^b$, qual é o valor de $(2 * 0) * (0 * 1)$?

485) USC - Supondo a operação $*$ definida por $a*b = a+2b$, calcule $a*(b*a)$.

a) $a * b$ b) $b * a$ c) $(3a) * b$ d) $b * (4a)$ e) $(5a) * b$

486) USC - Se $a * b = a^2 + b$, qual é o valor de $3 * (2 * 1)$?

a) 12 b) 14 c) 54 d) 170 e) 172

487) UNC - A operação $\oplus$ é definida para x e y positivos por $x \oplus y = \frac{xy}{x+y}$. Quais das seguintes afirmações devem ser verdadeiras para três valores positivos x, y e z?

i) $x \oplus x = \frac{x}{2}$

ii) $x \oplus y = y \oplus x$

iii) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

a) i somente b) i e ii, somente c) ii e iii, somente

d) ii e iii, somente e) as três

488) Se $a \neq b$ e $\left(\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right) = 1$, qual é o valor de $\frac{(a+b)}{a \times b}$?

489) O número $1 - 0,66_9$ é que número na base 3?

490) USC - Em que base de sistema de numeração o número $\frac{1}{5}$ é igual a $0,333\ldots$?

a) 7 b) 9 c) 11 d) 14 e) 16

491) A quantidade A é 34% menor que B, e C é 76% maior que B. Que percentual de A é C?

a) $2,67\%$ b) $25,84\%$ c) $37,5\%$ d) $44,7\%$ e) $49,5\%$

492) USC - Após um reajuste de $p\%$, qual deve ser o desconto para voltarmos ao preço primitivo?

a) $p\%$ b) $\frac{p}{1-p}$ c) $(100-p)\%$ d) $\frac{100p}{100+p}\%$ e) $\frac{100p}{100-p}\%$

493) USC - O maior inteiro menor que $\sqrt{2^{100} + 10^{10}}$ é:

a) 2^{50} b) $2^{50} + 10$ c) $2^{50} + 100$ d) $2^{50} + 1.000$ e) $2^{50} + 10^5 - 1$

494) OPM - Considere no conjunto $\mathbb{N}$ uma operação $*$ com as seguintes propriedades:

(i)$1 * 1 = 2$;

(ii)$(a + b) * c = (a * 1) \times (b * c)$;

(iii)$a * (b - c) = (0 * b) - (0 * a)$ se $b > a$.

Determine $1.995 * 1.995$

495) OPM - Se o algarismo 1 aparece 211 vezes na numeração das páginas de um livro, quantas páginas têm o livro?

496) OPM - Qual a soma dos algarismos do número que se obtém elevando ao quadrado o número $\underbrace{500\ldots001}_{1997 \text{ zeros}}$?

497) OPM - A fração $\frac{37}{13}$ pode ser escrita da forma $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}$, onde x, y e z são números naturais. Determine os valores de x, y e z.

498) OPM - Quantos zeros consecutivos existem no final do número

$$2.001! = 2.001 \times 2.000 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1?$$

499) OMA - A expansão decimal de $\frac{1}{97}$ tem um período muito grande. Determine os três últimos algarismos do período.

500) AHSME - Determine o valor de a na seqüência $\ldots, a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

a) -3 b) -1 c) 0 d) 1 e) 3

501) ALEMANHA - Na fração abaixo cada letra representa um dígito calcule o valor da soma $S+N+E+L$

$$\frac{ADA}{KOK} = 0,SNELSNELSNEL\ldots$$

502) HSMC - Calcule o valor de

$$\left(1-\frac{3}{7}\right)\times\left(1-\frac{3}{8}\right)\times\left(1-\frac{3}{9}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{3}{20}\right)$$

.

a) $\frac{10}{171}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{17}{20}$ d) $\frac{18}{21}$ e) $\frac{1}{57}$

503) ALABAMA - Calcule o valor de n, sabendo que

$$\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}} = 6$$

504) BBC - Determine o número de divisores do inteiro positivo m se:

a) m^2 tiver 35 divisores;

b) exatamente dois dos divisores de m são número primos.

a) 12 b) 7 c) 5 d) 10 e) 8

505) BBC - Josh encontrou o valor de 3^{19} igual a $1.1\mathbf{a}2.261.467$. Ele encontrou todos os dígitos corretamente, exceto o terceiro dígito decimal o qual é representado por **a**. O valor de **a** é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

506) BBC - Josh encontrou o valor de $2^{36} - 1$ igual a $68.\mathbf{a}19.476.735$. Ele encontrou todos os dígitos corretamente, exceto o terceiro dígito decimal o qual é representado por **a**. O valor de **a** é:

a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

507) BBC - Se 23 de abril caiu numa terça, então 23 de março do mesmo ano caiu na(o):

a) sábado b) domingo c) segunda d) quarta e) terça

508) BBC - Escolha dentre as opções abaixo aquela na qual os números estão escritos em ordem crescente:

a) $2^{5.555}$, $3^{3.333}$ e $6^{2.222}$

b) $2^{5.555}$ $6^{2.222}$ e $3^{3.333}$

c) $6^{2.222}$, $3^{3.333}$ e $2^{5.555}$

d) $3^{3.333}$, $6^{2.222}$ e $2^{5.555}$

e) $3^{3.333}$, $2^{5.555}$ e $6^{2.222}$

509) BBC - 2.000 dias, 2.000 horas, 2.000 minutos e 2.000 segundos seriam equivalentes a N milhões de segundos. Das opções oferecidas, a melhor aproximação de N é:

a) 1 b) 15 c) 45 d) 180 e) 2.000

510) BBC - Supondo que A, B e C são números inteiros em que $\dfrac{24}{5} = A + \dfrac{1}{B + \dfrac{1}{C+1}}$, qual é o valor de $A + 2B + 3C$?

a) 9 b) 12 c) 15 d) 16 e) 20

511) BBC - Qual é o número de inteiros entre 200 e 2.000 que são múltiplos de 6 ou 7, mas não de ambos?

a) 469 b) 471 c) 513 d) 514 e) 557

512) BBC - Qual é o dígito que deve ser colocado entre os dígitos do número 56.374, de modo que o número formado de seis dígitos, torne-se divisível por 11?

a) 3 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

513) BBC - O valor de $(0,0\overline{1})^{-1} + 1$ é:

a) $\frac{1}{91}$ b) $\frac{90}{91}$ c) $\frac{91}{90}$ d) 10 e) 91

514) Se $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$, onde x, y e z são inteiros positivos e diferentes, então $\frac{x}{y}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 2

515) BBC - Se $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $\frac{b}{c} = \frac{8}{9}$ e $\frac{c}{d} = \frac{2}{3}$, então o valor de $\frac{ad}{b^2}$ é:

a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{81}{64}$ c) $\frac{81}{64}$ d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{7}{64}$

516) BBC - Qual é o número de zeros do produto

$$47 \times 46 \times 45 \times 44 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1?$$

a) 15 b) 12 c) 10 d) 9 e) 8

517) BBC - Determine o valor exato da soma, expresso através de um número racional:

a) $\frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{7\times 9} + \frac{1}{9\times 11}$;

b) $\frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{7\times 9} + \frac{1}{9\times 11} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\times(2n+3)}$.

518) BBC - Define-se a operação $*$ por $A * B = \frac{A+2B}{3}$. Então o valor de $(4*7)*8] - [4*(7*8)]$ é:

a) $-\frac{28}{9}$ b) $-\frac{2}{9}$ c) 0 d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{15}{11}$

519) BBC - Seja $x = 0,7181818\ldots$, onde os dígitos 1 e 8 se repetem. Quando x for expresso sob forma de fração irredutível, o denominador excede o numerador de:

a) 18 b) 31 c) 93 d) 141 e) 279

520) BBC - Se $\frac{a}{d+b+c} = \frac{4}{3}$ e $\frac{a}{b+c} = \frac{3}{5}$, então o valor de $\frac{d}{a}$ é:

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $-\frac{12}{11}$ d) $-\frac{11}{12}$ e) $\frac{15}{11}$

521) NZ - Ache o número inteiro positivo, de três dígitos, que seja igual 11 vezes a soma de seus dígitos.

522) EMAS - Calcule um número N, sabendo que:

1º) N contém os fatores 3, 5 e 7;

2º) 5N tem 8 divisores a mais que N;

3º) 8N tem 18 divisores a mais que N.

523) Determine o valor do produto gerado por

$$(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\dots\left(2^{2^{99}}+1\right)$$

a) $2^{2^{100}}$ b) $2^{2^{100}}-1$ c) $2^{2^{100}}+1$ d) 2^{200} e) 2^{100}

524) Suzana tem d litros de um refresco de laranja, com $d\%$ de suco de laranja. Quantos litros de laranja ela de acrescentar, para obter um refresco com $3d$ % de suco de laranja?

525) UNC - Os primeiros 44 inteiros positivos são escritos em ordem crescente e forma o número grande $N = 123456789101112\dots424344$. Qual é o resto da divisão de N por 45?

526) USC - Um químico tem uma solução que consiste em 5 litros de propanol e 17 litros de água. Ele deseja transformar a solução para 40% de propanol, somando z litros de propanol. Qual das equações seguintes ele deve utilizar para obter o valor de z?

a) $\dfrac{5}{z+17}=\dfrac{40}{100}$ b) $\dfrac{z+5}{22}=\dfrac{40}{100}$ c) $\dfrac{z+5}{17}=\dfrac{40}{100}$

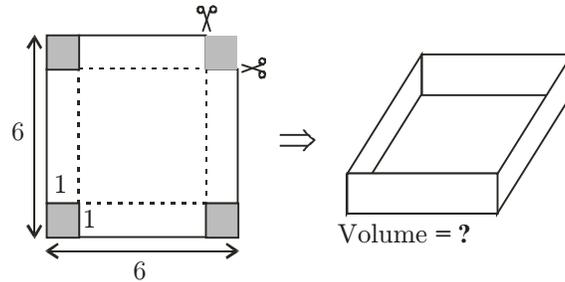
d) $\dfrac{z+5}{z+17}=\dfrac{40}{100}$ e) $\dfrac{z+5}{z+22}=\dfrac{40}{100}$

527) CHILE - Calcule o valor do produto

$$(1+2)\times\left(1+2^2\right)\times\left(1+2^4\right)\times\left(1+2^8\right)\times\cdots\times\left(1+2^{2^{1999}}\right)$$

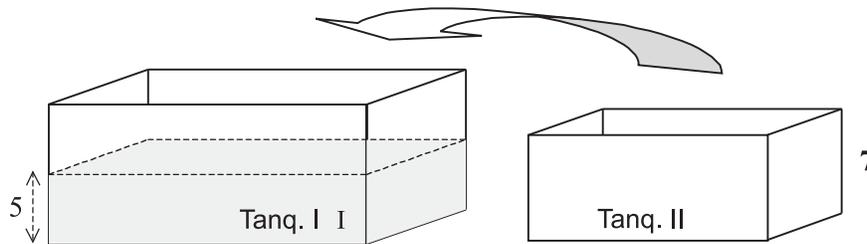
528) CHILE - Qual dos números racionais é o maior:

$$X=\frac{1995^{1994}+1}{1995^{1995}+1} \text{ ou } Y=\frac{1995^{1995}+1}{1995^{1996}+1}\ ?$$

529) CHILE - As medidas são em centímetros.

a) $36\,cm^3$ b) $16\,cm^3$ c) $24\,cm^3$ d) $25\,cm^3$ e) $24\,cm^3$

530) CHILE - Sejam x, y e z dígitos diferentes. Qual é o valor de $x + y$ se a soma dos números de três dígitos xxx, xxy e xzz é 2.004?

a) 11 b) 10 c) 9 d) 8 e) 7

531) CHILE - O tanque I, cuja base tem uma área de $2\,dm^2$, a água alcança una altura de $5\,cm$. O tanque II, com uma base de área $1\,dm^2$ e uma altura de $7\,cm$, é introduzido, vazio, no fundo do tanque I. A água do tanque I sobe de nível e se derrama dentro do tanque II. Que nível alcança a água no tanque II?

532) VENEZUELA - Encontre o valor da seguinte soma, expressando-a sob forma de uma fração irredutível: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$

533) PERÚ - Em um quadro se escrevem todos os inteiros positivos de 1 até N isto é, $1, 2, 3, 4, ..., N$, onde N é um inteiro positivo de três dígitos. Se exatamente a metade destes números tem ao menos o dígito 1, ache o maior valor possível de N.

534) PERÚ - Sejam a, b e c três números inteiros positivos tais que $MDC(a; b) = 6$, $MDC(b; c) = 8$ e $MDC(c; a) = 10$. Ache o menor valor que pode ter o $MMC(a; b; c)$.

535) PERÚ - José escreveu um livro de 1.276 páginas. Em todas as páginas os números foram escritos a mão. Quantas vezes ele escreveu o número 6?

a) 218 b) 258 c) 308 d) 318 e) 358

536) PERÚ - Quantos números ab de dois dígitos satisfazem $ab + ba = 88$?

a) 4 b) 6 c) 9 d) 10 e) nenhuma das anteriores

537) PERÚ - Encontre o dígito que representa as unidades do seguinte número: 2.137^{753}?

538) PERÚ - Se A, B e C são inteiros positivos tais que $\dfrac{24}{5} = A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C+1}}$, calcule $A + B + C$.

539) PERÚ - Calcule o valor da seguinte expressão

$$10^3 \div \left[(10 \div 5)^3 \times 4 - (13-8)^2 + \sqrt[3]{27}\right]^2 - \sqrt{81}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

540) PERÚ - Têm-se os seguintes números de quatro dígitos: $35mn, n53p$ e $pq08$. Sabe-se que a soma dos dois primeiros é igual ao terceiro. Ache $m + n + p + q$.

a) 18 b) 15 c) 14 d) 16 e) 17

541) PERÚ - Sejam C e D dois dígitos tais que se cumpre a seguinte igualdade: $0,\overline{3C} = \dfrac{D}{11}$. Ache o número $\overline{CD}$.

542) PERÚ - Se $555\ldots556$ e $444\ldots445$ têm n dígitos cada um, quantos dígitos têm o número $(55\ldots556)^2 - (44\ldots445)^2$?

a) $2n-1$ b) $2n-2$ c) $2n+1$ d) $3n$ e) nenhuma

543) PERÚ - Quantos números primos entre 10 e 99 seguem sendo primos, se invertermos a ordem de seus dígitos?

a) 7 b) 8 c) 11 d) 13 e) nenhuma das anteriores

544) PERÚ - Na seguinte operação, cada letra representa um dígito decimal: $\mathsf{AH}+\mathsf{A}=\mathsf{HEE}$. Que dígitos representam as letras A, H e E, nesta ordem?

545) PERÚ - Ache o último dígito da representação decimal finita do número $\dfrac{1}{5^{2.000}}$.

a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

546) PERÚ - Encontre o valor de N, onde $N = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \cdots + 50^2$.

547) EQUADOR - Seja N um número natural terminado em 7. Se transferirmos o 7 para a $1^{\underline{a}}$ ordem, obtemos o quíntuplo de N. Ache N.

548) EQUADOR - Simplifique

$$\frac{\left(\dfrac{1,222\ldots}{4-\dfrac{1}{3}} + \sqrt{0,555\cdots\times 5}\right)}{(2,666\cdots - 1,6)\left(0,8080\cdots - 0,444\cdots + \dfrac{1}{11}\right)\sqrt{13+\dfrac{4}{9}}}$$

549) PANAMÁ - A quantidade de dígitos que tem o número $8^2 \times 10^{13}$ é:

a) 12 b) 13 c) 15 d) 17 e) 26

550) PANAMÁ - Se $\dfrac{43}{19} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$, o produto gerado por $a \times b \times c \times d$ é igual a;

a) 120 b) 96 c) 24 d) 6 e) 1

551) PANAMÁ - O número $888.888.888$ é divisível por:

a) 2222 b) 44 c) 8888 d) 444 e) 22222

552) PANAMÁ - Sabendo que $\dfrac{2}{13} = 0,\overline{153846}$ e $\dfrac{1}{9} = 0,\overline{1}$, então $\dfrac{2}{13} + \dfrac{1}{9}$ é igual a:

a) $0,264957$ b) $0,\overline{253846}$ c) $0,\overline{264951}$ d) $0,\overline{264957}$ e) $0,\overline{1153846}$

553) PANAMÁ - O número de seis dígitos $a30a30$ é divisível pelos números:

a) $2,3,5$ b) $7,11,13$ c) $2,3,7$

d) $11,13,17$ e) $5,7,17$

554) PANAMÁ - Quando se somam dois números de três dígitos $2a3$ e $6b5$, o resultado é um número divisível por 9. O maior valor possível para $a+b$ é:

a) 20 b) 11 c) 12 e) 9 e) 18

555) PANAMÁ - A média aritmética simples de três números X, Y e Z é 13; a de Y e Z é 16, o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum de Y e Z são, respectivamente, 126 e 2. O produto dos três números é:

a) 882 b) 1.248 c) 1.273 d) 1.638 e) 1.764

556) MÉXICO - Calcule: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}$.

557) MÉXICO(Adptada) - Ache o resto da divisão por 9 da soma gerada por: $1+22+333+4444+55555+666666+7777777+88888888+999999999$

558) MÉXICO - Quantos números primos entre 10 e 99 permanecem primos, quando a ordem de seus dígitos é invertida?

559) MÉXICO - Quanto é 30% de 40% de 50?

560) MÉXICO - Quando um barril está 30% vazio, este contém 30 litros mais que quando está 30% cheio. Quantos litros têm esse barril completamente cheio?

561) MÉXICO - Qual é o maior dos números?

a) 2^{4^8} b) 2^{8^4} c) 4^{2^8} d) 4^{8^2} e) 8^{2^4}

562) MÉXICO - Quantos dígitos têm o número $2^{1.996}\times 5^{2.000}$?

563) MÉXICO - Quantos zeros existem no final de $(10^2+10+\cdots+10^{10})^{1.995}$

564) MÉXICO - Ache a soma dos dígitos de $\left(10^{4n^2+8}+1\right)^2$,onde $n\in\mathbb{N}$.

a) 4 b) $4n$ c) $2+2n$ d) $4n^2$ e) n^2+n+2

565) MÉXICO - O símbolo 25_b representa um número de dois dígitos na base b. Se o número 52_b é o dobro do número 25_b, então b é igual a:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 11 e) 12

566) MÉXICO - Se $\frac{a}{b}=\frac{1}{9}$ e $\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$, então $\frac{b-a}{c-b}$ é:

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{25}{8}$ c) $\frac{4}{1}$ d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{3}{10}$

567) MÉXICO - Um barco recolhe 30 náufragos numa ilha. Como resultado, os alimentos do barco que eram suficientes para 60 dias, agora serão suficientes para 50 dias. Quantas pessoas havia no barco antes dele chegar à ilha?

a) 15 b) 40 c) 110 d) 140 e) 150

568) MÉXICO - Quantos inteiros positivos n satisfazem à desigualdade: $\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}$?

a) 6 b) 10 c) 8 d) nenhuma

569) CANADÁ - Qual é o dígito das unidades de $3^{1.001} \times 7^{1.002} \times 13^{1.003}$?

a) 45 b) 49 c) 50 d) 54 e) 55

570) CANADÁ - Se $a * b = a^b$, então $\frac{(2*(2*3))}{((2*3)*2)}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) 1 d) 64 e) $\frac{1}{64}$

571) ARGENTINA - O número A está formado por 666 dígitos iguais a "3" isto é, $333\ldots333$ e o número B está formado por 666 dígitos iguais a 6. Quantos dígitos têm o produto gerado por $A \times B$?

572) ARGENTINA - Ache os três últimos dígitos da direita do número 19^{97}.

573) BULGÁRIA - Ache dois números primos p e q tais que, $p^2 + 3pq + q^2$ seja um quadrado perfeito.

574) ESPANHA - Ache os quatro últimos dígitos de 3^{2004}.

575) CATALUNHA - Qual o último dígito da soma $1.999^{2.000} + 2.000^{2.001}$?

576) CATALUNHA - O valor de $\frac{\overbrace{999...999}^{18 \text{ dígitos}}}{999.999.999} - 1$ é:

a) 9^9 b) $9^9 - 1$ c) 9^{10} d) 10^9 e) 10^{10}

577) CATALUNHA- O último dígito da diferença $9^{1.999} - 7^{1.999}$ é:

a) 0 b) 2 c) 5 d) 6 e) 8

578) CATALUNHA - Qual é o valor da soma: $2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \ldots + 10 \times 2^{10}$?

a) 9×2^{11} b) 10×2^{11} c) 11×2^{10}
d) 11×2^{11} e) 10×2^{12}

579) NORUEGA - Quantos algarismos há em $4^8 \times 5^{17}$?

580) NZ - Ache o número inteiro positivo, que seja igual 11 vezes a soma de seus dígitos.

581) NZ - Calcule $\frac{1}{4}$ de 8^{16}.

a) 2^{16} b) 4^{23} c) 8^4 d) 2^{24} e) 4^8

582) NZ - O produto

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

é igual a:

a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{11}{20}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{7}{12}$

583) NZ - Calcule

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{80}+\frac{2}{80}+\frac{3}{80}+\cdots+\frac{79}{80}\right)$$

a) 1.560 b) 1.580 c) 3.120 d) 3.160

584) NZ - Se $a = 2^{(3^4)}$, $b = 3^{(4^2)}$ e $c = 4^{(2^3)}$, então:

a) $a < b < c$ b) $b < a < c$ c) $c < a < b$
d) $c < b < a$ e) $b < c < a$

585) NORUEGA - Que número é igual a três vezes a soma de seus dígitos?

586) NORUEGA - Se $a * b$ é definida por a^b, calcule: $\dfrac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$.

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 4 d) 128 e) 256

587) NORUEGA - Se $a = 2$, $b = a - 1$, $c = a + b - 1$, $d = a + b + c - 1$ e $z = a + b + c + \ldots + y - 1$, então $z = ?$

a) 1 b) 2^2 c) 4^4 d) 8^8 e) 16^{16}

588) FLANDERS OLIMPIAD - Quais são os números naturais compreendido entre 1 e 500, não divisíveis nem por 3 nem por 5?

589) FRANÇA - As letras x, y e z representam dígitos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 9\}$. Calcule x sabendo que $xx + yy + zz = zyx$

590) ITÁLIA - Seja N a soma dos 100 primeiros inteiros positivos: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3$. Ache o resto dessa divisão por 7

a) 1 b) 2 c) 7 d) 8 e) 9

591) CEFETEQ - José tinha 18 anos e mal sabia ler e escrever quando começou a trabalhar com servente de obras, ganhando R\$ $1,27$ por hora. Aos 27 anos, tendo completado o Ensino Médio, José foi promovido a almoxarife com um salário de R\$ $800,00$ mensais. Milagre? Não! Oportunidade!

(Adaptado da *Revista Razão Social*. O Globo, Rio de Janeiro, 5 jul. 2003.)

Considerando que José tem trabalhado 8 horas por dia, em 20 dias por mês, determine quanto ele passou a receber a mais, por hora trabalhada, como almoxarife.

592) CEFETEQ - Paulo Braga, além de professor de Matemática do CEFET Química, é artista plástico. Ele foi convidado pela PETROBRÀS para expor seus quadros na cidade de Cabo Frio, e ficou hospedado num luxuoso hotel da orla marítima.

De acordo com Paulo Braga, o hotel tem um terço dos seus apartamentos constituído de três dormitórios e, exatamente, um sétimo desses apartamentos de três dormitórios fica de frente para a praia. Sabendo que o número de apartamentos do hotel está compreendido entre 85 e 120, determine o número total de apartamentos desse hotel.

593) UFRJ - Uma pessoa alugou um apartamento por CR\$ $20.000,00$ mensais, durante três meses. Após esse período, o aluguel foi reajustado em 105%.

a) Calcule o valor do aluguel mensal após o aumento;

b) A inflação naqueles três meses, foi de 30% ao mês, determine qual deveria ter sido o percentual de reajuste, para que esse tivesse correspondido à inflação do período.

594) UFRJ - Um eletrodoméstico custa CR\$ $25.000, 00$ à vista, mas pode também ser pago em duas vezes: CR\$ $15.000,00$ de entrada e CR\$ $15.000,00$, ao fim de 30 dias. Qual é o juro mensal que a loja está cobrando do cliente que paga em duas vezes?

595) UFRJ - Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair, para que o percentual de homens na sala passe a ser 98%?

596) UFRJ - Numa seção eleitoral, votaram no 2º turno 205 pessoas. O candidato eleito obteve 20 votos a mais do que o seu concorrente. Foram registrados 41 votos nulos e não houve votos em branco. Perguntam-se:

a) qual foi o percentual de votos válidos nessa seção?

b) quantos votos obteve o candidato vencedor?

597) UFRJ - O preço de ingresso para jogos de futebol no Maracanã era de Cz\$ 800,00. O presidente de um certo clube avaliou que, se abaixasse o preço dos ingressos para X cruzados, teria um aumento de público de 60% e um aumento de renda de 20%. Determinar X.

598) UERJ - O governo deseja diminuir 24% do dinheiro circulante. Se ela tem sob seu controle 60% desse dinheiro, então qual será o percentual do dinheiro que deverá tirar de circulação?

599) UERJ

I) MINAMATA DO TRÓPICO

Brasília Legal é um típico vilarejo amazônico, as margens do rio Tapajós, a 200 km dos garimpos de Itaiutuba. Tem 135 famílias que vivem da pesca e do extrativismo.

De 150 moradores examinados por pesquisadores, 90% apresentaram índices de contaminação por mercúrio superiores a 6 ppm (partes por milhão), o máximo que a Organização Mundial de Saúde (OMS) considera tolerável no organismo humano.

O caso mais grave é o do pescador José Camilo da Silva, 51 anos, conhecido em Brasília Legal como Zé do Cacete. Mergulhado no límpido Tapajós, Zé do Cacete parece desconhecer a gravidade da situação. Testes realizados pelo Instituto de Doença de Minamata, Japão, revelaram que a contaminação mercurial de Zé do Cacete atingiu 151 ppm.

(Revista ISTO É 08/09/93)

Considerando-se o índice máximo tolerável pela OMS, a contaminação de José Camilo está com uma taxa percentual (em números redondos) em torno de:

a) 2% b) 25% c) 250% d) 2.500% e) 25.000%

600) UERJ - Leia o anúncio seguinte, publicado no Jornal "O Dia" de 26/09/93.

Ventilador Luxo com 3 *velocidades*

Quantidade: 100 *peças*

À vista 5.800, *ou* $2 \times 3.960, = 7.920$, *FIXAS*

Se um comprador dispusesse exatamente de CR$ 5.890,00 para aquisição do ventilador, e optasse pela forma de pagamento em duas vezes, teria de quitar, no ato da compra, a primeira parcela de CR$ 3.960,00. Restariam, assim, CR$ 1.930,00(CR$ 5.890,00 − CR$ 3.960,00) para pagar, 30 dias após, a Segunda parcela de CR$ 3.960,00. Nesse caso, os CR$1.930,00 teriam de render, para saldar a dívida, aproximadamente, o mínimo de:

a) 34,5% b) 50,5% c) 55% d) 80% e) 90%

601) UERJ - Uma pessoa deseja fazer uma reforma no apartamento. Para isso, verificou os preços em três firmas especializadas e obteve os seguintes orçamentos:

Firma 1: CR$ 40.000,00 independente do tempo gasto na obra;

Firma 2: CR$ 20.000,00 de sinal e mais CR$ 1.000,00 por dia gasto na obra;

Firma 3: CR$ 2.000,00 por dia, trabalhando sem cobra sinal algum.

a) Caso a obra dure exatamente 14 dias para ser concluída, indique a proposta mais vantajosa financeiramente. Justifique a sua resposta.

b) Determine, caso exista, o número de dias que a obra deve durar para que as três propostas apresentem o mesmo custo.

602) VEST-RIO - Numa comunidade, 90% das pessoas são a favor do ensino público e gratuito, 80% são parlamentares e 70% são a favor da pena de morte para crimes hediondos.

a) Entre que valores pode variar o percentual das pessoas que são favoráveis do ensino público gratuito e também do parlamentarismo?

b) Entre que valores pode variar o percentual das pessoas que são simultaneamente a favor dos três itens?

603) VEST-RIO - João comprou certa quantidade de sorvetes e vendeu-os todos, por CR$ 240,00 cada um, lucrando no total CR$ 280,00. Se João tivesse vendido cada sorvete por CR$ 180,00, teria tido um prejuízo de CR$ 140,00. Pode-se afirmar que João comprou cada sorvete por:

a) CR$ 230,00 b) CR$ 220,00 c) CR$ 210,00

d) CR$ 200,00 e) CR$ 190,00

604) PUC - O tribunal concedeu a uma certa categoria profissional aumento de 100% sobre o salário, descontadas as antecipações. Se os trabalhadores já haviam recebido uma antecipação de 20% em setembro, receberão agora um aumento sobre o salário de setembro de:

a) 45% b) 50% c) 67% d) 72% e) 80%

item[605)] UNIRIO - Num grupo de 400 pessoas, 30% são homens e 65% das mulheres têm mais de 20 anos. Quantas mulheres ainda não comemoraram seu 20º aniversário?

a) 260 b) 182 c) 120 d) 105 e) 98

606) UNIRIO - Para comprar um tênis de R$ 70,00, Renato deu um cheque pré-datado de 30 dias, no valor de R$ 74,20. A taxa de juro cobrada foi de:

a) 0,6% ao mês b) 4,2% ao mês c) 6% ao mês

d) 42% ao mês e) 60% ao mês

607) UNIRIO - Se $p = \dfrac{0,00001 \times (0,01)^2 \times 10.000}{0,0001}$, então p é igual a:

a) $p = 0,1$ b) $p = (0,1)^2$ c) $(0,1)^3$ d) $p = (0,1)^4$ e) $(0,1)^5$

608) UNIRIO - Suponha que, em dois meses, um determinado título de capitalização teve seu valor reajustado em 38%. Sabendo-se que o reajuste no 1º mês foi de 15%, podemos afirmar que o do 2º segundo mês foi de:

a) 18,5% b) 19,5% c) 20% d) 21,5% e) 23%

609) UNIFICADO - Em 6 de setembro de 1.994, os jornais noticiavam que uma grande empresa havia convertido seus preços para reais, usando

1real = 2.400 cruzeiros reais e **não** 1real = 2.750 cruzeiros reais

Ao fazer isso, nessa empresa, os preços:

a) baixaram cerca de $12,7\%$

b) baixaram cerca de $14,6\%$

c) aumentaram cerca de $12,7\%$

d) aumentaram cerca de $13,2\%$

e) aumentaram cerca de $14,6\%$

610) UNIFICADO - Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas "Compre x balas e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é válida para compras até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram $10, 15, 30$ e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos matemáticos?

a) Alfredo b) Beatriz c) Carlos d) Daniel e) Nenhum

611) UNIFICADO - Em um período em que os preços subiram 82%, os salários de certa categoria aumentaram apenas 30%. Para que os salários recuperem o poder de compra, eles devem ser aumentados em:

a) 40% b) 46% c) 52% d) 58% e) 64%

612) UNIFICADO - O resultado da expressão $\dfrac{-2^{-2} + 10\% \text{ de } 7,5 - 0,666\ldots}{1 - \dfrac{1}{3}}$

a) $-0,50$ b) $-0,25$ c) $0,50$ d) $0,75$ e) $0,75$

613) UFRJ - Uma loja oferece duas formas de pagamentos para seus clientes: à vista ou em duas parcelas iguais. A loja anuncia na sua vitrine, um vestido por um preço total de R\$ $200,00$ para pagamento em duas vezes, sendo R\$ $100,00$ no ato da compra e R\$ $100,00$ trinta dias após essa data.

Para pagamento à vista, a loja oferece um desconto de 10% sobre o preço total de R\$ $2.000,00$ anunciado na vitrine.

Considerando o preço à vista como o preço real do vestido, determine a taxa de juro cobrada pela loja, no pagamento em duas vezes.

a) 5% b) 10% c) 20% d) 25% e) 40%

614) UFRJ - O preço, em Cz\$, de 32 jabuticabas é igual ao número de jabuticabas que podemos comprar com Cz\$ $2,00$. Quantas jabuticabas pode-se comprar com Cz\$ $25,00$?

615) UNI-RIO - Um engenheiro, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de uma fábrica, obteve os seguintes dados:

28% dos funcionários são mulheres
$\frac{1}{6}$ dos homens são menores de idade
85% dos funcionários são maiores de idade.

Qual é o percentual dos menores de idade que são mulheres?

616) UNI-RIO - Carlos contraiu uma dívida que foi paga com uma taxa de juro, ao mês, constante. Porém, o recibo do mês de fevereiro extraviou-se, e Carlos necessita deste valor para o cálculo do imposto de renda. Os valores conhecidos são:

Janeiro .... $R\$ 1.000,00$

Março .... $R\$ 1.210,00$

Abril .... $R\$ 1.331,00$

Com base nos dados acima, Carlos pagou, em fevereiro, a quantia de?

a) $R\$ 1.010,00$ b) $R\$ 1.100,00$ c) $R\$ 1.110,00$

d) $R\$ 1.180,00$ e) $R\$ 1.200,00$

617) UNI-RIO - O comprimento, em metros, do arame necessário para produzir 320 pregos é igual ao número de pregos que se produzem com $20\,m$ desse mesmo arame. Quantos pregos serão produzidos com $500\,m$ desse arame?

618) UERJ - Um menino propôs a seu pai para que lhe desse $R\$ 1,00$ no dia $1^{\underline{o}}$ de dezembro e fosse, a cada dia, dobrando o valor da quantia diária, até o dia 24 de dezembro. No dia 25 de dezembro, ela daria ao pai, com o dinheiro acumulado, um presente de Natal. O pai aceitou a proposta, desde que o filho lhe desse um presente que custasse o dobro da quantia que o filho recebesse no dia 24.

Se o acordo entre os dois for firmado, o menino dará ao pai um presente com, exatamente, o seguinte valor:

a) metade do que receber

b) o dobro do que receber

c) toda a quantia recebida

d) toda a quantia recebida mais $R\$ 1,00$

619) UFF - Paulo depositou na caderneta de poupança a quantia de R$ 20.000, 00. Sabendo que a correção mensal da caderneta de poupança é constante e igual a 10%, e que Paulo irá retirar mensalmente 20% do saldo, a partir do primeiro rendimento, determine o número máximo de meses em que ele poderá retirar dinheiro, sem que o saldo fique inferior a R$ 15.000, 00.

620) UFF - Em uma fábrica, sobre o preço final do produto, sabe-se que:

I) $\dfrac{1}{4}$ dele são salários;

II) $\frac{1}{5}$ dele são impostos;

III) 25% dele é o custo da matéria prima;

IV) o restante dele é o lucro.

O percentual do preço que representa o lucro é?

a) 10% b) 15% c) 20% d) 30% e) 50%

621) UFRRJ - A casa do Sr. Rafael foi adquirida através do Sistema Financeiro de Habitação. A prestação mensal de sua casa aumentou 30%. Mas, por recursos judiciais, a partir deste mês, aquele que pagar até o 5º dia útil do mês, tem direito a um desconto de 20%. Se o Sr. Rafael pagou sua casa no dia 2 (dois), o aumento real sobre a prestação do mês anterior foi de?

a) 10% b) 8% c) 6% d) 4% e) 2%

622) UERJ - Considere a equação: $\dfrac{6 \times 12 \times 18 \times \cdots \times 300}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 50} = 216^n$.

Qual é o valor de n, real, que verifica essa igualdade?

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{15}{2}$ d) $\dfrac{25}{3}$ e) $\dfrac{50}{3}$

623) UNI-RIO - Três dúzias de ovos valem 4 dúzias de maçãs; 5 dúzias de maçãs valem 3 dúzias de pêras. Sabendo que uma dúzia de pêras custa CR$ 600, 00, podemos afirmar que uma dúzia de ovos custará?

a) CR$ 460, 00 b) CR$ 480, 00 c) CR$ 500, 00

d) CR$ 510, 00 e) CR$ 520, 00

624) UFF - O custo, em reais, de fabricação de x peças, em determinada fábrica é $C(x) = mx^2 + nx + p$. Sabe-se que:

I) se nenhuma peça for produzida, o custo fixo é de 80 reais;

II) se forem produzidas 30 peças, o custo é de 50 reais.

III) se forem produzidas 50 peças, o custo é de 130 reais.

Determine

a) o número de peças que se devem produzir para que o custo seja o menor possível;

b) o custo mínimo.

625) UFPI - A fabricação de um produto numa empresa foi de 120.000 toneladas em 1.990 e de 145.200 toneladas em 1.992. O aumento anual médio, na fabricação desse produto, alcançado pela empresa nesse período foi:

a) menor que 85% b) entre 8% e 11% c) entre 12% e 15%

d) entre 16% e 19% e) maior que 20%

626) UFMG - Uma pessoa dispõe de C reais para passar 15 dias numa praia. Se resolver ficar 20 dias, em vez de 15 dias previstos, o seu gasto médio foi reduzido de:

a) 5% b) 15% c) 20% d) 25% e) 30%

627) FUC-MT - Um lojista, na tentativa de iludir sua freguesia, deu um aumento de 25% nas suas mercadorias e depois anunciou 20% de desconto. Podemos concluir que

a) a mercadoria subiu 20%

b) a mercadoria aumentou 5%

c) aumentou em média $2,5\%$

d) diminuiu em média $2,5\%$

e) a mercadoria manteve o preço

628) UEL-PR - Um artesão entrega seus produtos a um vendedor profissional que recebe uma comissão de 20% sobre o preço V de venda. O artesão deseja ter também um lucro de 20%, mas sobre o preço de C de custo do produto. Nessas condições, qual deve ser a relação entre os preços V e C?

a) $V = C$ b) $V = 0,8C$ c) $V = 1,2C$ d) $V = 1,4C$ e) $V = 1,5C$

629) UFOP-MG - Diminui-se o comprimento da diagonal de um quadrado em 20%. A área desse quadrado diminui de:

a) 10% b) 20% c) 32% d) 36% e) 64%

630) Cesgranrio-RJ - João queria comprar uma geladeira. Ele podia

a) comprá-la a vista com um desconto de x%;

b) comprá-la a prazo sem desconto, pagando metade do preço no ato da compra e a outra, metade um mês após.

João tinha dinheiro suficiente para escolher as opções acima. Caso escolhesse "b" guardaria o dinheiro para pagar a segunda metade em uma caderneta de poupança, que lhe renderia 5% ao mês. O valor de "x" a partir do qual a alternativa "a" seria melhor para João é:

a) $1,5$ b) 2 c) $2,5$ d) $3,5$ e) $3,2$

631) Unifor-CE - Sabe-se que 240 litros de uma mistura de duas substâncias, A e B, contêm 3% de B. Quantos litros da substância B devem ser adicionados àquela mistura, para que, nela, o percentual de B passe a ser 4%?

a) $1,8$ b) $2,3$ c) $2,5$ d) $3,2$ e) $4,5$

632) FEI-SP - O custo de produção de uma peça é composto por: 30% para mão-de-obra, 50% para matéria-prima e 20% para energia elétrica. Admitindo-se que haja um reajuste de 20% no preço de mão-de-obra, 35% no preço da matéria-prima e 5% no preço da energia elétrica, o custo de produção sofrerá um reajuste de:

a) 60% b) 160% c) $24,5$% d) 35% e) 120%

633) MACK-SP - O preço de compra de um certo produto é x; se for vendido por k, haverá, em relação a x, um prejuízo de 20%. Então, se for vendido por $3k$, haverá, em relação a x, um lucro de:

a) 40% b) 60% c) 140% d) 160% e) 240%

634) UFMG - Um investidor tinha R\$ $1.000,00$ aplicados, parte em ouro e a outra parte em Certificado de Depósitos Bancários (CDB). O ouro teve uma alta de 8% ao mês, os CDB's, de 10% ao mês. Se o rendimento no mês foi de R\$ $85,00$, então, a quantia em reais que ele investiu em ouro foi de:

a) R$ 550,00 b) R$ 650,00 c) R$ 750,00

d) R$ 850,00 e) R$ 950,00

635) PUC - O valor de $\sqrt{0,444\ldots}$ é:

a) $0,222\ldots$ b) $0,333\ldots$ c) $0,444\ldots$

d) $0,555\ldots$ e) $0,666\ldots$

636) UFRRJ - O valor de

$$\left[\frac{9}{7}\times\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{2}{12}}{\frac{8}{5}\times\frac{3}{8}\div 2+1+\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{3}\times 0,5\right]$$

é:

a) -1 b) $-\frac{1}{6}$ c) 0 d) $\frac{1}{6}$ e) 1

637) UFF - A expressão $\frac{8^{88}-4^{44}}{8^{44}-4^{22}}$ é equivalente a:

a) $1-2^{88}$ b) $2^{44}\times(2^{88}+1)$ c) 9×2^{44}

d) $3\times(1-2^{88})$ e) $2^{88}\times(2^{88}+1)$

638) UNICAMP - Um copo cheio de água pesa 385 g. Com $\frac{2}{3}$ da água o mesmo pesa 310 g. Perguntam-se

a) qual é o peso do copo vazio?

b) qual é o peso do copo com $\frac{3}{5}$ da água?

639) UNICAMP - Após ter corrido $\frac{2}{7}$ de um percurso e, em seguida, caminhado $\frac{5}{11}$ do mesmo percurso, um atleta verificou que ainda faltavam 600 metros para o final do percurso. Perguntam-se:

a) qual é o comprimento total do percurso?

b) quantos metros o atleta havia corrido?

c) quantos metros o atleta havia caminhado?

640) UNICAMP -

a) Quais são o quociente e o resto da divisão de 3.785 por 17?

b) Qual o menor número natural, maior que 3.875, que é múltiplo de 17?

641) UERJ - Dois sinais luminosos fecham juntos num mesmo instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

a) 150 b) 160 c) 190 d) 200

642) UNICAMP - Um número inteiro positivo de três algarismos termina em 7. Se este último algarismo for colocado antes dos outros dois, o novo número assim formado excede em 21 o dobro do número original. Qual é o número inicial?

643) FEI-SP - Dado $2^{21} = 2.097.152$ e $S = (1+2)+(2+2^2)+\cdots+(20+2^{20})$, o valor de S é:

a) 2.097.570 b) 2.097.172 c) 2.097.360
d) 4.194.514 e) 4.194.304

644) IME- Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N. Sabendo-se que P é o triplo de Q, o algarismo das centenas do número N é:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

645) CM - O produto da multiplicação $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^{10}}\right)$ pode ser indicado por:

a) $0,2\times10^{-9}$ b) $0,8\times10^{-9}$ c) $0,5\times10^{-10}$
d) $0,8\times10^{-10}$ e) $0,9\times10^{-10}$

646) CM - Dividindo-se 60×10^{-1} por b obtém-se quociente 6 e resto r, sendo b e r dois números naturais. Determine a soma dos valores possíveis para b.

a) 254 b) 386 c) 408 d) 504 e) 614

647) CM - Entre os números inteiros 1 e 100, existem quantas frações irredutíveis cujo denominador é 15?

a) 692 b) 792 c) 862 d) 992 e) 1.562

648) CM - Qual é o algarismo da ordem das unidades simples do numeral correspondente ao produto da multiplicação $4 \times 3^{2.002}$ escrito com os algarismos do Sistema de Decimal de Numeração?

a) 2 b) 3 c) 6 d) 8 e) 9

649) CM - Que termos devem ser retirados da expressão

$$2^{-1} + 4^{-1} + 6^{-1} + 8^{-1} + 10^{-1} + 12^{-1}$$

para que a soma dos restantes seja igual a 1?

a) 8^{-1} e 10^{-1} b) 2^{-1} e 4^{-1} c) 6^{-1} e 8^{-1}

d) 8^{-1} e 4^{-1} e) 12^{-1} e 10^{-1}

650) CM - Em 30 dias, 24 operários asfaltam uma avenida de 960 metros de comprimento por 9 metros de largura. Nas mesmas condições de trabalho, quantos operários seriam necessários para fazer o asfaltamento, em 20 dias, de uma avenida de 600 metros de comprimento e 10 metros de largura?

a) 25 b) 28 c) 31 d) 34 e) 37

651) CM - Uma torneira enche um tanque em 12 minutos, enquanto que uma segunda torneira gasta 18 minutos para encher o mesmo tanque. Com o tanque inicialmente vazio, abre-se a primeira torneira durante "x"minutos; ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em $x + 3$ minutos. Então, o tempo total, em minutos, gasto para encher o tanque é:

a) 12 b) 15 c) 18 d) 20 e) 24

652) CM - Os produtores de um show de rock resolveram dar desconto de 25% no preço do ingresso. Estimou-se, com isso, que o público aumentaria de 60%. Caso se confirmasse as estimativas dos produtores, podem afirmar que o total arrecadado nas bilheterias:

a) aumentaria 35% b) aumentaria 20% c) aumentaria 10%

d) aumentaria 5% e) diminuiria 10%

653) FIOCRUZ - Para obter 60 litros de leite, com 4% de gordura, misturam-se dois tipos de leite: o tipo A com 3% de gordura e outro do tipo B com 6% de gordura. Quantos litros de leite foram empregados nesta mistura?

a) 50 litros do tipo A e 10 litros do tipo B

b) 40 litros do tipo A e 20 litros do tipo B

c) 30 litros do tipo A e 30 litros do tipo B

d) 20 litros do tipo A e 40 litros do tipo B

e) 10 litros do tipo A e 50 litros do tipo B

654) FIOCRUZ - Num certo país a inflação é medida semestralmente. No ano passado, os dois semestres apresentaram resultados idênticos: 450%. Qual foi a inflação acumulada nesse ano?

a) 50% b) 75% c) 100% d) 125% e) 150%

655) FIOCRUZ - Os lados da base horizontal de uma caixa d'água na forma de bloco retangular, com $1\,m$ de altura, medem $0,8\,m$ e $1,6\,m$, respectivamente. Supondo que a caixa está vazia e aberta ao relento e que ao chove à razão de 10 litros por hora, em quanto tempo esta caixa estará completamente cheia?

a) $1,28\,h$ b) $12,8\,h$ c) $128\,h$ d) $1.280\,h$ e) $144\,h$

Respostas

1. d	**2.** a	**3.** b	**4.** b
5. c	**6.** b	**7.** e	**8.** d
9. b	**10.** c	**11.** c	**12.** d
13. e	**14.** d	**15.** a	**16.** c
17. a	**18.** d	**19.** e	**20.** e
21. e	**22.** a	**23.** c	**24.** e
25. e	**26.** d	**27.** e	**28.** e
29. c	**30.** b	**31.** e	**32.** c
33. a	**34.** d	**35.** 2 h	**36.** 220
37. c	**38.** e	**39.** c	**40.** b
41. a	**42.** 2E9	**43.** e	**44.** 150
45. a) 4 b) 27	**46.** $9h/d$	**47.** 2%	**48.** $111_{(4)}$
49. 36	**50.** $45\,l$	**51.** 12	**52.** $-\frac{75}{4}$
53. b	**54.** a	**55.** b	**56.** $22,222\ldots\%$
57. $-\frac{\frac{804}{5}}{42}$	**58.** a	**59.** c	**60.** $-\frac{35}{8}$
61. $\{1, 2, 13, 26\}$	**62.** $\Delta\nabla\square$	**63.** 20.080	**64.** $6,3\,t$
65. $2,5\,l$	**66.** 12	**67.** $1,25\,cm$	**68.** $14\,m$ e $12\,cm^2$
69. b	**70.** b	**71.** d	**72.**
73. 30%	**74.** d	**75.** R\$ 5.096,00	**76.** b
77. $8\,l$	**78.** b	**79.** $2\,dm$	**80.** 53
81. $\frac{5}{14}$	**82.** $17,5\,h$	**83.** 70	**84.** 20
85. 10 h 30 min	**86.** b	**87.** b	**88.** a
89. a	**90.** c	**91.** d	**92.** a
93. e	**94.** d	**95.** e	**96.** a
97. d	**98.** b	**99.** R\$ 6,00	**100.** $(yxz)_6$
101. 57	**102.** F	**103.** b	**104.** d
105. c	**106.** a	**107.** a	**108.** c
109. b	**110.** c	**111.** d	**112.** d
113. c	**114.** a	**115.** b	**116.** a
117. b	**118.** d	**119.** d	**120.** d
121. d	**122.** d	**123.** d	**124.** a
125. b	**126.** c	**127.** b	**128.** d
129. c	**130.** d	**131.** c	**132.** a
133. c	**134.** b	**135.** b	**136.** d

137. a	**138.** b	**139.** b	**140.** c
141. b	**142.** b	**143.** a	**144.** b
145. d	**146.** d	**147.** 768 km	**148.** 20%
149. 2011	**150.** 7.575	**151.** R$ 3,00	**152.** 25%.
153. 2	**154.** 74	**155.** 8 h/d	**156.** 72
157. 528 km	**158.** 134	**159.** R$ 40.000,00	**160.** 20 h
161. 7 e 9	**162.** R$ 7.500,00	**163.** 52	**164.** 18
165. R$534.400,00	**166.** R$ 41,00	**167.** 2.000	**168.** 50%
169. 30	**170.** 20 h	**171.** 8km/h	**172.** 87,80min
173. 300 l	**174.** 9h/d	**175.** 5	**176.** 26%
177. 0,486 l	**178.** 27cm^3	**179.** 100 l	**180.** $\frac{2}{n}$
181. 2,4%	**182.**0	**183.** 16ª linha e 2ª coluna	**184.** a) R$14.331,20 b) 10,24%
185. 1.200	**186.** 20.000	**187.** 60%	**188.** 40
189. 1.161 l	**190.** 315	**191.** 2	**192.** 3.024
193. 15 h	**194.** 3.000	**195.** 600%	**196.** 8
197. Duas	**198.** 46%	**199.** 27	**200.** 36
201. 21%	**202.** 7	**203.** 5	**204.** 112.001
205. a	**206.** b	**207.** c	**208.** a
209. a	**210.** b	**211.** d	**212.** b
213. b	**214.** d	**215.** e	**216.** e
217. c	**218.** b	**219.** e	**220.** d
221. a	**222.** a	**223.** c	**224.** b
225. b	**226.** e	**227.** b	**228.** b
229. e	**230.** e	**231.** d	**232.** a
233. b	**234.** d	**235.** b	**236.** c
237. b	**238.** b	**239.** a	**240.** a
241. c	**242.** c	**243.** b	**244.** b
245. 97	**246.** 15	**247.** b	**248.** d
249. e	**250.** c	**251.** b	**252.** d
253. e	**254.** a	**255.** b	**256.** b
257. d	**258.** a	**259.** d	**260.** d
261. b	**262.** c	**263.** b	**264.** b
265. e	**266.** c	**267.** c	**268.** c
269. e	**270.** c	**271.** b	**272.** e

273. d	**274.** d	**275.** d	**276.** c
277. b	**278.** a	**279.** c	**280.** d
281. e	**282.** e	**283.** b	**284.** d
285. e	**286.** a	**287.** d	**288.** a
289. c	**290.** c	**291.** b	**292.** d
293. d	**294.** d	**295.** c	**296.** a
297. e	**298.** c	**299.** d	**300.** d
301. b	**302.** c	**303.** d	**304.** a
305. d	**306.** d	**307.** c	**308.** a
309. e	**310.** e	**311.** c	**316.** c
317. b	**318.** a	**319.** c	**320.** b
321. d	**322.** c	**323.** c	**324.** e
325. a	**326.** a	**327.** a	**328.** a
329. d	**330.** a	**331.** c	**332.** d
333. b	**334.** d	**335.** b	**336.** e
337. b	**338.** d	**339.** c	**340.** c
341. b	**342.** a	**343.** d	**344.** e
345. a	**346.** d	**347.** b	**348.** d
349. d	**350.** b	**351.** e	**352.** a
353. $x = 9$ $y = 2$ $z = 1$	**354.** zero	**355.** d	**356.** e
357. e	**358.** d	**359.** e	**360.** c
361. e	**362.** 34.592.867.544	**363.** c	**364.** c
365. a	**366.** c	**367.** e	**368.** a
369. b	**370.** e	**371.** e	**372.** d
373. b	**374.** d	**375.** b	**376.** e
377. c	**378.** $0,010\overline{13}$	**379.** $\frac{1}{3}$	**380.** $(0,222\ldots)_5$
381. 5	**382.** d	**383.** b	**384.** e
385. b	**386.** a	**387.** d	**388.** e
389. a	**390.** b	**391.** e	**392.** b
393. b	**394.** d	**395.** b	**396.** a
397. b	**398.** b	**399.** b	**400.** b
401. b	**402.** b	**403.** b	**404.** b
405. d	**406.** $\frac{5}{12}$	**407.** b	**408.** a

409. a	**410.** $\frac{18}{7}$	**411.** 17	**412.** 20
413. 8	**414.** 67	**415.** 11	**416.** a
417. c	**418.** e	**419.** c	**420.** e
421. a	**422.** b	**423.** a	**424.** d
425. d	**426.** a	**427.** b	**428.** e
429. 10	**430.** 73	**431.** $\cong 1,3\,\text{kg}$	**432.** 9.000
433. d	**434.** a	**435.** d	**436.** c
437. e	**438.** d	**439.** b	**440.** d
441. b	**442.** a	**443.** d	**444.** d
445. b	**446.** c	**447.** c	**448.** b
449. a	**450.** d	**451.** a	**452.** b
453. c	**454.** b	**455.** 401	**456.** a
457. e	**458.** 0	**459.** c	**460.** $\frac{1}{2}$
461. $\frac{403}{144}$	**462.** 4.375	**463.** 1	**464.** 3
465. 64	**466.** 0	**467.** $6-\sqrt{5}$	**468.** $\frac{4.012}{2.007}$
469.720	**470.**11	**471.** b	**472.** a
473. c	**474.** d	**475.** a	**476.** e
477. c	**478.** c	**479.** 2	**480.** b
481. 37	**482.** a	**483.** b	**484.** 52
485. e	**486.** b	**487.** e	**488.** $\frac{2}{a}$
489. $0,021_3$	**490.** e	**491.** c	**492.** d
493. a	**494.** $2^{1.995}(2^{1.995}-1)$	**495.** 518	**496.** 9
497. 1;5;2	**498.** 567	**499.** 499	**500.** a
501. 30	**502.** e	**503.** 72	**504.**a
505. d	**506.** e	**507.** a	**508.** e
509. d	**510.** c	**511.** d	**512.** b
513. e	**514.** e	**515.** c	**516.** c
517. a) $\frac{4}{33}$; b) $\frac{n}{3(2n+3)}$	**518.**d	**519.** b	**520.** d
521. 198	**522.** 4.725	**523.** b	**524.** $\frac{2d^2}{100-3d}$
525. 9	**526.** e	**527.** $2^{2^{2000}}-1$	**528.** X
529. d	**530.** d	**531.** $0,3\,l$	**532.** $\frac{99}{100}$
533. 272	**534.** 120	**535.** e	**536.** e
537. 7	**538.** 9	**539.** b	**540.** d
541. 64	**542.** e	**543.** b	**544.** 9; 1 e 0

545. d	**546.** 22.100	**547.**142.857	**548.** $\frac{9}{8}$
549. c	**550.** c	**551.** b	**552.** d
553. b	**554.** b	**555.** e	**556.** $\frac{4}{5}$
557. 6	**558.** 8	**559.** 6	**560.** 75 l
561. a	**562.** 1.999	**563.** 3.990	**564.** a
565. b	**566.** d	**567.** e	**568.** c
569. b	**570.** b	**571.** 1.332	**572.** 539
573. 3 e 7	**574.** 0081	**575.** 1	**576.** d
577. d	**578.** a	**579.** 17	**580.** 198
581. b	**582.** c	**583.** b	**584.** c
585. 27	**586.** e	**587.** d	**588.** 235
589. 8	**590.** b	**591.**	**592.**
593. a) R$ 21.000,00 b) 50%	**594.** 50%	**595.** 50	**596.** a) 80% b) 92
597. 360	**598.** 40%	**599.** d	**600.** c
601. a) Firma 3 b) 20 dias	**602.** a) $\geq$ 60% e $\leq$ 70% b) $\geq$ 40% e $\leq$ 70%	**603.** d	**604.** e
605. e	**606.** c	**607.** a	**608.** c
609. e	**610.** d	**611.** a	**612.** b
613. d	**614.** 100	**615.** 3%	**616.** 2.000
617. b	**618.** d	**619.** 2 meses	**620.** d
621. d	**622.** e	**623.** b	**624.** a) 40 b) 8
625. b	**626.** d	**627.** e	**628.** e
629. d	**630.** c	**631.** c	**632.** c
633. c	**634.** c	**635.** e	**636.** e
637. b	**638.** a) 167 g b) 297 g	**639.** a) 2.310 m b) 330 m	**640.** a) 222 e 11 b) 16
641. d	**642.** 357	**643.** c	**644.** e
645. a	**646.** d	**647.** b	**648.** c
649. a	**650.** a	**651.** c	**652.** b
653. b	**654.** d	**655.** c	

Siglas

AMC - American Mathematics Competitions
ASMC - Alabama Statewide Mathematics Contest
BAMM - Bay Área Math Meet
BCC - British Columbia Mathematics
CEFET - Centro Federal de Educação Tecnológica
CESGRANRIO - Centro de Seleção do Grande Rio
CN - Colégio Naval
CM-RJ - Colégio Militar do Rio de Janeiro
EPCAR - Escola Preparatória de Cadete da Aeronáutica
FEI-SP - Faculdade de Engenharia Industrial
FU - Furman University
HSMC - High School Maths Contest
MACK - SP - Mackenzie
MATD - Um Alpha Theta Denver
NZ - Nova Zelândia
NSU - Northern State University
OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática
OEM - Olimpíada Estadual de Matemática
OIM - Olimpíada Iberoamericana de Matemática
OMA - Olimpíada de Matemática Argentina
OMM - OMP-PT - Olimpíada de Matemática Mexicana
OMP-PAN - Olimpíada de Matemática Panamenha
OMP-PT - Olimpíada de Matemática Portuguesa
PUC - Pontifícia Universidade Católica
SAMO - South African Mathematics Olympiad
UEL-PR - Universidade Estadual de Limeira
UERJ - Universidade Estadual do Rio de Janeiro
UFF - Universidade Federal Fluminense
UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais
UFOP-MG - Universidade Federal de Ouro Preto
UFPI - Universidade Federal do Piauí
UFRJ - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UM - University Mississipi

UNC - University North Carolina
UNICAMP - Universidade de Campinas
UNIFOR-CE - Universidade Federal de Fortaleza
UNI-RIO - Universidade do Rio de Janeiro
USAMO - United States of American Mathematical Olympiad
USC - University South Carolina
USMC - Utah State Mathematics Tournament
VEST-RIO - Vestibular Rio

Glossário[1]

1. *Proposição* - É um conjunto de afirmações;
2. *Conceito* - Idéia, noção, conteúdo de uma proposição;
3. *Recíproca* - Diz-se de duas proposições onde uma implica necessariamente em outra:
4. *Contradição* - Proposição em que a afirmação de uma implica a negação da outra;
5. *Problema* - Quesito. Toda questão que se quer calcular uma ou mais quantidades desconhecidas, denominadas incógnitas, ligadas mediante relações a outras conhecidas e chamadas de dados;
6. *Resolução* - É o desenvolvimento de um problema;
7. *Solução* - É a resposta de um problema;
8. *Zetética* - Método de investigação ou conjunto de preceitos para a resolução de um problema;
9. *Raciocínio* - Operação mental utilizado para equacionar e resolver um problema;
10. *Demonstração* - Raciocínio de que se conclui a verdade de uma proposição;
11. *Lema* - Proposição básica usada na demonstração de outra proposição;
12. *Princípio* - Proposição em que, todo desenvolvimento posterior de um assunto deve estar subordinado à mesma;
13. *Dedução* - Conseqüência proveniente de um princípio;
14. *Axioma* - Princípio evidente por si mesmo e que não precisa ser demonstrado;
15. *Postulado* - Proposição admitida sem demonstração e que serve de fundamento para dedução de novas proposições;

[1] Vocabulário em que se dá a explicação clara de palavras obscuras ou desusadas.

16. *Teorema* - Proposição que para ser aceita, necessita de uma demonstração;

17. *Hipótese* - Suposição, conjunto de condições que se toma como ponto de partida para o desenvolvimento de um raciocínio;

18. *Conjetura* (*conjectura*) - Suposição, hipótese;

19. *Tese* - Conclusão;

20. *Corolário* - Teorema que se deduz com muita facilidade de outro anterior;

21. *Propriedade* - É uma particularidade;

22. *Regra* - Norma, preceito;

23. *Lei* - É a relação constante entre elementos que variam;

24. *Escólio* - É uma observação particular;

25. *Conceito* - Idéia, noção, conteúdo de uma proposição;

26. *Definição* - Proposição que expõe com clareza e exatidão os caracteres genéricos e diferenciais de uma coisa;

27. *Algoritmo* - É qualquer dispositivo de cálculo;

28. *Silogismo* - Proposição lógica, recurso de argumentação que consiste em três proposições: a primeira chamada premissa da maior, a segunda chamada premissa da menor e a terceira conclusão;

29. *Premissa* - Cada uma das duas proposições, a maior e a menor de um silogismo;

30. *Dilema* - É o confronto de duas proposições. Há três tipos de dilema: o dedutivo, o indutivo e o analógico. - dilema dedutivo - quando as premissas são mais gerais que as conclusões; - dilema indutivo - quando as premissas são mais particulares; - dilema analógico - conclusão a partir da semelhança entre dois ou mais termos.

31. *Aritmético* - indivíduo que leciona ou sabe aritmética;

32. *Alternativa* - Obrigação ou faculdade de escolher entre *duas* coisas, que se imponham pela lógica ou pelas circunstâncias.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, Lauro Pastor., *Curso de Matemática*, Ciclo Colegial, 1ª , 2ª e 3ª séries. Rio de Janeiro, Editora Conquista, 1955.

[2] Alves, Victalino & Quintella, Ary., *Matemática - Questões de Concurso nas Escolas Superiores.* São Paulo, 1.947.

[3] Amodeo, Federico., *Aritmetica ed Algebra.* Parte prima, 2ª Edizione. Napoli, 1945.

[4] Aracil, Carlos Mataix., *Aritmetica General y Mercantil*, Tercera Edición. Madrid, Editorial DOSSAT, S.A, 1946.

[5] Brandão, Marcius., *Matemática Conceituação Moderna*, 1º , 2º e 3º volumes. São Paulo, Editora do Brasil, S/A, 1968.

[6] Caronnet, Th., *Exercices D'Arithmétique.* Deuxième Édition. Paris, Librairie Vuibert, 1948.

[7] Carvalho, Alexandre Augusto Pires de., *Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional.* Porto, Livraria Simões Lopes, 1948.

[8] Carvalho, Luiz Antônio Alves de., *Arithmetica Theorica e Pratica.* Rio de Janeiro, 1918.

[9] Cattony, Carlos., *Lições de Matemática Elementar*, 1º , 2º e 3º volumes, São Paulo. Editora Anchieta Limitada, 1944.

[10] Combette, E., *Cours D'Arithmétique.* Quatrozième Édition. Paris, Librairie Felix Alcan, 1913.

[11] Desboves., *Questions D'Algèbre Élémentaire.* Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1892.

[12] Delens, P., *Problèmes D'Arithmétique Amusante.* Trosième Édition. Paris, Librairie Vuibert, 1937.

[13] Dudley, Underwood., *Elementary Number Theory.* Second Edition. São Francisco, W. H. Freeman and Company, 1978.

[14] Filho, Edgard de Alencar, *Exercícios de Aritmética Racional.* São Paulo, Livraria Nobel, S.A, 1959.

[15] Fernandes, Antônio do Nascimento Palma, *Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional.* Para o 6º Ano dos Liceus. 19ª Edição. Lisboa, Plátano Editora, 1975.

[16] Fomin, S., *Iniciação na Matemática. Sistema de Numeração.* Moscou, Editora MIR, 1980.

[17] Galante, Carlos & Santos., Osvaldo Marcondes. *Matemática.* Segunda Série, Curso Ginasial. São Paulo, Editora do Brasil, S.A, 1955.

[18] Galante, Carlos., *Matemática.* Primeira Série, Curso Ginasial. São Paulo, Editora do Brasil S/A, 1960.

[19] Gonzales, Mário O., *Complementos de Aritmética.* Tomo Primeiro. New York, Minerva Books, LTD, 1965.

[20] Kitzinger, Waldemar, *Regras de Três, Útil, Prática e Atraente.* 1ª edição, Rio de Janeiro, Editora "A Noite", 1945.

[21] Lemgruber, Nicanor & Peixoto, Roberto, *Matemática.* Curso Ginasial, 1ª e 2ª Séries, 3ª Edição. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1949.

[22] Lemgruber, Nicanor & Roberto Peixoto, *Matemática.* Curso Ginasial, 3ª série. Rio de Janeiro, Editora Minerva, 1945.

[23] Lemgruber, Nicanor; Thiré, Cecil & Souza, J. C. Mello, *Matemática Comercial e Financeira.* 3ª edição, Rio de Janeiro, 1942.

[24] Lisbôa, Joaquim I de A., Álgebra Elementar. Primeiro Volume. Paris, Gauthier-Villars, Livreiro-Editor, 1911.

[25] Maristas Irmãos, *Matemática.* 25ª edição. São Paulo, Editora Coleção F.T.D. Ltda.

[26] Maristas Irmãos, *Tábua de Logarítmos.* São Paulo, Editora do Brasil, S/A, 1962.

[27] Maeder, Algacyr Munhoz, *Curso de Matemática.* 1ª série. São Paulo, Edições Melhoramentos, 1945.

[28] Maia, L.P.M., *Análise Matemática.* Vol. I. Rio de Janeiro, Editora Nacionalista, 1960.

[29] Marcondes, Osvaldo, *Aritmética.* São Paulo, Editora do Brasil S/A, 1970.

[30] Maryn, André' Perez Y., *Arithmetica, Theorico-Pratica.* São Paulo, 8ª Edição, 1924.

[31] Netto, Scipione di Pierro, *Matemática na Escola Renovada.* Curso Ginasial, Volumes 1 e 2. São Paulo. Editora Saraiva, S.A.

[32] Neves, Francisco Ferreira, *Aritmética Racional.* VII Ano dos Liceus. Lisboa, Editora Sá da Costa.

[33] Niewenglowski, B., *Questions D'Arithmétique.* Paris, Librairie Vuibert, 1927.

[34] Niewenglowski, B., *Traité D'Arithmétique.* Deuxième Édition. Paris, Librairie Delagrave, 1927.

[35] OBM, Eureka!.

[36] O'Reilly, Newton, *Admissão ao Instituto de Educação e aos Colégios Militares.* São Paulo, Companhia Editora Nacional, 21ª Edição, 1958.

[37] O'Reilly, Newton, *Caderno de Aritmética. Admissão ao Curso Ginasial*, 1º e 2º volumes, 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora Minerva, 1968.

[38] Par une réunion de professeurs, *Exercices D'Arithmétique.* Paris-VIe, Librairie Générale, 1927.

[39] Pessoa, Paulo, *Problemas de Aritmética.* J. OZON + EDITOR 2ª edição.

[40] Pessoa, Paulo, *Aritmética, Questões de Exames.* Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves Editora S.A.

[41] Pettofrezzo, Anthony J. e Byrkit, Donald R., *Elements of Numbers Theory.* PRENTICE-HALL, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1 .70.

[42] Pinto, Francisco Leite, *Lições de Aritmética Racional.* 6ª Edição. Lisboa, Livraria Franco, 1946.

[43] Pirajá, Maurício, *Problemas Resolvidos de Matemática, Aritmética.* Rio de Janeiro, Livraria Freitas Bastos, 1963.

[44] Piskounov, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, Volume I, 16ª Edição. Porto, Edições Lopes da Silva, 1993.

[45] Plana, José Luis Mataix, *Aritmetica.* Segunda Edición. Madrid, Editorial DOSSAT, S.A.

[46] Quintella, Ary & O'Reilly Newton., *Exercícios de Aritmética para o Curso de Admissão.* 9ª edição, São Paulo, 1954.

[47] Quintella, Ary, *Matemática.* 1º , 2º e 3º anos, São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1942.

[48] Reis, Aarão & Reis, Lucano, *Curso Elementar de Matemática "Arithmetica", Theórico Pratico e Applicado.* Rio de Janeiro, Imprensa Nacional, 1892.

[49] Rodrigues, Neves, *Admissão às Escolas Preparatórias. Aritmética, Exercícios.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, Ltda, 1958.

[50] Roxo, Euclides de Medeiros Guimarães, *Lições de Arithmetica.* Rio de Janeiro, 1ª edição, 1923.

[51] Roxo, Euclides, Souza; J. C de Mello & Thiré, Cecil, *Curso de Matemática.* 3º ano, 4ª edição. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1941.

[52] Sangiorge, Osvaldo, *Matemática.* 3ª série. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1986.

[53] Sangiorge, Osvaldo, *Matemática.* 5ª e 6ª séries. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1986.

[54] Santos, Antonio Luiz,*Problemas Selecionados de Matemática.* 1ª Edição. Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna, 2006.

[55] Serrasqueiro, José Adelino, *Tratado Elementar de Arithmetica.* 22ª Edição. Coimbra, Livraria Central de J. Diogo Pires-Sucessores, 1926.

[56] Revistas do Professor de Matemática, SBM.

[57] Souza, Mello E., *História e Fantasias da Matemática.* Editorial Calvino Ltda, 1939.

[58] S. Vatriquant; C. Van de Werque & B. Van Staey, *Compléments d'Aritmétique*, Dixième Édition, Maison D'édition Ad. Wesmael-Charlier, S.A., Namur, 1948.

[59] Stranges, Norberto Cyrano, *Elementos de Matemática.* Rio de Janeiro, A Casa do Livro LTDA, 1944.

[60] Thiré, Cecil, *Manual de Matemática.* 3º ano, 12ª edição. Rio de Janeiro, Editora Francisco Alves.

[61] Thiré, Cecil, *Questões de Arithmetica, Theoricas e Praticas.* 10ª edição, Pimenta de Mello, 1925.

[62] Thiré, Cecil, *Manual de Matemática.* 2º Ano de Matemática, 13ª Edição. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves.

[63] Thiré, Cecil, *Manual de Matemática.* 1º ano Colegial, Científico e Clássico. Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1ª Edição, 1923.

[64] Trajano, Antônio, *Aritmética Progressiva.* 85ª edição. Rio de Janeiro. Livraria Francisco Alves, 1955.